

不确定离散时间切换线性系统的 输出跟踪无扰控制

郭开达, 武力兵, 齐淑彦*

辽宁科技大学理学院, 辽宁 鞍山

收稿日期: 2026年4月19日; 录用日期: 2026年5月13日; 发布日期: 2026年5月20日

摘要

本文针对一类具有不确定结构的离散时间切换线性系统, 研究了其输出跟踪过程中的无扰控制问题。该研究旨在确保系统在模型不精确的情况下, 消除或抑制由系统切换引起的控制输入突变现象, 同时确保闭环系统的输出跟踪稳定性与良好的无扰性能。该目标通过协同设计状态依赖的切换逻辑与子控制器得以实现。首先, 提出了一种无扰切换控制性能的描述框架, 以兼顾系统的稳态跟踪精度与暂态平滑性。其次, 基于多李雅普诺夫函数方法, 给出了保证闭环系统实现输出跟踪稳定及无扰切换行为的充分条件。最后, 数值仿真结果验证了所提出控制策略的有效性, 表明该方法能在确保跟踪性能的同时显著降低控制突变的影响。

关键词

切换线性系统, 不确定性, 输出跟踪, 无扰控制

Bumpless Transfer Control for Output Tracking of Uncertain Discrete-Time Switched Linear Systems

Kaida Guo, Libing Wu, Shuyan Qi*

School of Science, University of Science and Technology Liaoning, Anshan Liaoning

Received: April 19, 2026; accepted: May 13, 2026; published: May 20, 2026

Abstract

This paper investigates the bumpless transfer control problem for a class of discrete-time switched

*通讯作者。

文章引用: 郭开达, 武力兵, 齐淑彦. 不确定离散时间切换线性系统的输出跟踪无扰控制[J]. 应用数学进展, 2026, 15(5): 310-321. DOI: 10.12677/aam.2026.155231

linear systems with uncertain structures in the context of output tracking. The study aims to eliminate or suppress control input bumps caused by system switching in the presence of model inaccuracies, while simultaneously ensuring the output tracking stability of the closed-loop system and favorable bumpless switching performance. This objective is achieved through the coordinated design of state-dependent switching logic and sub-controllers. Firstly, a framework describing bumpless transfer control performance is proposed to balance steady-state tracking accuracy with transient smoothness. Secondly, based on the multiple Lyapunov functions method, sufficient conditions are established to guarantee both output tracking stability and bumpless transfer behavior of the closed-loop system. Finally, numerical simulation results verify the effectiveness of the proposed control strategy, demonstrating that the method significantly reduces the impact of control bumps while ensuring tracking performance.

Keywords

Switched Linear Systems, Uncertainty, Output Tracking, Bumpless Transfer Control

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

切换系统作为一种典型的混合动态系统[1], 通常由一系列连续或离散的子系统以及协调这些子系统动态演化的切换规则组成。它能够有效地描述那些具有多模态运行、结构重组或者状态突变等复杂特性的工程系统。在离散时间框架下, 这类系统通过在不同子系统之间进行动态切换, 为网络化控制[2]、数字信号处理[3]和航空航天[4]等领域的建模与控制提供了强有力的理论工具。然而, 切换系统的稳定性分析存在一些独特的挑战: 即使每个子系统本身是稳定的, 不恰当的切换路径仍然可能引发全局失稳; 相反, 通过精心设计切换规律, 某些原本不稳定的子系统也可以实现稳定。例如, 文献[5]构建了一种特定的切换机制, 该机制具备在所有子系统均不稳定的前提下, 仍能保证整体系统达成全局指数稳定性的能力。在切换系统的研究中, 主流的切换机制通常被划分为三大类: 基于时间约束的策略[6]、基于状态反馈的策略[7], 以及融合了上述两者特性的混合型模式[8] [9]。在实际工程应用中, 由于建模误差、外部环境扰动或系统参数的时变特性, 精确的数学模型往往难以获取。因此, 考虑系统矩阵中存在的参数不确定性, 对于提升控制器在复杂工况下的鲁棒性与实用性具有重要意义。

在系统运行期间, 切换过程引发的控制输入突变问题也不可忽视[10]。当系统在不同的子控制器间切换时, 由于各控制器输出的状态存在差异, 控制信号往往会出现剧烈跳变, 即所谓的控制颠簸现象。这不仅会对执行机构造成机械磨损, 还可能激发未建模的动态效应, 甚至破坏系统的暂态性能。为了解决这一问题, 无扰切换控制技术应运而生[11], 其核心目标是通过引入补偿机制或在切换瞬间施加约束, 以有效抑制控制信号的不连续跳变, 从而保证系统运行的平稳性和安全性。例如, 文献[12]通过引入离线控制器状态维数的重构机制, 有效解决了多控制器协同切换的问题。为了限制信号的变化幅度, 文献[13]从相对和绝对两个维度出发, 对控制抖动进行了量化分析。此外, 学界亦探索了其他可行的技术路径, 其中包括积分型无扰切换逻辑[14]以及文献[15]-[17]所提出的相应策略。

输出跟踪控制是切换系统研究中的另一个重要方向[18], 其目标是设计合适的控制器, 使系统的输出能够精确跟踪预设的参考轨迹, 即使在子系统切换和外部扰动的共同影响下, 依然能维持高性能。针对不确定非线性切换系统的跟踪控制问题, 文献[19]提出引入模糊自适应机制以增强系统的鲁棒性与适应

能力。在离散时间切换线性系统中，输出跟踪问题不仅要求系统内部保持稳定，还需要考虑外部参考信号的动态变化以及模型不确定性带来的影响。尽管现有的研究已经分别探讨了切换系统的跟踪性能与无扰切换控制问题，但如何将这两者结合进行综合分析，仍然面临诸多困难。特别是在计算资源和通信带宽有限的情况下，如何同时设计切换律、子控制器和无扰机制，以实现稳健的输出跟踪并保证切换过程的平滑性，仍是一个值得深入研究的关键课题。

