

# 带有饱和常数和布朗运动的HIV随机分析

赵志杰\*, 江绍萍#, 段映国

云南民族大学数学与计算机科学学院, 云南 昆明

收稿日期: 2026年4月28日; 录用日期: 2026年5月22日; 发布日期: 2026年5月29日

## 摘要

本文在经典HIV感染动力学模型基础上, 提出了一种同时考虑外部随机扰动与饱和常数的新型随机微分方程模型。在模型构建中, 将随机噪声引入靶细胞感染速率, 以刻画外界不确定因素对感染过程的干扰; 同时引入饱和常数 $a$ 描述高靶细胞密度下的感染饱和和效应, 从而提升模型的生物学合理性。针对所建立的随机模型, 本文首先利用停时技巧、Lyapunov函数及Itô公式, 严格证明了全局正解的存在唯一性, 并分析了解的的正性与有界性。进一步, 通过对数Lyapunov函数结合停时方法, 推导了感染细胞与病毒的均值持久性条件, 以及系统发生随机灭绝的充分条件。最后, 结合数值模拟验证理论分析, 并针对噪声强度开展参数敏感性研究, 划分了系统的持久区与灭绝区。结果表明, 适度的随机扰动可显著影响感染细胞稳态水平, 且饱和感染机制能够有效避免非生物学意义的无限增长。本文为HIV感染的随机动力学分析提供了理论依据与数值参考。

## 关键词

随机微分方程, 全局正解, 随机灭绝, 均值持久

# Stochastic Analysis of an HIV Model with Saturation Incidence and Brownian Motion

Zhijie Zhao\*, Shaoping Jiang#, Yingguo Duan

School of Mathematics & Computer Science, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan

Received: April 28, 2026; accepted: May 22, 2026; published: May 29, 2026

## Abstract

Based on the classical HIV infection dynamical model, this paper proposes a new stochastic differential equation model considering both external stochastic perturbations and saturated infection

\*第一作者。

#通讯作者。

文章引用: 赵志杰, 江绍萍, 段映国. 带有饱和常数和布朗运动的 HIV 随机分析[J]. 应用数学进展, 2026, 15(5): 644-658. DOI: 10.12677/aam.2026.155257

rate. In the modeling process, random noise is introduced into the infection rate of target cells to characterize the disturbance of external uncertain factors. Meanwhile, the saturation constant  $a$  is introduced to describe the infection saturation effect at high target cell density, which improves the biological rationality of the model. For the established stochastic model, we first rigorously prove the existence and uniqueness of the global positive solution by using the stopping time technique, Lyapunov functions and Itô's formula, and analyze the positivity and boundedness of the solution. Furthermore, using logarithmic Lyapunov functions combined with the stopping time method, we derive the conditions for the mean persistence of infected cells and viruses, as well as the sufficient conditions for stochastic extinction of the system. Finally, numerical simulations are conducted to verify the theoretical results, and parametric sensitivity analysis is performed on the noise intensity, which divides the persistence region and extinction region of the system. The results show that moderate random perturbations can significantly affect the steady-state level of infected cells, and the saturated infection mechanism can effectively avoid non-biologically meaningful unbounded growth. This work provides a theoretical basis and numerical reference for the stochastic dynamic analysis of HIV infection.

## Keywords

Stochastic Differential Equation, Global Positive Solution, Stochastic Extinction, Mean Persistence

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

人类免疫缺陷病毒 HIV 作为一种逆转录病毒,其在宿主体内的动态演化与传播机制一直是传染病动力学与公共卫生领域的研究重点。自上世纪八十年代被发现以来, HIV 感染已演变为全球性公共卫生挑战,尽管高效抗逆转录病毒疗法显著延长了患者生存期并将其转化为可控慢性病,但病毒潜伏库的存在、治疗依从性差异及跨疾病阶段的异质性传播,仍使得系统长期行为的精准预测与干预策略制定面临巨大挑战。

传统的确定性微分方程模型(如常微分方程 ODE)在揭示 HIV 感染的平均动力学特征方面取得了里程碑式进展。Perelson [1]等人构建了经典的 HIV 体内感染动力学模型,精准量化了病毒清除率、感染细胞寿命及病毒复制周期,奠定了 HIV 体内动力学的数学基础。Nowak [2]等人结合宿主免疫响应构建扩展模型,揭示了免疫压力下病毒载量的演化规律。Wodarz 和 Nowak [3]构建病毒-免疫细胞耦合动力学模型,阐明 HIV 与 CTL 免疫应答的竞争平衡机制,揭示无症状期维持及疾病进展的动力学阈值。Regoes [4]等人结合治疗干预构建模型,为个体化治疗策略设计提供了数学参考。这些研究均依托确定性框架,成功刻画了 HIV 感染的平均演化趋势,为理解病毒复制、免疫响应与治疗干预的核心机制奠定了坚实基础。

近年来,随机微分方程(SDE)因能够刻画环境噪声与随机波动,逐渐成为 HIV 动力学研究的主流方法。2018年, Liu [5]等人构建含潜伏感染与治疗干预的随机 HIV 动力学模型,探究了模型全局正解的存在唯一性,并分析了系统随机平稳分布的动力学特征。2021年, Wang [6]等人构建了包含细胞间传播与随机扰动的 HIV 潜伏感染模型,分析了随机扰动下系统的动力学行为。2021年, Boukhouima [7]等人研究带记忆效应的分数阶 HIV 动力学模型,揭示了分数阶导数所表征的记忆机制对病毒传播动态的调控作用。2025年, Dong [8]等人提出了一种基于混沌动力学的元启发式优化算法,为传染病动力学模型的参数估计与最优控制策略求解提供了高效的数值工具。2018年, Liu [9]等人构建了包含潜伏感染的随机 HIV 动力学模型,探究了模型全局正解的存在唯一性,并分析了系统的随机平稳分布。2026年, Khan [10]等

人针对霍乱传播构建了随机流行病模型，系统分析了噪声扰动下的疾病动力学行为，并开展了最优控制策略研究，为随机环境下传染病防控策略的优化提供了参考。2017年，Xu [11]构建了随机微分方程形式的 SIS 流行病模型，推导了系统的全局阈值动力学，揭示了噪声扰动下疾病灭绝与持续的关键条件。

这些研究充分表明，SDE 模型能够更真实地反映 HIV 感染过程中的随机不确定性。然而，现实世界中 HIV 感染系统始终受到各类内在与外在随机因素的扰动，包括宿主免疫反应的个体差异、病毒传播的接触异质性、治疗方案的中断与切换，以及公共卫生政策的突发性调整等[11]。这些随机波动无法被确定性模型完美刻画，甚至可能导致系统行为与确定性预测出现显著偏差。因此，构建并分析能够真实反映随机环境干扰的 HIV 感染动力学模型，不仅是对经典理论体系的重要补充，更是实现 HIV 精准防控与个体化治疗优化的关键数学工具[12]。作为刻画随机动态系统的核心工具，随机微分方程(SDE)通过引入标准布朗运动与环境噪声项，能够自然描述 HIV 感染过程中连续时间演化与瞬时随机扰动的耦合特征，其在 HIV 随机动力学建模中的成熟应用与方法学积累[13]，也为本文构建更贴合实际的 HIV 感染模型提供了坚实的方法学支撑。