基于上述讨论，本文提出了一种新的无扰切换控制框架，旨在确保输出跟踪精度的同时，有效抑制控制输入的突变和颠簸。具体而言，本研究的主要贡献可总结为以下三个方面：

(1) 本文提出了一种创新的方法来定义带有参数不确定项的离散时间切换线性系统的无扰控制性能。通过对切换时刻的控制信号施加适当约束，确保了在保证输出跟踪精度的同时，能够有效抑制由切换引起的控制信号突变，提升了系统的平稳性。

(2) 与文献[20]中的控制方法不同，本文在设计过程中同时考虑了输出跟踪性能和无扰控制特性。通过协同设计状态相关切换规则与控制器组，成功确保了在系统参数不确定的情况下实现高精度输出跟踪的同时，兼顾无扰控制性能，克服了传统方法在复杂动态环境下的性能不足。

(3) 通过构建多个李雅普诺夫函数，本文提出的控制策略为所研究系统提供了充分的稳定性条件，确保输出跟踪和无扰控制性能的实现。进一步地，本文通过引入中间变量，推导出一系列线性矩阵不等式，使得该问题具备了求解的可操作性。

2. 问题描述与预备知识

2.1. 系统描述

考虑如下具有不确定结构的离散时间切换线性系统：

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \left[A_{\sigma(k)} + \Delta A_{\sigma(k)} \right] x(k) + B_{\sigma(k)} u(k) + E_{\sigma(k)} d(k) \\ y(k) &= C_{\sigma(k)} x(k) \end{aligned} \quad (1)$$

式中， $x(k) \in R^x$ 为系统状态， $u(k) \in R^u$ 表示控制输入信号， $y(k) \in R^y$ 代表系统输出信号， $d(k) \in R^d$ 为外部干扰信号， $A_i, B_i, C_i, E_i, i \in \mathcal{N}$ 为已知矩阵，维度与系统状态、输入及输出相匹配。 $\Delta A_{\sigma(k)}$ 表示不确定时变实值矩阵。系统的切换信号定义为 $\sigma(k): k \geq 0 \rightarrow \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$ ，可以用下面的序列表示：

$$\left\{ x_0; (i_0, k_0), (i_1, k_1), \dots, (i_q, k_q), \dots \mid i_q \in \mathcal{N}, q \in \mathcal{N} \right\} \quad (2)$$

其中， x_0 为系统的初始状态， k_0 是系统的初始切换时刻， k_q 是系统的第 q 个切换时刻， \mathcal{N} 表示子系统数量的集合，并且我们规定：当 $\sigma(k) = i_q$ 时，第 i_q 个子系统处于被激活状态。

我们假设系统(1)满足以下假设：不确定时变实值矩阵

$$\Delta A_{\sigma(k)} = D_{\sigma(k)} F_{\sigma(k)}(k) V_{\sigma(k)} \quad (3)$$

式中， $D_i, V_i, i \in \mathcal{N}$ 代表已知的具有适当维数的常数矩阵， $F_i(k)$ 表示未知的矩阵函数，且满足 $F_i^T(k) F_i(k) \leq I$ 。

假设参考信号 $y_r(k)$ 由下列参考模型生成：

$$\begin{aligned} x_r(k) &= A_r x_r(k) + E_r r(k) \\ y_r(k) &= C_r x_r(k) \end{aligned} \quad (4)$$

其中， $x_r(k) \in R^x$ 为参考模型的状态向量， $r(k)$ 表示参考输入信号， $A_r(k), C_r(k), E_r(k)$ 为已知矩阵，

维度与系统状态及输入相匹配。

设计的控制器形式如下：

$$u(k) = L_{1\sigma(k)}x(k) + L_{2\sigma(k)}x_r(k) \quad (5)$$

式中， K_{1i} ， K_{2i} 及 $i \in N$ 分别表示待设计的控制器增益矩阵。

定义 $\xi(k) = [x^T(k) \quad x_r^T(k)]^T$ ， $\omega(k) = [d^T(k) \quad r^T(k)]$ ，跟踪误差为 $e(k) = y(k) - y_r(k)$ ，将控制器(5)带入由系统(1)和系统(2)组成的增广系统，可以得到如下闭环切换系统

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= \bar{A}_{\sigma(k)}\xi(k) + \bar{E}_{\sigma(k)}\omega(k) \\ e(k) &= \bar{C}_{\sigma(k)}\xi(k) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{其中，} \bar{A}_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} A_{\sigma(k)} + \Delta A_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)}L_{1\sigma(k)} & B_{\sigma(k)}L_{2\sigma(k)} \\ 0 & A_r \end{bmatrix}, \bar{E}_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} E_{\sigma(k)} & 0 \\ 0 & E_r \end{bmatrix}, \bar{C}_{\sigma(k)} = [C_{\sigma(k)} \quad -C_r].$$

下面，我们给出无扰切换控制性能描述以及 H_∞ 输出跟踪无扰切换控制的定义。

定义 1：在给定的切换信号 $\sigma(k)$ 下，若存在标量 γ_1 ， γ_2 ，使得下面的不等式

$$\|u(k_q^+) - u(k_q^-)\|^2 \leq \gamma_1 \|x(k)\|^2 + \gamma_2 \|x_r(k)\|^2 \quad (7)$$

成立，那么就可以说系统(6)具有无扰切换控制性能。

注 1：不等式(7)表明，控制输入在相邻时刻的变化量受系统当前状态 $x(k)$ ，参考模型状态 $x_r(k)$ 共同约束。这一特性意味着控制信号的跃变幅度随系统状态的收敛而逐渐减小，从而为实现切换过程的平滑过渡提供了理论保证。

定义 2：对于给定的非负常值 $\tau = 0$ ，如果存在控制器(5)和切换信号 $\sigma(k)$ 使得系统(6)既满足无扰切换性能(7)，又满足 H_∞ 输出跟踪性质：

(1) 若 $\omega(k) \equiv 0$ ，则系统(6)是全局渐近稳定的。

(2) 若对于任意的 $\omega(k) \neq 0$ ，在零初始条件下，对于给定的非负常值 τ ，系统(6)满足以下的 L_2 增益性质：

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^T(k)e(k) < \tau^2 \sum_{k=0}^{\infty} \omega^T(k)\omega(k) \quad (8)$$

那么，称系统(6)的 H_∞ 输出跟踪无扰切换控制问题可解。

2.2. 基本引理

引理 1 [21] 对于一个给定的对称分块矩阵 $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$ ，以下三个条件是等价的。

- (1) $S < 0$ ；
- (2) $S_{11} < 0, S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$ ；
- (3) $S_{22} < 0, S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$ 。

引理 2 [22] 对于任意矩阵 M 和正定矩阵 R ，下面的不等式是成立的。

$$-M^T R^{-1} M \leq R - M - M^T \quad (9)$$

3. 主要结果

定理 1：考虑系统(6)，对于给定的标量 α ， γ_1 和 γ_2 ，如果存在矩阵 L_{1i} ， L_{1j} ， L_{2i} ， L_{2j} 和对称矩阵 P_i 使得以下矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i^T P_i \bar{A}_i + \bar{C}_i^T \bar{C}_i - P_i + \Phi_i & * \\ \bar{E}_i^T P_i \bar{A}_i & \bar{E}_i^T P_i \bar{E}_i - \tau^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

$$\Xi_{ji} + \Psi_j < 0 \quad (11)$$

其中, $\Xi_{ji} = \begin{bmatrix} \Delta L_{1ji}^T \Delta L_{1ji} - \gamma_1 I & * \\ \Delta L_{2ji}^T \Delta L_{1ji} & \Delta L_{2ji}^T \Delta L_{2ji} - \gamma_2 I \end{bmatrix}$, $\Delta L_{1ji} = L_{1j} - L_{1i}$, $\Delta L_{2ji} = L_{2j} - L_{2i}$ 。

那么, 在切换规则

$$\sigma(k) = \arg \min_{i \in \mathcal{N}} \{ \xi^T(k) P_i \xi(k) \} \quad (12)$$

和状态反馈控制器组(5)下, 闭环系统(6)的 H_∞ 输出跟踪无扰切换控制问题具有可行解。

证明: 首先, 我们将验证闭环系统(6)的 H_∞ 输出跟踪性能。假设当前激活的子系统为 $\sigma(k) = i$ 。选取如下形式的 Lyapunov 函数:

$$W(k) = W^i(k) = \xi^T(k) P_i \xi(k) \quad (13)$$

对于动态闭环系统(6), 我们可以得到

$$\begin{aligned} \Delta W(k) + e^T(k) e(k) - \tau^2 \omega^T(k) \omega(k) \\ = \xi^T(k+1) P_i \xi(k+1) - \xi^T(k) P_i \xi(k) + e^T(k) e(k) - \tau^2 \omega^T(k) \omega(k) \end{aligned} \quad (14)$$

利用切换信号(12)的设计以及 $\theta_{ij} \geq 0$ 的非负性, 我们有

$$\xi^T(k) \sum_{j=i, j \neq i}^n \theta_{ij} (P_j - P_i) \xi(k) = \xi^T(k) \Phi_i \xi(k) \geq 0 \quad (15)$$

并且, 该切换策略确保了在切换时刻有

$$W_{k_q}^{\sigma(k_q)} \leq W_{k_q}^{\sigma(k_q)-1} \quad (16)$$

那么,

$$\begin{aligned} \Delta W(k) + e^T(k) e(k) - \tau^2 \omega^T(k) \omega(k) \\ \leq [\bar{A}_i \xi(k) + \bar{E}_i \omega(k)]^T P_i [\bar{A}_i \xi(k) + \bar{E}_i \omega(k)] - \xi^T(k) P_i \xi(k) + e^T(k) e(k) \\ - \tau^2 \omega^T(k) \omega(k) + \xi^T(k) \Phi_i \xi(k) \\ = \xi^T(k) [\bar{A}_i^T P_i \bar{A}_i + \bar{C}_i^T \bar{C}_i - P_i + \Phi_i] \xi(k) + 2 \xi^T(k) \bar{A}_i^T P_i \bar{E}_i e(k) \\ + \omega^T(k) [\bar{E}_i^T P_i \bar{E}_i - \tau^2 I] \omega(k) \\ = \begin{bmatrix} \xi^T(k) & e^T(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_i^T P_i \bar{A}_i + \bar{C}_i^T \bar{C}_i - P_i + \Phi_i & * \\ \bar{E}_i^T P_i \bar{A}_i & \bar{E}_i^T P_i \bar{E}_i - \tau^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(k) \\ e(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

由不等式(10)可得

$$\Delta W(k) + e^T(k) e(k) - \tau^2 \omega^T(k) \omega(k) < 0 \quad (18)$$

结合(16)式, 可得

$$\begin{aligned} W(k+1) - W(k) + e^T(k) e(k) - \tau^2 \omega^T(k) \omega(k) \\ \leq \Delta W^{\sigma(k)}(k) + e^T(k) e(k) - \tau^2 \omega^T(k) \omega(k) \\ < 0 \end{aligned} \quad (19)$$