在 HIV 感染建模领域，现有 SDE 模型虽取得一定进展，但仍存在明显不足：其一，多数随机模型仍沿用传统双线性感染率形式，未能合理刻画高靶细胞浓度下感染速率趋于饱和的生物学特征，与真实感染演化规律存在客观偏差[14]；其二，部分虽引入饱和感染率的研究(如文献[9])，仅侧重模型拟合与数值模拟，缺乏对全局正解、均值持久及随机灭绝阈值的系统性严格理论推导；其三，现有研究构建的随机持久与灭绝阈值多形式复杂、通用性偏弱，且鲜有工作系统探究不同噪声强度对阈值临界条件的影响规律[15]。整体而言，同时耦合饱和感染率与随机扰动的 HIV 随机模型，其完整的动力学定性理论(包括全局正解存在唯一性、一致有界性、简洁有效的持久 - 灭绝阈值判据)尚未形成完善体系，这也为本文的研究提供了切入点。

基于上述背景，本文在经典 HIV 感染模型基础上，引入更符合生物实际的饱和感染率并耦合连续型白噪声，构建了含饱和常数的随机 HIV 感染微分方程模型，相较于文献[6] [9]仅考虑单一感染环节或未严格结合饱和机制的设置，本文模型在生物学合理性上更具优势。本文创新性地构造了适用于带饱和项的随机系统的 Lyapunov 函数，结合停时技巧与 Itô 公式，严格证明了模型全局正解的存在唯一性，并首次在该类模型下完整获得了解的一致有界性；在此基础上，推导得到形式更简洁、适用范围更普适的系统均值持久与随机灭绝充分阈值条件，明确揭示了随机噪声强度与饱和常数对疾病长期演化的联合调控机制。

本文的研究思路与结构安排如下：第 1 节详细描述含饱和常数的 HIV 随机感染模型，并给出模型的基本假设与参数定义；第 2 节重点分析模型全局正解的存在唯一性、正性与有界性；第 3 节推导系统均值持久与随机灭绝的充分条件；第 4 节通过数值模拟验证理论分析结果，并开展参数敏感性分析；第 5 节为结论，总结本文主要工作并展望未来研究方向。

## 2. 模型的构建

### 2.1. 随机扰动参数的选择与合理性论证

作为刻画随机动态系统的核心工具，随机微分方程(SDE)通过引入标准布朗运动与扩散系数，能够自然地描述生物系统中连续时间演化与瞬时随机波动的耦合关系，其在传染病动力学领域的广泛应用[13]，也为本文构建更贴合实际的 HIV 感染模型提供了坚实的方法学支撑。

在 HIV 感染动力学建模中，病毒感染靶细胞的速率  $M$  是表征病毒与靶细胞接触效率及感染启动关键环节的核心参数，其生物学意义直接决定了感染过程的起始与传播效率[16]。从生物机制来看， $M$  的取值极易受到宿主个体免疫状态波动、病毒亚型差异、治疗干预实施效果及微环境随机变化等多重因素的调控，呈现出显著的随机波动特征[6] [9]。现有研究已证实，感染率类参数的随机扰动是引发 HIV 感染

系统动力学行为偏离确定性预测的关键因素之一：Wang 等[6]在随机 HIV 模型研究中指出，感染过程相关参数的噪声会直接改变病毒载量的演化趋势，是影响疾病灭绝与持久条件的核心变量；Liu 等[9]结合饱和和感染率的随机模型分析进一步表明，在含饱和效应的感染机制下，感染效率参数的波动会通过饱和和感染项  $\frac{MT(t)V(t)}{a+T(t)}$  快速传导至全系统，对感染细胞与病毒颗粒的动态变化产生决定性影响，其扰动效应远高于其他生理参数。

结合上述研究结论与模型的核心设定，本文选择对参数  $M$  施加白噪声扰动，以精准刻画 HIV 感染过程中最具生物学意义且对系统动态影响最显著的随机不确定性。需要明确的是，本文未对未感染 T 细胞死亡率  $w$ 、感染细胞死亡率  $\zeta$  等其他参数引入随机扰动，并非忽视这些参数的随机性，而是基于研究聚焦性与理论分析可行性的双重考量：其一，从研究目标出发，本文核心旨在揭示饱和和常数与感染率随机扰动的耦合效应，聚焦单一关键参数的随机波动可避免多源噪声叠加导致的分析复杂度，更能清晰剥离  $M$  扰动对系统长期动力学行为的独立调控机制；其二，从理论推导角度，现有针对多参数随机扰动的 HIV-SDE 模型研究仍较少，且多参数噪声会使得全局正解存在唯一性、均值持久与随机灭绝条件的证明难度大大增加，可行性不强，不利于本文核心结论的凝练与呈现[11]。这一简化设定既符合传染病动力学建模中“抓核心变量”的研究思路，也为后续拓展至多参数随机扰动模型预留了研究空间。

## 2.2. 带有饱和常数和布朗运动的 HIV 模型构建

HIV 感染后，血液中的细胞可分为三类：未感染的 T 细胞  $T(t)$ 、感染的 T 细胞  $I(t)$  和游离的 HIV 病毒颗粒  $V(t)$ 。对于文献[16]中的模型，为了描述病毒感染 T 细胞过程中的饱和效应，让模型更贴近真实的生物过程，首先，在该模型中引入了半饱和常数  $a$ ，其次，临床与环境因素的个体差异与瞬时波动，使 HIV 感染动力学参数呈现不确定性。病毒感染靶细胞的速率  $M$  作为刻画病毒与细胞接触效率的核心参数，对外部随机扰动极为敏感且  $M$  的波动通过感染项  $\frac{MVT}{a+T}$  快速传导至全系统，影响  $I(t)$  与  $V(t)$  的变化。因此，相较于其他参数， $M$  的波动更易引发系统状态的显著改变。为刻画感染过程的随机不确定性，我们在  $M$  中引入白噪声：

$$M \rightarrow M + \sigma M dW(t)$$

则我们可以得到一个 T 细胞生长噪声的随机 HIV 模型：

$$\begin{cases} dT(t) = \left[ r - wT(t) + \rho T(t) \left( 1 - \frac{T(t) + I(t)}{T_{\max}} - \frac{MT(t)V(t)}{a+T(t)} \right) \right] dt - \sigma M \frac{T(t)V(t)}{a+T(t)} dW(t), \\ dI(t) = \left[ \frac{MT(t)V(t)}{a+T(t)} - \zeta I(t) \right] dt + \sigma M \frac{T(t)V(t)}{a+T(t)} dW(t), \\ dV(t) = [\alpha \zeta I(t) - \delta V(t)] dt, \end{cases} \quad (1)$$

初始条件为：  $T(0) > 0$  ,  $I(0) > 0$  ,  $V(0) > 0$  。

参数意义

符号	生物学意义	单位/说明
$r$	未感染 T 细胞的生长率	$\text{day}^{-1}$
$w$	未感染 T 细胞的死亡率	$\text{day}^{-1}$
$\rho$	感染 T 细胞的病毒感染率	$\text{day}^{-1}$

续表

$\zeta$	感染 T 细胞的死亡率	day <sup>-1</sup>
$\alpha$	每个感染 T 细胞产生的病毒颗粒数	无量纲
$a$	半饱和常数	mm <sup>-3</sup>
$T_{\max}$	未感染 T 细胞的最大浓度	mm <sup>-3</sup>
$M$	病毒感染 T 细胞的速率	day <sup>-1</sup>
$\delta$	病毒的死亡率	day <sup>-1</sup>
$\sigma$	随机噪声强度系数	无量纲
$W(t)$	标准布朗运动	随机过程, 无单位