在 $\omega(k) \equiv 0$ 的条件下, 由(19)式可以直接推导出

$$W(k+1) - W(k) < 0 \quad (20)$$

因此, 当 $\omega(k) \equiv 0$, 依据 Lyapunov 稳定性理论, 闭环系统(6)在此情况下是全局渐近稳定的。

接下来, 我们证明在零初始条件下, 对于 $\omega(k) \neq 0$ 情况。

不失一般性, 从不等式(19)式中我们能推出

$$\sum_{k=0}^{\infty} [W(k+1) - W(k) + e^T(k)e(k) - \tau^2 \omega^T(k)\omega(k)] < 0 \quad (21)$$

进一步, 可以得出 $\sum_{k=0}^{\infty} \|e(k)\|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\omega(k)\|^2$ 成立。

因此, 根据定义 2 可知, 闭环系统(6)满足 H_{∞} 输出跟踪性质。下面, 我们来证明系统(6)具有无扰切换控制性能。

不妨假设在 $k = k_q$ 时刻切换发生。那么, 能够得到

$$\begin{aligned} & \|u(k_q^+) - u(k_q^-)\|^2 - \gamma_1 \|x(k)\|^2 - \gamma_2 \|x_r(k)\|^2 \\ &= \|L_{1j}x(k) + L_{2j}x_r(k) - L_{1i}x(k) - L_{2i}x_r(k)\|^2 - \gamma_1 \|x(k)\|^2 - \gamma_2 \|x_r(k)\|^2 \\ &= \|\Delta L_{1ji}x(k) + \Delta L_{2ji}x_r(k)\|^2 - \gamma_1 \|x(k)\|^2 - \gamma_2 \|x_r(k)\|^2 \\ &= x^T(k) [\Delta L_{1ji}^T \Delta L_{1ji} - \gamma_1 I] x(k) + x_r^T(k) [\Delta L_{2ji}^T \Delta L_{2ji} - \gamma_2 I] x_r(k) + 2x(k) \Delta L_{1ji}^T \Delta L_{2ji} x_r(k) \\ &= \xi^T(k) \Xi_{ji} \xi(k) \end{aligned} \quad (22)$$

当第 j 个子系统被激活后, 由切换规则式(12)中可以得到

$$\xi^T(k) \sum_{i=1, i \neq j}^n \mathcal{G}_{ji} (P_i - P_j) \xi(k) = \xi^T(k) \Psi_j \xi(k) \geq 0 \quad (23)$$

再进一步, 能够推导出

$$\begin{aligned} & \|u(k_q^+) - u(k_q^-)\|^2 - \gamma_1 \|x(k)\|^2 - \gamma_2 \|x_r(k)\|^2 \\ & \leq \xi^T(k) \Xi_{ji} \xi(k) + \xi^T(k) \Psi_j \xi(k) \\ & = \xi^T(k) (\Xi_{ji} + \Psi_j) \xi(k) \end{aligned} \quad (24)$$

从不等式(11)中可以得出

$$\|u(k_q^+) - u(k_q^-)\|^2 - \gamma_1 \|x(k)\|^2 - \gamma_2 \|x_r(k)\|^2 \leq 0 \quad (25)$$

即 $\|u(k_q^+) - u(k_q^-)\|^2 \leq \gamma_1 \|x(k)\|^2 + \gamma_2 \|x_r(k)\|^2$ 成立。

依据定义 1, 系统(6)的无扰切换控制问题得以实现。

通过上述研究, 闭环系统(6)的 H_{∞} 输出跟踪无扰切换控制问题得以圆满解决, 实现了预期的控制目标。

注 2: 定理 1 建立了满足系统输出跟踪性能与无扰切换控制特性的矩阵不等式条件, 但其中包含的耦合项使得直接求解较为困难。为此, 后续定理将通过引入新的矩阵变量, 转化为一组更便于计算的矩阵不等式。

定理 2: 考虑系统(6), 对于给定的标量 τ , γ_1 , γ_2 , θ_{ij} 和 \mathcal{G}_{ij} , 如果存在对称矩阵 \bar{R} , Y_{i11} , Y_{i22} ,

R_1, R_2 和矩阵 $Y_{i21}, H_{1i}, H_{1j}, H_{2i}, H_{2j}$ 使得以下矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} \Theta_{i11} & * & * & * & * & * & * & * \\ \Theta_{i21} & \Theta_{i22} & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -\tau^2 I & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & -\tau^2 I & * & * & * & * \\ C_i R_1 & -C_r R_2 & 0 & 0 & -I & * & * & * \\ A_i R_1 + G_i + B_i H_{1i} & B_i H_{2i} & E_i & 0 & 0 & -Y_{i11} & * & * \\ 0 & A_r R_2 & 0 & E_r & 0 & -Y_{i21} & -Y_{i22} & * \\ \Theta_{i81} & \Theta_{i82} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Theta_{i88} \end{bmatrix} < 0 \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{j11} & * & * & * \\ \Gamma_{j21} & \Gamma_{j22} & * & * \\ H_{1j} - H_{1i} & H_{2j} - H_{2i} & -I & * \\ \Gamma_{j41} & \Gamma_{j42} & 0 & -\Gamma_{j44} \end{bmatrix} < 0 \quad (26)$$