### 3. 主要结果及证明

#### 3.1. 全局正解的存在唯一性

**定理 3.1** 设  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  为完备滤波概率空间, 所有参数  $r, w, \rho, T_{\max}, M, a, \sigma, \zeta, \alpha, \delta$  均为正数。则模型(1)存在唯一全局正解  $(T(t), I(t), V(t))$ , 且对任意  $t \geq 0$ ,

$$T(t) > 0, I(t) > 0, V(t) > 0 \text{ a.s.}$$

证明: (1) 证明局部解的存在唯一性。

令  $X(t) = (T(t), I(t), V(t))^T$ , 将模型写为标准 SDE:

$$dX(t) = b(X(t))dt + g(X(t))dW(t),$$

其中

$$b(X) = \begin{pmatrix} r - wT + \rho T \left(1 - \frac{T+I}{T_{\max}}\right) - \frac{MTV}{a+T} \\ \frac{MTV}{a+T} - \zeta I \\ \alpha \zeta I - \delta V \end{pmatrix}, \quad g(X) = \begin{pmatrix} -\sigma \frac{MTV}{a+T} \\ \sigma \frac{MTV}{a+T} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因为在正半轴  $\mathbb{R}_+^3$  上,  $b(X)$  和  $g(X)$  各分量连续可微, 因此在任意有界闭集  $K \subset \mathbb{R}_+^3$  上满足局部 Lipschitz 条件。对每个分量给出严格量化上界:

漂移项  $b(X)$  第一分量:

$$\begin{aligned} & \left| r - wT + \rho T \left(1 - \frac{T+I}{T_{\max}}\right) - \frac{MTV}{a+T} \right| \\ & \leq r + wT + \rho T + \frac{\rho T(T+I)}{T_{\max}} + \frac{MTV}{a} \\ & \leq r + (w + \rho)T + \frac{\rho}{T_{\max}}(T^2 + TI) + \frac{M}{a}TV \\ & \leq C_1(1 + |X|^2), \end{aligned}$$

其中  $C_1 = \max \left\{ r, w + \rho, \frac{\rho}{T_{\max}}, \frac{M}{a} \right\}$ 。

漂移项  $b(X)$  第二分量:

$$\left| \frac{MTV}{a+T} - \zeta I \right| \leq \frac{M}{a} TV + \zeta I \leq C_2 (1+|X|^2),$$

其中  $C_2 = \max \left\{ \zeta, \frac{M}{a} \right\}$ 。

漂移项  $b(X)$  第三分量:

$$|\alpha \zeta I - \delta V| \leq \alpha \zeta I + \delta V \leq C_3 (1+|X|^2),$$

其中  $C_3 = \max \{ \alpha \zeta, \delta \}$ 。

扩散项  $g(X)$  非零分量:

$$\left| \sigma \frac{MTV}{a+T} \right| \leq \frac{\sigma M}{a} TV \leq C_4 (1+|X|^2),$$

其中  $C_4 = \frac{\sigma M}{a}$ 。

取  $C = \max \{ C_1, C_2, C_3, C_4 \}$ , 则

$$|b(X)| + |g(X)| \leq C (1+|X|^2), \quad \forall X \in \mathbb{R}_+^3.$$

多项式增长条件得证。再根据 Ikeda-Watanabe 定理, 模型(1)存在唯一局部解  $X(t)$ , 其最大存在区间为  $[0, \tau_e)$ ,  $\tau_e$  为爆破时间(停时)。

(2) 正性证明

定义停时

$$\tau_n = \inf \{ t \in [0, \tau_e) : T(t) \leq 1/n \text{ 或 } I(t) \leq 1/n \text{ 或 } V(t) \leq 1/n \},$$

并规定  $\inf \emptyset = \infty$ , 显然  $\tau_n \uparrow \tau_e (n \rightarrow \infty)$ 。

步骤一: 对  $T(t)$ : 构造  $U(t) = \ln T(t)$ , 结合模型(1)中  $dT(t)$  的表达式并应用 Itô 公式:

$$dU(t) = \left[ \frac{r - wT + \rho T(1 - (T+I)/T_{\max}) - \frac{MTV}{a+T}}{T} - \frac{1}{2} \left( \sigma \frac{MV}{a+T} \right)^2 \right] dt - \sigma \frac{MV}{a+T} dW(t).$$

化简得:

$$dU(t) = \left( \frac{r}{T} - w + \rho - \frac{\rho(T+I)}{T_{\max}} - \frac{MV}{a+T} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{M^2 V^2}{(a+T)^2} \right) dt - \sigma \frac{MV}{a+T} dW(t).$$

在  $[0, t \wedge \tau_n]$  上积分并取数学期望:

$$\mathbb{E}[\ln T(t \wedge \tau_n)] = \ln T_0 + \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \tau_n} \left( \frac{r}{T} - w + \rho - \frac{\rho(T+I)}{T_{\max}} - \frac{MV}{a+T} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{M^2 V^2}{(a+T)^2} \right) ds.$$

若存在有限时间使得  $T(t) \rightarrow 0^+$ , 则  $\frac{r}{T} \rightarrow +\infty$ , 导致右端积分发散到  $+\infty$ ; 但左端  $\ln T(t \wedge \tau_n) \leq \ln n$  有界(停时约束下  $T(t \wedge \tau_n) \geq 1/n$ ), 矛盾。因此  $T(t) > 1/n$  a.s., 故令  $n \rightarrow \infty$  得  $T(t) > 0$  a.s.

步骤二: 对  $I(t)$ : 将模型(1)中的  $dI(t)$  两边同时乘以积分因子  $e^{\zeta t}$ , 再根据 Itô 公式得:

$$d(e^{\zeta t} I(t)) = e^{\zeta t} \frac{MTV}{a+T} dt + e^{\zeta t} \sigma \frac{MTV}{a+T} dW(t).$$

积分得解析形式:

$$I(t) = e^{-\zeta t} \left( I_0 + \int_0^t e^{\zeta s} \frac{MT(s)V(s)}{a+T(s)} ds + \int_0^t e^{\zeta s} \sigma \frac{MT(s)V(s)}{a+T(s)} dW(s) \right).$$

其中随机积分项为连续局部鞅, 初始值为 0 且被积函数非负, 故其轨道几乎必然非负; 结合  $T(s) > 0$  且  $I_0 > 0$ , 得  $I(t) > 0$  a.s.

步骤三: 对  $V(t)$ : 由于模型(1)中的  $dV(t)$  满足确定性线性微分方程, 易得解析解为:

$$V(t) = e^{-\delta t} \left( V_0 + \alpha \zeta \int_0^t e^{\delta s} I(s) ds \right).$$

由  $I(s) > 0$  a.s. 且  $V_0 > 0$ , 积分项严格正, 故  $V(t) > 0$  a.s.