式中,

$$\begin{aligned} \Theta_{i11} &= Y_{i11} - 2R_1 + \sum_{j=1, j \neq i}^n \theta_{ij} (Y_{i11} - 2R_1), \quad \Theta_{i21} = Y_{i21} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \theta_{ij} Y_{i21}, \\ \Theta_{i22} &= Y_{i22} - 2R_2 + \sum_{j=1, j \neq i}^n \theta_{ij} (Y_{i22} - 2R_2), \quad \Gamma_{j11} = \frac{1}{\gamma_1} I - 2R_1 + \sum_{i=1, i \neq j}^n \mathcal{G}_{ji} (Y_{j11} - 2R_1), \\ \Gamma_{j22} &= \frac{1}{\gamma_2} I - 2R_2 + \sum_{i=1, i \neq j}^n \mathcal{G}_{ji} (Y_{j22} - 2R_2), \quad \Gamma_{j21} = \sum_{i=1, i \neq j}^n \mathcal{G}_{ji} Y_{j21}, \\ \Theta_{i81} &= [\theta_{i1} R_1^T \quad 0 \quad \cdots \quad \theta_{i(i-1)} R_1^T \quad 0 \quad \theta_{i(i+1)} R_1^T \quad 0 \quad \cdots \quad \theta_{in} R_1^T \quad 0]^T, \\ \Theta_{i82} &= [0 \quad \theta_{i1} R_2^T \quad \cdots \quad 0 \quad \theta_{i(i-1)} R_2^T \quad 0 \quad \theta_{i(i+1)} R_2^T \quad \cdots \quad 0 \quad \theta_{in} R_2^T]^T, \\ \Theta_{i88} &= \text{diag} \{ \theta_{i1} Y_1, \theta_{i2} Y_2, \dots, \theta_{i(i-1)} Y_{i-1}, \theta_{i(i+1)} Y_{i+1}, \dots, \theta_{in} Y_n \}, \\ \Gamma_{j41} &= [\mathcal{G}_{j1} R_1^T \quad 0 \quad \cdots \quad \mathcal{G}_{j(j-1)} R_1^T \quad 0 \quad \mathcal{G}_{j(j+1)} R_1^T \quad 0 \quad \cdots \quad \mathcal{G}_{jn} R_1^T \quad 0]^T, \\ \Gamma_{j42} &= [0 \quad \mathcal{G}_{j1} R_2^T \quad \cdots \quad 0 \quad \mathcal{G}_{j(j-1)} R_2^T \quad 0 \quad \mathcal{G}_{j(j+1)} R_2^T \quad \cdots \quad 0 \quad \mathcal{G}_{jn} R_2^T]^T, \\ \Gamma_{j44} &= \text{diag} \{ \theta_{j1} Y_1, \theta_{j2} Y_2, \dots, \theta_{j(j-1)} Y_{j-1}, \theta_{j(j+1)} Y_{j+1}, \dots, \theta_{jn} Y_n \}, \\ H_{1i} &= L_i R_1, \quad H_{1j} = L_j R_1, \quad H_{2i} = L_{2i} R_2, \quad H_{2j} = L_{2j} R_2, \quad G_i = \Delta A_i R_1 \end{aligned}$$

那么, 系统(6)能够稳定地执行输出跟踪任务, 并保持良好的无扰特性。

证明: 对式(10)运行两次 Schur 补引理 1 可以推导出

$$\begin{bmatrix} -P_i + \Phi_i & * & * & * \\ 0 & -\tau^2 I & * & * \\ \bar{C}_i & 0 & -I & * \\ \bar{A}_i & \bar{E}_i & 0 & -P_i^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (28)$$

定义 $Y_i = P_i^{-1}$, $H = \text{diag} \{ \bar{R}, I, I, I \}$, $\bar{R} = \text{diag} \{ R_1, R_2 \}$ 。接着对(28)式左右两边分别乘以 H^T 和 H , 整理后得到

$$\begin{bmatrix} -\bar{R}^T P_i \bar{R} + \bar{R}^T \Phi_i \bar{R} & * & * & * \\ 0 & -\tau^2 I & * & * \\ \bar{C}_i \bar{R} & 0 & -I & * \\ \bar{A}_i \bar{R} & \bar{E}_i & 0 & -P_i^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (29)$$

然后对式(29)运用引理 2 可以得到:

$$\begin{bmatrix} Y_i - 2\bar{R} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \theta_{ij} (Y_i - 2\bar{R}) + \sum_{j=1, j \neq i}^n \theta_{ij} P_j & * & * & * \\ 0 & -\tau^2 I & * & * \\ \bar{C}_i \bar{R} & 0 & -I & * \\ \bar{A}_i \bar{R} & \bar{E}_i & 0 & -P_i^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (30)$$

接着再对式(30)运用引理 1 能够推导出

$$\begin{bmatrix} Y_i - 2\bar{R} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \theta_{ij} (Y_i - 2\bar{R}) & * & * & * & * \\ 0 & -\tau^2 I & * & * & * \\ \bar{C}_i \bar{R} & 0 & -I & * & * \\ \bar{A}_i \bar{R} & \bar{E}_i & 0 & -P_i^{-1} & * \\ \Theta_{5li} & 0 & 0 & 0 & -\Theta_{55i} \end{bmatrix} < 0 \quad (31)$$

其中,

$$\Theta_{5li} = [\theta_{i1} \bar{R}^T \quad \theta_{i2} \bar{R}^T \quad \cdots \quad \theta_{i(i-1)} \bar{R}^T \quad \theta_{i(i+1)} \bar{R}^T \quad \cdots \quad \theta_{in} \bar{R}^T]^T,$$

$$\Theta_{55i} = \text{diag} \{ \theta_{i1} Y_1, \theta_{i2} Y_2, \cdots, \theta_{i(i-1)} Y_{i-1}, \theta_{i(i+1)} Y_{i+1}, \cdots, \theta_{in} Y_n \}.$$

对式(31)中的矩阵元素进行运算, 即可推导得到式(26)。

接着, 利用 Schur 补引理 1 处理(11)式, 能够推导出

$$\begin{bmatrix} -\gamma_1 I + \sum_{i=1, i \neq j}^n \mathcal{G}_{ji} (P_{i11} - P_{j11}) & * & * \\ \sum_{i=1, i \neq j}^n \mathcal{G}_{ji} (P_{i21} - P_{j21}) & -\gamma_2 I + \sum_{i=1, i \neq j}^n \mathcal{G}_{ji} (P_{i22} - P_{j22}) & * \\ \Delta L_{1ji} & \Delta L_{2ji} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (32)$$