(3) 全局性证明

构造 Lyapunov 函数:

$$V_1(X) = (T - 1 - \ln T) + (I - 1 - \ln I) + (V - 1 - \ln V).$$

该函数满足非负性: 由基本不等式  $x - 1 - \ln x \geq 0 (\forall x > 0)$ , 得  $V_1(X) \geq 0$ ; 控界性: 当  $T/I/V \rightarrow 0^+$  或  $+\infty$  时,  $V_1(X) \rightarrow +\infty$ , 可有效防止解爆破。Itô 生成算子为:

$$\mathcal{L}V_1(X) = \sum_{i=1}^3 \left( 1 - \frac{1}{X_i} \right) b_i(X) + \frac{1}{2} \left( \frac{g_1^2}{T^2} + \frac{g_2^2}{I^2} \right). \tag{2}$$

其中,  $g_1(X) = -\sigma \frac{MTV}{a+T}$ ,  $g_2(X) = \sigma \frac{MTV}{a+T}$  分别为状态变量  $T(t)$  和  $I(t)$  对应的扩散项系数。在(2)中代入  $b(X), g(X)$  并利用基本不等式放缩, 则存在常数  $K, C > 0$  (与模型参数相关), 使得:

$$\mathcal{L}V_1(X) \leq K - C(T + I + V).$$

故可定义完整停时:

$$\tau_n = \inf \{ t \in [0, \tau_e) : T \leq 1/n \text{ 或 } I \leq 1/n \text{ 或 } V \leq 1/n \text{ 或 } T \geq n \text{ 或 } I \geq n \text{ 或 } V \geq n \}.$$

对  $V_1(X(t))$  应用 Itô 公式, 并在  $[0, t \wedge \tau_n]$  上积分并取期望:

$$\mathbb{E}[V_1(X(t \wedge \tau_n))] = V_1(X_0) + \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \tau_n} \mathcal{L}V_1(X(s)) ds \leq V_1(X_0) + Kt.$$

若爆破时间  $\tau_e < \infty$  a.s., 则存在  $t > 0$  使得  $\mathbb{P}(\tau_e < t) > 0$ , 此时:

$$\mathbb{E}[V_1(X(t \wedge \tau_n))] \geq \mathbb{E}[V_1(X(\tau_n)) \mathbf{1}_{\{\tau_n \leq t\}}],$$

当  $n \rightarrow \infty$  时,  $X(\tau_n) \rightarrow 0$  或  $X(\tau_n) \rightarrow +\infty$ , 由 Lyapunov 函数的控界性得  $V_1(X(\tau_n)) \rightarrow +\infty$ , 因此右端趋于  $+\infty$ , 但左端  $\mathbb{E}[V_1(X(t \wedge \tau_n))] \leq V_1(X_0) + Kt$  一致有界, 矛盾。故  $\tau_e = \infty$  a.s., 因此, 解全局存在。

故, 该随机 HIV 模型对任意正初值存在唯一的全局正解, 且  $T(t), I(t), V(t) > 0$  对所有  $t \geq 0$  几乎必然成立。

**定理 3.2:** (全局正解与正下界存在性) 若初值  $T_0, I_0, V_0 > 0$ , 则模型存在唯一全局正解  $T(t), I(t), V(t) > 0$  (a.s.), 且存在常数  $T_{\min}, T_{\max}, I_{\min}, I_{\max}, V_{\min}, V_{\max} > 0$ , 使得:  $T_{\min} \leq T(t) \leq T_{\max}$ ,  $0 < I_{\min} \leq I(t) \leq I_{\max}$ ,  $0 < V_{\min} \leq V(t) \leq V_{\max}$  ( $\forall t \geq 0, a.s.$ )

证明:

全局正解存在唯一性已证。对  $I(t)$ , 构造 Lyapunov 函数  $U(t) = \ln I(t)$ , 结合模型(1)中  $dI(t)$  的表达式并应用 Itô 公式:

$$dU = \left( \frac{MTV}{I(a+T)} - \zeta - \frac{1}{2} \sigma^2 \left( \frac{MTV}{I(a+T)} \right)^2 \right) dt + \sigma \frac{MTV}{I(a+T)} dW(t).$$

定义停时  $\tau_n = \inf \{t \geq 0 : I(t) \leq 1/n\}$ , 规定  $\inf \emptyset = \infty$ 。在  $[0, t \wedge \tau_n]$  积分取期望:

$$\mathbb{E}[\ln I(t \wedge \tau_n)] = \ln I_0 + \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \tau_n} \left( \frac{MTV}{I(a+T)} - \zeta - \frac{1}{2} \sigma^2 \left( \frac{MTV}{I(a+T)} \right)^2 \right) ds.$$

若  $I(t) \rightarrow 0^+$ , 则  $\frac{MTV}{I(a+T)} \rightarrow +\infty$ , 右端发散, 与左端  $\ln I(t \wedge \tau_n) \geq \ln(1/n)$  有界矛盾, 故存在  $I_{\min} > 0$  使得  $I(t) \geq I_{\min}$  (a.s.)。同理可证  $T_{\min}, V_{\min} > 0$ , 上界由全局有界性易证得。

### 3.2. 疾病均值持久性

**定理 3.3:** (疾病均值持久性)对于随机 HIV 模型(1)初值  $T_0, I_0, V_0 > 0$ 。若参数满足

$$\alpha\zeta - \delta + \frac{MT_{\min}V_{\min}}{I_{\max}(a+T_{\max})} - \frac{1}{2} \sigma^2 \left( \frac{MT_{\max}V_{\max}}{I_{\min}(a+T_{\min})} \right)^2 > 0, \quad (3)$$

则存在常数  $\eta > 0$ , 使得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[I(t)] \geq \eta, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[V(t)] \geq \eta.$$

即疾病具有均值持久性。

证明:

(1) 全维度停时定义

由**定理 3.2**, 定义停时:

$$\tau_n = \inf \left\{ t \geq 0 : T \leq \frac{1}{n} \text{ 或 } I \leq \frac{1}{n} \text{ 或 } V \leq \frac{1}{n} \text{ 或 } T \geq n \text{ 或 } I \geq n \text{ 或 } V \geq n \right\},$$

规定  $\inf \emptyset = \infty$ , 由全局正解与有界性,  $\tau_n \rightarrow \infty$  (a.s.), 且在  $[0, t \wedge \tau_n]$  内满足:

$$\frac{1}{n} \leq T(t) \leq n, \quad \frac{1}{n} \leq I(t) \leq n, \quad \frac{1}{n} \leq V(t) \leq n \quad (a.s.).$$

(2) 构造对数 Lyapunov 函数

令  $V_2(t) = \ln I(t) + \ln V(t)$ , 满足: 若  $I \rightarrow 0$  或  $V \rightarrow 0$ , 则  $V_2(t) \rightarrow -\infty$ 。

(3) 完整计算 Itô 生成算子

对  $V_2 = \ln I + \ln V$  应用 Itô 公式:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_2 &= \frac{1}{I} \left( \frac{MTV}{a+T} - \zeta I \right) + \frac{1}{V} (\alpha\zeta I - \delta V) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{I^2} \right) \left( \sigma \frac{MTV}{a+T} \right)^2 \\ &= \frac{MTV}{I(a+T)} - \zeta + \frac{\alpha\zeta I}{V} - \delta - \frac{1}{2} \sigma^2 \left( \frac{MTV}{I(a+T)} \right)^2. \end{aligned}$$

(4) 停时约束下估计  $\mathcal{L}V_2$  下界

在  $[0, t \wedge \tau_n]$  内, 严格依赖停时约束  $\frac{1}{n} \leq I, V, T \leq C$  逐项估计, 其中二阶扩散项的上界完全由停时约束  $I \geq I_{\min}$  保证, 得:

$$\begin{aligned} \frac{MTV}{I(a+T)} &\geq \frac{MT_{\min} V_{\min}}{I_{\max}(a+T_{\max})}, \\ \frac{\alpha\zeta I}{V} &\geq \frac{\alpha\zeta I_{\min}}{V_{\max}}, \\ -\frac{1}{2}\sigma^2 \left( \frac{MTV}{I(a+T)} \right)^2 &\geq -\frac{1}{2}\sigma^2 \left( \frac{MT_{\max} V_{\max}}{I_{\min}(a+T_{\min})} \right)^2. \end{aligned}$$

结合参数条件(3), 存在  $\epsilon > 0$ , 使得:

$$\mathcal{L}V_2 \geq \alpha\zeta - \delta + \frac{MT_{\min} V_{\min}}{I_{\max}(a+T_{\max})} - \frac{1}{2}\sigma^2 \left( \frac{MT_{\max} V_{\max}}{I_{\min}(a+T_{\min})} \right)^2 = \epsilon > 0.$$