采用相同的处理方式, 对(32)式左右两边同时乘以 H^T 和 H 并结合引理 2 和引理 1 就可以得到(27)式。

综合上述分析, 式(26)的成立可推导出式(10)成立, 同样式(27)的满足可保证式(11)满足, 因此定理 2 得证。

4. 仿真实例

为了检验本文所提出控制策略的有效性及其优越性, 本节对一个具有两个子系统的带有参数不确定项的离散时间切换线性系统进行了数值仿真实验。系统模型如式(1)所示, 具体的子系统参数设置如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.2 & 0.1 \\ -0.3 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.03 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [0.3 \quad 0], \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.2 \\ 0.01 & 1.12 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.1 \end{bmatrix}, C_2 = [-0.2 \ 0], D_2 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix},$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.01 & 0 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, F_1(k) = \begin{bmatrix} 0 & \sin(k) \\ \cos(k) & 0 \end{bmatrix}, F_2(k) = \begin{bmatrix} \sin(k) & 0 \\ 0 & \cos(k) \end{bmatrix}.$$

针对参考模型(4)，其参数设定如下：

$$A_r = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -1 & -0.3 \end{bmatrix}, E_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, C_r = [0 \ 0.3].$$

外部干扰信号与参考输入信号分别设定为：

$$d(k) = 0.6 \cos(0.2\pi k) e^{-0.1k}, \quad r(k) = 0.3 \cos(0.2\pi k) e^{-0.1k}.$$

仿真中各参数的设定值如下：

$$\gamma_1 = 0.02, \quad \gamma_2 = 0.05, \quad \tau = 2, \quad \theta_{12} = 4, \quad \theta_{21} = 2, \quad \vartheta_{12} = 0.2, \quad \vartheta_{21} = 1.$$

为了检验本文所提无扰控制方法的有效性及其优越性，仿真中对比了两种控制策略：一种是本设计的综合控制方法，兼顾了输出跟踪稳定性和输入无扰性；另一种控制方法仅以保证输出跟踪稳定性为目标，不考虑输入突变的抑制。

图 1 给出了相同初始条件下两种不同控制方案中切换信号的仿真对比。图中上方子图呈现了第一种控制方案的动态特性，下方子图则对应第二种方案的结果，便于直观比较两种策略的性能差异。值得注意的是，对比图 1 中的两个子图可以发现，在引入无扰控制策略后，系统的切换频率相较于仅关注跟踪性能的策略有所增加。这一现象的产生源于控制目标的内在权衡，在第二种方案中，切换律仅需寻找能使跟踪误差 Lyapunov 函数单调递减的子系统，切换路径较为自由；而在本文提出的第一种方案的策略中，切换律必须在满足无扰性能约束的子系统集合中进行选择。为了抑制控制输入的突变并维持输出跟踪，系统往往需要通过更频繁的切换来寻找能够同时满足稳定性与输入平滑性的可行解。