(5) Jensen 不等式的停时有界性

对 Itô 公式在  $[0, t \wedge \tau_n]$  积分并取期望(鞅项期望为 0):

$$\mathbb{E}[V_2(t \wedge \tau_n)] = V_2(0) + \mathbb{E} \int_0^{t \wedge \tau_n} \mathcal{L}V(s) ds \geq V_2(0) + \epsilon \cdot \mathbb{E}[t \wedge \tau_n].$$

令  $n \rightarrow \infty, \tau_n \rightarrow \infty$ , 得

$$\mathbb{E}[\ln I(t) + \ln V(t)] \geq \ln(I_0 V_0) + \epsilon t. \tag{4}$$

式(4)两边同时除以  $t$  并取  $\liminf_{t \rightarrow \infty}$ :

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E}[\ln I(t) + \ln V(t)] \geq \epsilon > 0.$$

下面使用反证法推导  $\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[I(t)] \geq \eta > 0$ : 假设  $\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[I(t)] = 0$ , 则存在子列  $t_k \rightarrow \infty$ , 使得  $\mathbb{E}[I(t_k)] \rightarrow 0$ . 根据 Jensen 不等式( $\ln x$  为凹函数):  $\mathbb{E}[\ln I(t_k)] \leq \ln \mathbb{E}[I(t_k)] \rightarrow -\infty$ ; 由停时约束的全局上界  $V(t) \leq V_{\max}$ , 得  $\mathbb{E}[\ln V(t_k)] \leq \ln V_{\max}$  (有界), 因此:

$$\frac{1}{t_k} \mathbb{E}[\ln I(t_k) + \ln V(t_k)] \leq \frac{1}{t_k} (\ln \mathbb{E}[I(t_k)] + \ln V_{\max}) \rightarrow -\infty,$$

与  $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E}[\ln I + \ln V] \geq \epsilon > 0$  矛盾. 故  $\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[I(t)] \geq \eta_1 > 0$ . 同理可证

$\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[V(t)] \geq \eta_2 > 0$ . 那么取  $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$ , 即可得结论.

故, 感染细胞和病毒的期望长期保持正下界, 疾病具有均值持久性.

### 3.3. 随机灭绝

**定理 3.4:** (几乎必然灭绝性)在定理 3.2 的前提下, 若模型(1)参数满足如下全局灭绝条件:

$$\frac{MT_{\max} V_{\max}}{I_{\min}(a+T_{\min})} - \zeta - \frac{1}{2}\sigma^2 \left( \frac{MT_{\max} V_{\max}}{I_{\min}(a+T_{\min})} \right)^2 \leq -\lambda < 0$$

其中  $\lambda > 0$  是与时间  $t$  无关的正常数, 则:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0, \quad a.s.$$

证明:

构造对数 Lyapunov 函数  $U(t) = \ln I(t)$ , 由 Itô 公式得:

$$dU(t) = \left( \frac{MT(t)V(t)}{I(t)(a+T(t))} - \zeta - \frac{1}{2} \sigma^2 \left( \frac{MT(t)V(t)}{I(t)(a+T(t))} \right)^2 \right) dt + \sigma \frac{MT(t)V(t)}{I(t)(a+T(t))} dW(t). \quad (5)$$

记生成算子:

$$\mathcal{L}U(t) = \frac{MT(t)V(t)}{I(t)(a+T(t))} - \zeta - \frac{1}{2} \sigma^2 \left( \frac{MT(t)V(t)}{I(t)(a+T(t))} \right)^2. \quad (6)$$

由定理 3.2 的全局正下界  $I_{\min} \leq I(t)$ 、 $T_{\min} \leq T \leq T_{\max}$  及  $V \leq V_{\max}$ , 得

$$\frac{MT(t)V(t)}{I(t)(a+T(t))} \leq \frac{MT_{\max}V_{\max}}{I_{\min}(a+T_{\min})}. \quad (7)$$

将(7)代入生成算子(6), 由全局灭绝条件得:

$$\mathcal{L}U(t) \leq \frac{MT_{\max}V_{\max}}{I_{\min}(a+T_{\min})} - \zeta - \frac{1}{2} \sigma^2 \left( \frac{MT_{\max}V_{\max}}{I_{\min}(a+T_{\min})} \right)^2 \leq -\lambda < 0, \quad \forall t \geq 0, \quad a.s.$$

上式意味着病毒感染率与随机扰动的总和弱于感染细胞死亡率  $\zeta$ , 从而感染细胞无法维持正常水平。

对(5)在  $[0, t]$  上积分, 得

$$\ln I(t) \leq \ln I_0 - \lambda t + M(t), \quad (8)$$

其中  $M(t) = \int_0^t \sigma \frac{MT(s)V(s)}{I(s)(a+T(s))} dW(s)$  是连续局部鞅。由全局有界性, 可得:

$$\int_0^\infty \sigma^2 \left( \frac{MT(s)V(s)}{I(s)(a+T(s))} \right)^2 ds < \infty \quad a.s.,$$

即  $M(t)$  是平方可积的连续局部鞅, 满足强大数定律的应用条件, 故

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = 0, \quad a.s.$$

式(8)两边除以  $t$  并令  $t \rightarrow \infty$ , 得:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln I(t)}{t} \leq -\lambda < 0, \quad a.s.,$$

因此

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0, \quad a.s.$$

对于病毒  $V(t)$ , 其解析解为:

$$V(t) = e^{-\delta t} \left( V_0 + \alpha \zeta \int_0^t e^{\delta s} I(s) ds \right).$$

由于  $I(s)$  是连续正过程且  $I(s) \rightarrow 0$  *a.s.*, 积分  $\int_0^t e^{\delta s} I(s) ds$  单调递增且收敛到有限值; 乘以指数衰减因子  $e^{-\delta t}$  后,  $e^{-\delta t} \int_0^t e^{\delta s} I(s) ds \rightarrow 0$  *a.s.*, 故

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0, \quad a.s.$$

证毕。

## 4. 数值模拟

### 4.1. 迭代格式

为验证前文关于随机 HIV 模型(1)的随机灭绝与均值持久性结论, 本节采用高阶 Milstein 方法进行数值仿真, 该方法数值精度显著优于欧拉 - 马尔可夫法。设时间步长  $\Delta t = 0.01$ ,  $\psi(j)$  为独立标准高斯随机变量  $N(0,1)$ , 模型(1)的 Milstein 离散迭代格式如下:

靶细胞  $T(t)$  的迭代格式:

$$\begin{aligned} T(j+1) &= T(j) + \left[ r - wT(j) + \rho T(j) \left( 1 - \frac{T(j) + I(j)}{T_{\max}} \right) - \frac{MV(j)T(j)}{a + T(j)} \right] \Delta t - \sigma \cdot \frac{MV(j)T(j)}{a + T(j)} \\ &\quad \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \psi(j) + 0.5 \cdot \sigma^2 \cdot \frac{MV(j)T(j)}{a + T(j)} \cdot \frac{MV(j)a}{(a + T(j))^2} \cdot (\psi(j)^2 - 1) \cdot \Delta t \\ &= T(j) + r\Delta t - wT(j)\Delta t + \rho T(j)\Delta t - \rho T(j) \cdot \frac{T(j) + I(j)}{T_{\max}} \Delta t - \frac{MV(j)T(j)\Delta t}{a + T(j)} \\ &\quad - \sigma \cdot \frac{MV(j)T(j)\sqrt{\Delta t} \cdot \psi(j)}{a + T(j)} + 0.5 \cdot \sigma^2 \cdot \frac{M^2V(j)^2 a T(j) \cdot (\psi(j)^2 - 1) \cdot \Delta t}{(a + T(j))^3} \\ &= T(j) \left[ 1 - w\Delta t + \rho\Delta t - \rho \cdot \frac{T(j) + I(j)}{T_{\max}} \Delta t - \frac{MV(j)\Delta t}{a + T(j)} \right] + r\Delta t \\ &\quad - \sigma \cdot \frac{MV(j)T(j)\sqrt{\Delta t} \cdot \psi(j)}{a + T(j)} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot M^2V(j)^2 a T(j) \cdot \frac{(\psi(j)^2 - 1) \cdot \Delta t}{(a + T(j))^3}. \end{aligned}$$

其中高阶修正项的偏导数为  $\frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{MV(j)T(j)}{a + T(j)} \right) = \frac{MV(j)a}{(a + T(j))^2}$ , 用于提升数值收敛精度。

感染细胞  $I(t)$  的迭代格式:

$$\begin{aligned} I(j+1) &= I(j) + \left[ \frac{MV(j)T(j)}{a + T(j)} - \zeta I(j) \right] \Delta t + \sigma \cdot \frac{MV(j)T(j)}{a + T(j)} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \psi(j) \\ &\quad - 0.5 \cdot \sigma^2 \cdot \frac{MV(j)T(j)}{a + T(j)} \cdot \frac{MV(j)a}{(a + T(j))^2} \cdot (\psi(j)^2 - 1) \cdot \Delta t \\ &= I(j) + \frac{MV(j)T(j)\Delta t}{a + T(j)} - \zeta I(j)\Delta t + \sigma \cdot \frac{MV(j)T(j) \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \psi(j)}{a + T(j)} \\ &\quad - 0.5 \cdot \sigma^2 \cdot \frac{M^2V(j)^2 a T(j) \cdot (\psi(j)^2 - 1) \cdot \Delta t}{(a + T(j))^3} \\ &= I(j) [1 - \zeta \Delta t] + \frac{MV(j)T(j)\Delta t}{a + T(j)} + \sigma \cdot \frac{MV(j)T(j) \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \psi(j)}{a + T(j)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot M^2V(j)^2 a T(j) \cdot \frac{(\psi(j)^2 - 1) \cdot \Delta t}{(a + T(j))^3}. \end{aligned}$$

病毒  $V(t)$  的迭代格式由于  $V(t)$  的方程不含随机扩散项, 采用欧拉法直接更新:

$$\begin{aligned} V(j+1) &= V(j) + [\alpha\zeta I(j) - \delta V(j)]\Delta t \\ &= V(j) + \alpha\zeta I(j)\Delta t - \delta V(j)\Delta t \\ &= V(j)[1 - \delta\Delta t] + \alpha\zeta I(j)\Delta t. \end{aligned}$$

基于上述迭代格式, 所有模拟均使用 MATLAB 完成。

#### 4.2. 疾病均值持久性的数值模拟

时间步长取  $\Delta t = 0.01$ , 总模拟时间  $T = 100$  天。基础参数设置为:  $r = 10$ ,  $w = 0.1$ ,  $\rho = 0.2$ ,  $M = 0.8$ ,  $a = 5$ ,  $\zeta = 0.5$ ,  $\alpha = 3$ ,  $\delta = 1.0$ ,  $T_{\max} = 200$  初始值  $T_0 = 15$ ,  $I_0 = 10$ ,  $V_0 = 20$ 。分别选取噪声强度  $\sigma = 0.05$  和  $\sigma = 0.1$  进行对比, 模拟结果如图 1、图 2 所示。

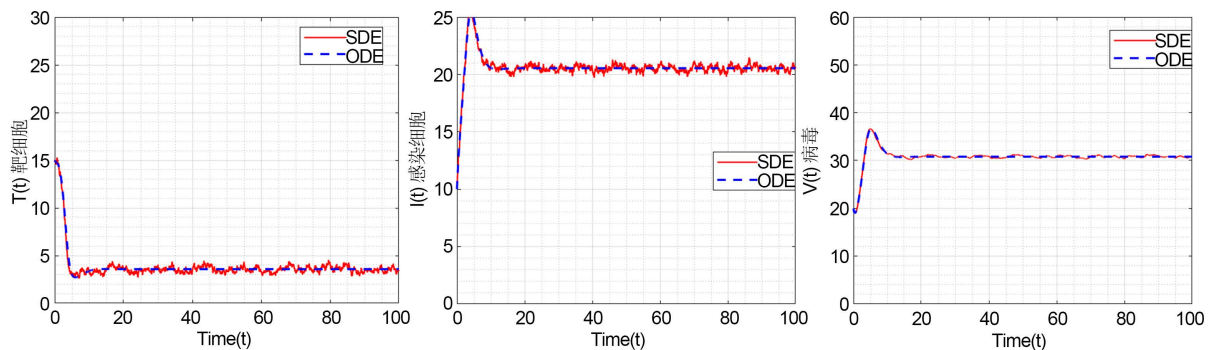


Figure 1. Time series plots of  $T(t)$ ,  $I(t)$  and  $V(t)$  at noise intensity  $\sigma = 0.05$

图 1. 噪声强度为  $\sigma = 0.05$  (小噪声)时  $T(t)$ ,  $I(t)$ ,  $V(t)$  的时间序列图

模拟结果显示: 靶细胞  $T(t)$  初始快速下降后稳定于约 4 的水平, 始终保持正值; 感染细胞  $I(t)$  在  $t > 20$  后稳定于 20 左右, 未出现向 0 衰减的趋势; 病毒  $V(t)$  在  $t > 20$  后稳定于 30 左右, 长期维持正浓度。上述结果与本文定理中:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[I(t)] \geq \eta_1 > 0, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[V(t)] \geq \eta_2 > 0$$

的均值持久性结论高度一致, 表明在当前参数下感染细胞与病毒不会灭绝, 系统长期保持感染状态。

对比图 1 与图 2 的模拟结果: 当  $\sigma = 0.05$  时, 随机 SDE 曲线与确定性 ODE 曲线几乎重合, 仅存在微小波动; 当  $\sigma = 0.1$  时, SDE 曲线波动幅度略有增大, 但仍围绕 ODE 曲线稳定波动, 未破坏系统的正稳态。这一现象与本文生成算子下界估计的结论相呼应: 即在满足参数条件:

$$\alpha\zeta - \delta + \frac{MT_{\min}V_{\min}}{I_{\max}(a+T_{\max})} - \frac{1}{2}\sigma^2 \left( \frac{MT_{\max}V_{\max}}{I_{\min}(a+T_{\min})} \right)^2 > 0$$

的前提下, 噪声仅带来有限幅度的随机扰动, 不会抵消感染过程的正漂移, 因此疾病均值持久性依然成立。

同时可观察到, 随机 SDE 模型的解始终围绕确定性 ODE 模型的稳态值小幅波动, 两者长期行为一致。这说明随机扰动并未改变系统的核心动力学趋势: 感染细胞与病毒长期维持正常水平, 符合 HIV 感染“慢性持续”的生物学特征, 也验证了本文随机模型在保留生物合理性的同时, 刻画了环境噪声对感染过程的影响。