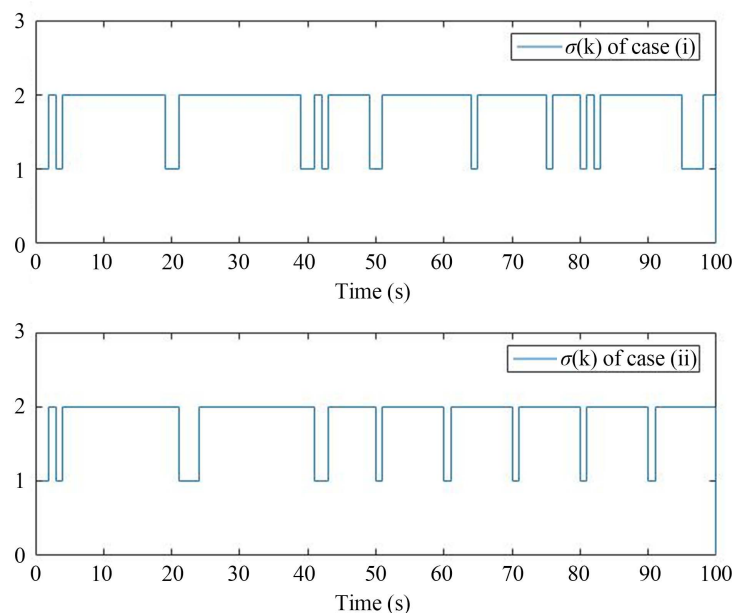


Figure 1. Response curves of switching signals
图 1. 切换信号的响应曲线

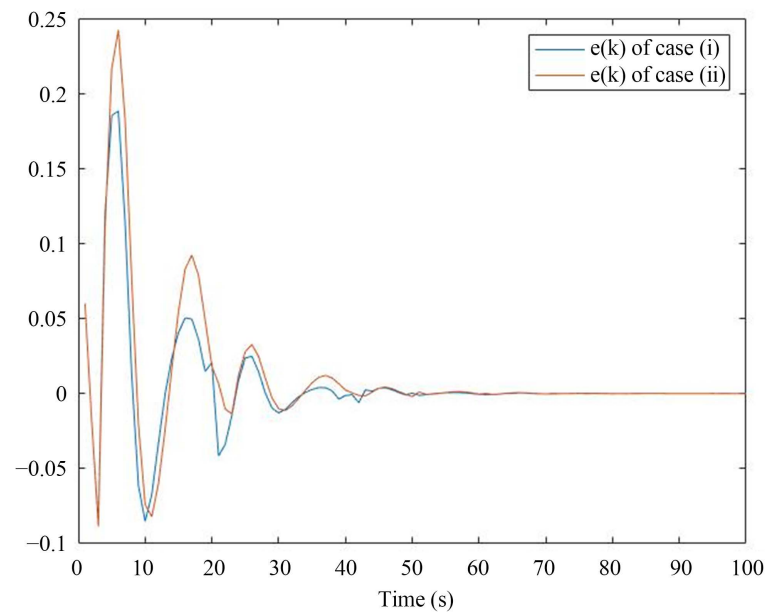


Figure 2. The output tracking error
图 2. 输出跟踪误差

尽管切换频率增加可能带来执行机构磨损的潜在风险,但本文定理中基于多 Lyapunov 函数的稳定性判据已隐式地保证了这种高频切换的安全性。图 3 也直观地表明,虽然切换次数增多,但闭环系统并未出现发散或剧烈震荡,且成功将控制输入的幅值限制在了安全范围内。

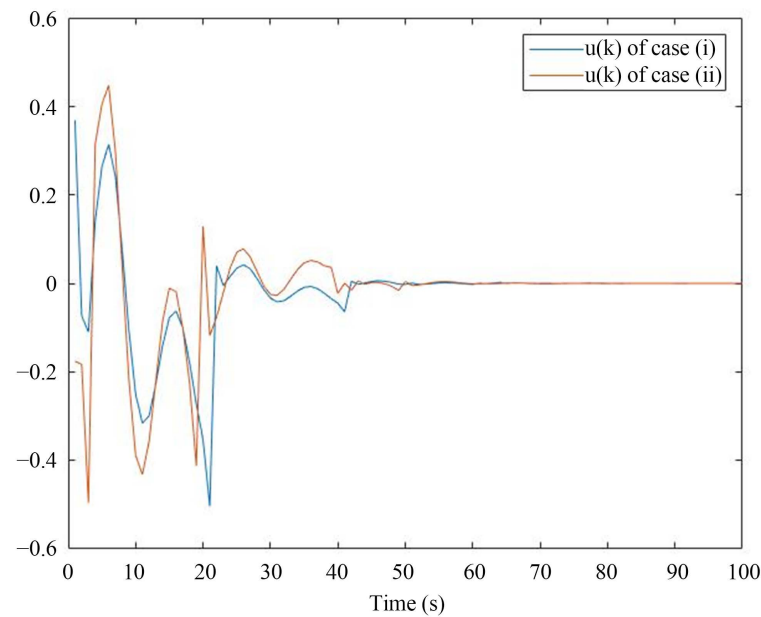


Figure 3. The control input signals
图 3. 控制输入信号

图 2 与图 3 分别描绘了两种情形下输出跟踪误差及控制输入的时域响应。为了便于直观评估,不同情形在同一性能指标下的演化趋势被绘制于同一坐标系中,从而清晰地揭示了二者的性能差异。观察仿

真曲线可知, 第一种控制策略在跟踪误差收敛性与控制输入幅值方面均表现出更优的特性, 其波动幅度显著小于第二种策略。随着仿真时间的推移, 采用无扰切换控制机制的第一种方案展现出更为平滑且稳健的动态行为; 反观第二种方案, 其系统响应则伴随着较为剧烈的震荡。

综上所述, 仿真分析结果有力地证实了本文所提出的无扰控制策略在提升系统稳定性与优化控制性能方面的有效性与显著优势。

5. 结论与展望

本研究针对具有不确定结构的离散时间切换线性系统, 提出了一种旨在消除控制输入突变的无扰切换控制策略, 有效解决了系统切换过程中的暂态颠簸问题。通过协同设计状态依赖的切换律与子控制器组, 并基于多李雅普诺夫函数方法, 严格推导了保证闭环系统实现输出跟踪稳定及无扰切换性能的充分条件。数值仿真结果证实, 该方法在确保良好跟踪效果的同时, 显著抑制了控制输入的波动, 展现出优异的动态平滑性与稳定性。综上, 本研究不仅突破了传统切换控制仅关注稳定性的局限, 也为提升复杂切换系统的综合控制性能提供了有效的理论依据与技术途径。

尽管本文提出的协同设计方法在理论上有效解决了不确定离散时间切换系统的输出跟踪无扰控制问题, 但为了确保分析的严谨性与求解的可操作性, 本研究仍建立在若干强假设基础之上, 这些假设也构成了当前方法的局限性, 值得在未来的研究中进一步突破。首先, 本文的控制器设计依赖于系统状态的完全可测性。然而, 在实际工程应用中, 往往只有输出是可测的。未来的研究将致力于将该框架扩展至输出反馈控制领域, 设计状态观测器以重构不可测状态, 这将极大地提升该方法的工程适用性。其次, 匹配不确定性约束简化了鲁棒项的处理难度。本文假设不确定性项满足匹配条件, 这一条件在面对更为复杂的环境扰动或参数摄动时可能显得过于理想化, 未来的工作将探索非结构化不确定性或非匹配不确定性的情况。最后, 本文的切换律依赖于实时的状态反馈。在未来的研究中, 我们将考虑异步切换场景, 即控制器的切换存在时间滞后, 以验证本文方法在通信延迟环境下的鲁棒性。

致 谢

本工作得到了国家自然科学基金(项目编号: 62441309)、辽宁省科技厅联合基金计划(项目编号: 2025-MSLH-349)以及辽宁省高校基本科研业务费专项资金(项目编号: LJ212410146024)的支持。谨向所有为本研究提供帮助与支持的老师、同学及机构表示诚挚的谢意。

基金项目

国家自然科学基金(项目编号: 62441309)、辽宁省科技厅联合基金计划(项目编号: 2025-MSLH-349)以及辽宁省高校基本科研业务费专项资金(项目编号: LJ212410146024)。