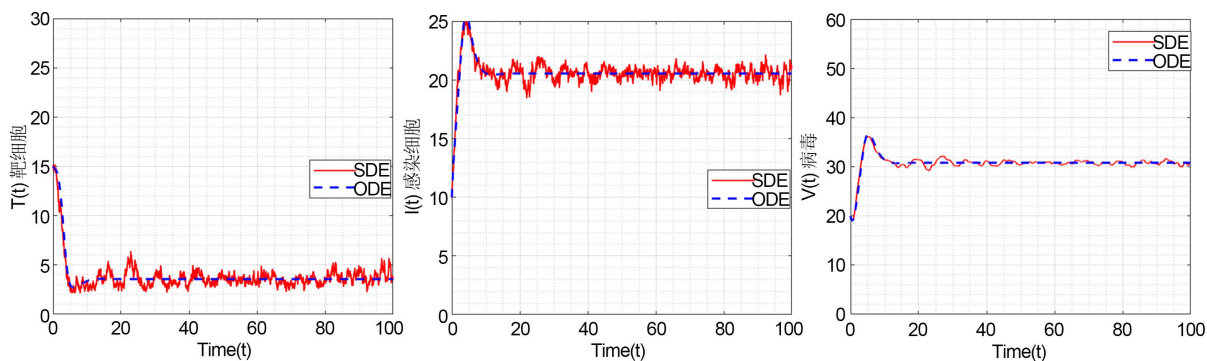


Figure 2. Time series plots of  $T(t), I(t)$  and  $V(t)$  at noise intensity  $\sigma = 0.1$

图 2. 噪声强度为  $\sigma = 0.1$  (较大噪声)时  $T(t), I(t), V(t)$  的时间序列图

### 4.3. 随机灭绝的数值模拟

为验证本文所证明的随机灭绝定理，所有参数均严格满足本文推导的随机灭绝条件：

$$\frac{MT_{\max}V_{\max}}{I_{\min}(a+T_{\min})} - \zeta - \frac{1}{2}\sigma^2 \left( \frac{MT_{\max}V_{\max}}{I_{\min}(a+T_{\min})} \right)^2 < 0.$$

具体参数取值如下： $r = 10$ ， $w = 0.1$ ， $\rho = 0.2$ ， $T_{\max} = 200$ ， $M = 0.25$ ， $a = 5$ ， $\zeta = 0.5$ ， $\alpha = 3$ ， $\delta = 1.0$ 。为体现噪声强度对灭绝行为的影响，分别取弱噪声强度  $\sigma = 0.9$  与强噪声强度  $\sigma = 3$  进行对比模拟。初始值设为  $(T_0, I_0, V_0) = (200, 10, 15)$ ，时间步长  $\Delta t = 0.01$ ，总模拟时间  $t = 100$  天。

数值模拟结果如图 3 和图 4 所示。在确定性系统中，感染细胞浓度  $I(t)$  与病毒浓度  $V(t)$  均快速衰减至 0。在随机系统中，弱噪声下  $I(t)$  与  $V(t)$  平稳震荡并趋于 0；强噪声下轨迹波动更加剧烈，但依然保持明显的灭绝趋势，最终均衰减至 0。健康细胞  $T(t)$  在随机扰动下围绕其稳态波动，始终保持正有界，符合系统全局正解的理论性质。

数值模拟结果与本文的随机灭绝理论完全一致。首先，所选参数满足灭绝条件，模拟中  $I(t)$  与  $V(t)$  几乎必然趋于 0，直接验证了理论结论的正确性。其次，无论噪声强度强弱，灭绝趋势均不改变，表明随机灭绝结论具有强鲁棒性。最后，随机扰动仅加剧系统波动，不会逆转灭绝方向，进一步说明本文所建立的灭绝条件能够准确刻画随机系统的长期动力学行为，具有重要的理论意义与生物学价值。

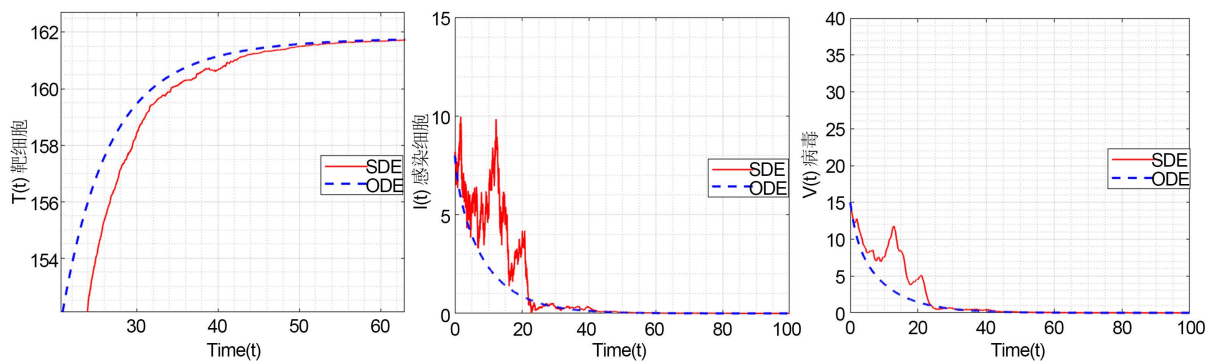


Figure 3. Time series plots of  $T(t), I(t)$  and  $V(t)$  at noise intensity  $\sigma = 0.9$

图 3. 噪声强度为  $\sigma = 0.9$  (小噪声)时  $T(t), I(t), V(t)$  的时间序列图

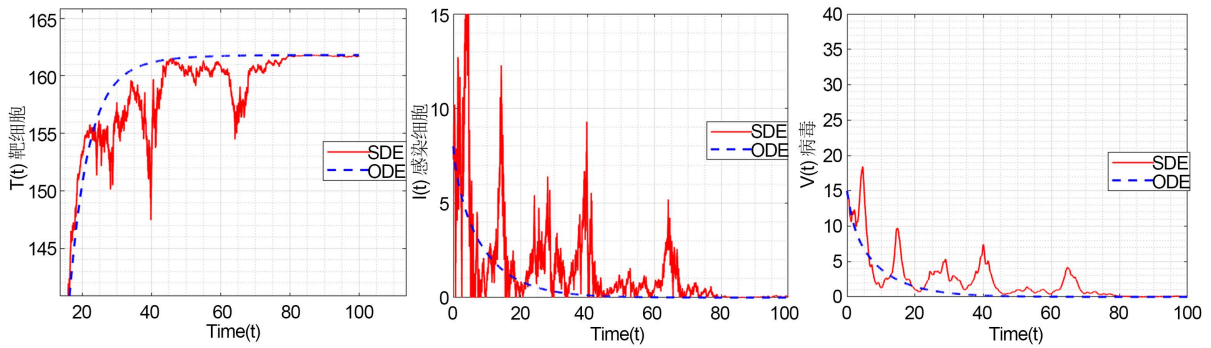


Figure 4. Time series plots of  $T(t), I(t)$  and  $V(t)$  at noise intensity  $\sigma = 3$

图 4. 噪声强度为  $\sigma = 3$  (大噪声)时  $T(t), I(t), V(t)$  的时间序列图

#### 4.4. 参数敏感性分析

为探究环境随机扰动对 HIV 感染动力学的影响,我们对噪声强度  $\sigma$  进行了敏感性分析。具体参数取值如下:  $r = 0.5$ ,  $w = 0.1$ ,  $\rho = 0.6$ ,  $T_{\max} = 200$ ,  $M = 0.25$ ,  $a = 0.1$ ,  $\zeta = 0.4$ ,  $\alpha = 10$ ,  $\delta = 2.0$ 。图 5 显示了不同  $\sigma$  下感染细胞最终密度  $I(t)$  的变化。结果表明,当  $\sigma < \sigma_c \approx 0.80$  时,感染细胞长期维持正水平(持久区);当  $\sigma > \sigma_c$  时,感染细胞几乎消失,病毒载量随之衰减至零(灭绝区)。该分析表明,噪声强度是调控 HIV 感染长期动态的重要因素:较低扰动下疾病可持续存在,而较高扰动可能导致感染细胞和病毒的灭绝,为随机环境下 HIV 动力学提供定量参考。

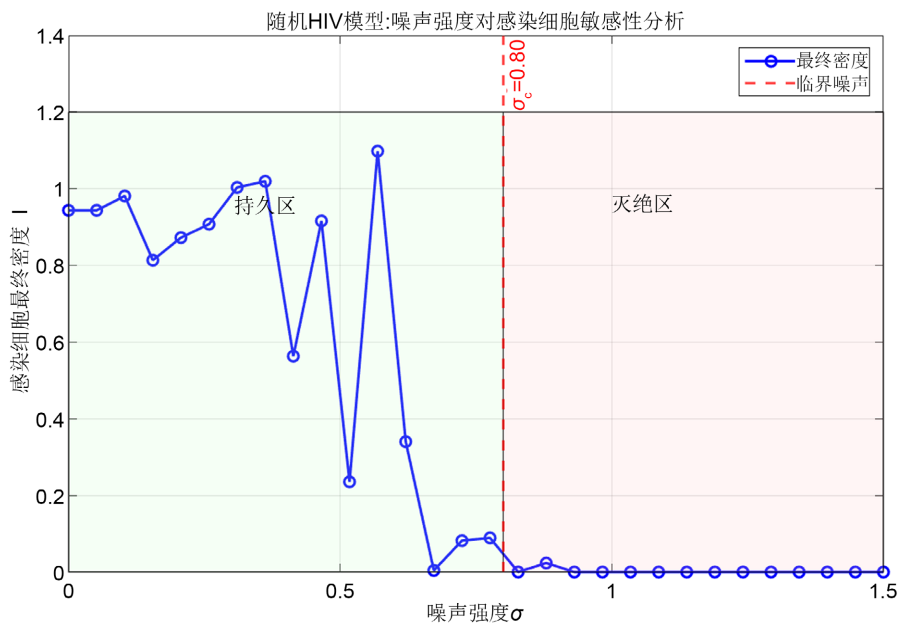


Figure 5. Sensitivity analysis of infection cell density to noise intensity

图 5. 噪声强度对感染细胞密度的敏感性分析图

### 5. 结论

本文针对 HIV 感染的随机动力学问题进行研究,在经典确定性模型的基础上构建了同时包含饱和和常数和随机扰动的随机微分方程模型(1),使模型在数学结构和生物学机制上更加贴近真实感染过程。针对

该模型(1), 本文首先运用停时技巧、Lyapunov 函数和 Itô 公式, 严格证明了模型解的全局正性与存在唯一性, 并进一步分析了状态变量的有界性, 确保了模型的数学合理性。然后通过构造对数 Lyapunov 函数, 系统推导了感染细胞和病毒的均值持久性以及随机灭绝的充分条件, 明确揭示了随机噪声在疾病演化过程中的关键作用及其阈值效应。数值模拟不仅验证了理论分析结果的正确性, 还基于噪声强度的参数敏感性分析清晰地划分了系统的持久区与灭绝区, 直观呈现了不同噪声强度下感染细胞稳态行为的动态变化规律。本研究完善了 HIV 随机感染模型的理论分析框架, 提出的建模方法与分析工具可为其他传染病的随机动力学研究提供参考, 并为在随机环境下制定 HIV 防控策略提供理论支撑。

## 参考文献

- [1] Perelson, A.S., Neumann, A.U., Markowitz, M., Leonard, J.M. and Ho, D.D. (1996) HIV-1 Dynamics *in Vivo*: Virion Clearance Rate, Infected Cell Life-Span, and Viral Generation Time. *Science*, **271**, 1582-1586. <https://doi.org/10.1126/science.271.5255.1582>
- [2] Nowak, M.A. and May, R.M. (2000) *Virus Dynamics: Mathematical Principles of Immunology and Virology*. Oxford University Press. <https://academic.oup.com/book/54401>
- [3] Wodarz, D. and Nowak, M.A. (1999) Dynamics of Immune Escape in HIV Infection. *Wiener Klinische Wochenschrift*, **111**, 419-427. <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/10420492>
- [4] Regoes, R.R., Wodarz, D. and Nowak, M.A. (1998) Virus Dynamics: The Effect of Target Cell Limitation and Immune Responses on Virus Evolution. *Journal of Theoretical Biology*, **191**, 451-462. <https://doi.org/10.1006/jtbi.1997.0617>
- [5] Liu, J., Wang, Y., Liu, L. and Zhao, T. (2018) A Stochastic HIV Infection Model with Latent Infection and Antiretroviral Therapy. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2018**, Article ID: 5175383. <https://doi.org/10.1155/2018/5175383>
- [6] Wang, Y., Qi, K. and Jiang, D. (2021) An HIV Latent Infection Model with Cell-to-Cell Transmission and Stochastic Perturbation. *Chaos, Solitons & Fractals*, **151**, 111215. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.111215>
- [7] Boukhouima, A., Lotfi, E.M., Mahrouf, M., Rosa, S., Torres, D.F.M. and Yousfi, N. (2021) Stability Analysis and Optimal Control of a Fractional HIV-AIDS Epidemic Model with Memory and General Incidence Rate. *The European Physical Journal Plus*, **136**, Article No. 103. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-020-01013-3>
- [8] Dong, Y., Zhang, S., Zhang, H., Zhou, X. and Jiang, J. (2025) Chaotic Evolution Optimization: A Novel Metaheuristic Algorithm Inspired by Chaotic Dynamics. *Chaos, Solitons & Fractals*, **192**, 116049. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2025.116049>
- [9] Liu, Q. and Jiang, D. (2018) A Stochastic HIV Infection Model with Latent Infection and Antiretroviral Therapy. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2018**, 5175383. <https://doi.org/10.1155/2018/5175383>
- [10] Khan, M.H.-O.-R., Ahmed, M. and Azad, A.K. (2026) Optimal Control and Dynamical Behavior in Stochastic Epidemic Models of Cholera. *Results in Control and Optimization*, **23**, 100736. <https://doi.org/10.1016/j.rico.2026.100736>
- [11] Xu, C. (2017) Global Threshold Dynamics of a Stochastic Differential Equation SIS Model. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **447**, 736-757. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.10.041>
- [12] 赵晓琦, 董玲珍. 基于 MSM 群体的随机 HIV/AIDS 传染病模型分析[J]. 工程数学学报, 2024, 41(4): 710-727.
- [13] 赵晓琦, 董玲珍. 具有染病者筛查和性别结构的随机 AIDS 传染病模型分析[J]. 应用数学进展, 2021, 10(4): 1153-1167.
- [14] Sun, Q.L. and Min, L.Q. (2014) Dynamics Analysis and Simulation of a Modified HIV Infection Model with a Saturated Infection Rate. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, **2014**, Article ID: 145162. <https://doi.org/10.1155/2014/145162>
- [15] Liu, H., Yang, Q.S. and Jiang, D.Q. (2012) The Asymptotic Behavior of Stochastically Perturbed DI SIR Epidemic Models with Saturated Incidences. *Automatica*, **48**, 820-825. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2012.02.010>
- [16] Attaullah, Zeb, K., Khan, I., Ahmad, R. and Eldin, S.M. (2023) Transmission Dynamics of a Novel HIV/AIDS Model through a Higher-Order Galerkin Time Discretization Scheme. *Scientific Reports*, **13**, Article No. 21345. <https://doi.org/10.1038/s41598-023-34696-6>