参考文献

- [1] Liu, C., Yang, Z., Sun, D., Liu, X. and Liu, W. (2017) Stability of Variable-Time Switched Systems. *Arabian Journal for Science and Engineering*, **42**, 2971-2980. <https://doi.org/10.1007/s13369-017-2476-4>
- [2] Shah, D., Santos, M.M.D., Chaoui, H. and Justo, J.F. (2021) Event-Triggered Non-Switching Networked Sliding Mode Control for Active Suspension System with Random Actuation Network Delay. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, **23**, 7521-7534. <https://doi.org/10.1109/TITS.2021.3071333>
- [3] Hall, B.D., Klank, H. and Eccles, C.D. (2000) A Task-Switching System for Digital Signal Processor-Based Scanning Probe Microscopes. *Review of Scientific Instruments*, **71**, 318-319. <https://doi.org/10.1063/1.1150200>
- [4] Saranathan, H. and Grant, M.J. (2018) Relaxed Autonomously Switched Hybrid System Approach to Indirect Multiphase Aerospace Trajectory Optimization. *Journal of Spacecraft and Rockets*, **55**, 611-621. <https://doi.org/10.2514/1.A34012>
- [5] Kundu, A. (2021) On Stabilizability of Switched Linear Systems under Restricted Switching. *IEEE Transactions on*

- Automatic Control*, **67**, 2060-2067. <https://doi.org/10.1109/TAC.2021.3071648>
- [6] Liu, S., Niu, B., Zong, G., Zhao, X. and Xu, N. (2022) Adaptive Fixed-Time Hierarchical Sliding Mode Control for Switched Under-Actuated Systems with Dead-Zone Constraints via Event-Triggered Strategy. *Applied Mathematics and Computation*, **435**, Article 127441. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2022.127441>
- [7] Liu, Y. and Zhu, Q. (2022) Fuzzy-Based Adaptive Event-Triggered Control for Switched Stochastic Nonlinear Systems with State Constraints. *Asian Journal of Control*, **24**, 1713-1725. <https://doi.org/10.1002/asjc.2601>
- [8] Su, Q., Wang, P., Li, J. and Liu, H. (2017) Stabilization of Discrete-Time Switched Systems with State Constraints Based on Mode-Dependent Average Dwell Time. *Asian Journal of Control*, **19**, 67-73. <https://doi.org/10.1002/asjc.1319>
- [9] Zhai, D., Lu, A.Y., Li, J.H. and Zhang, Q.L. (2016) State and Dynamic Output Feedback Control of Switched Linear Systems via a Mixed Time and State-Dependent Switching Law. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **22**, 228-248. <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2016.04.007>
- [10] Waldron, I. (1967) Neural Mechanism by Which Controlling Inputs Influence Motor Output in the Flying Locust. *Journal of Experimental Biology*, **47**, 213-228. <https://doi.org/10.1242/jeb.47.2.213>
- [11] Zhao, Y., Liu, X., Gao, Y., Li, P. and Yu, S. (2023) Fault Estimation and Tolerant Bumpless Transfer Control for Switched Systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, **177**, Article 114281. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2023.114281>
- [12] Zhang, L., Xu, K., Yang, J., Han, M. and Yuan, S. (2022) Transition-Dependent Bumpless Transfer Control Synthesis of Switched Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **68**, 1678-1684. <https://doi.org/10.1109/TAC.2022.3152721>
- [13] Zhao, Y., Yu, S. and Lian, J. (2020) Anti-Disturbance Bumpless Transfer Control for Switched Systems with Its Application to Switched Circuit Model. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, **67**, 3177-3181. <https://doi.org/10.1109/TCSII.2020.2970068>
- [14] Zhao, Y. and Zhao, J. (2021) H_∞ Output Tracking Bumpless Transfer Control for Switched Linear Systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, **38**, 159-176. <https://doi.org/10.1093/imamci/dnaa005>
- [15] Wu, Z., Shi, Y., Fei, Z. and Liu, X. (2024) Mode-Recovered Bumpless Transfer Control for Aeroengines with Switched Models. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **60**, 2183-2192. <https://doi.org/10.1109/TAES.2024.3350012>
- [16] Liu, M.R., Wu, Z., Du, X. and Fei, Z. (2024) Finite-Time and Bumpless Transfer Control of Asynchronously Switched Systems: An Output Feedback Control Approach. *Journal of the Franklin Institute*, **361**, 1566-1581. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2024.01.026>
- [17] Shi, Y., Zhao, J. and Sun, X.M. (2020) A Bumpless Transfer Control Strategy for Switched Systems and Its Application to an Aero-Engine. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, **17**, 52-62. <https://doi.org/10.1109/TII.2020.2979736>
- [18] 张帆, 邓雄峰. 领导者-跟随者多智能体系统滑模容错控制策略[J]. 牡丹江师范学院学报(自然科学版), 2025(1): 19-25.
- [19] Wang, H., Wang, Z., Liu, Y.J. and Tong, S. (2017) Fuzzy Tracking Adaptive Control of Discrete-Time Switched Nonlinear Systems. *Fuzzy Sets and Systems*, **316**, 35-48. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2016.10.008>
- [20] Zhao, Y. and Zhao, J. (2019) Event-Triggered Bumpless Transfer Control for Switched Systems with Its Application to Switched RLC Circuits. *Nonlinear Dynamics*, **98**, 1615-1628. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05154-8>
- [21] Kemin, Z. and Doyle, J.C. (1998) Essentials of Robust Control. Prentice Hall Upper Saddle River, 269-300.
- [22] Boukas, E.K. (2006) Stochastic Switching Systems: Analysis and Design. Birkhäuser Boston.