Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2026, 15(5), 10-17**
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.155203

Hans汉斯

具有收获和Holling Type I功能反应的分段光滑捕食–食饵模型的动力学分析

刘明欢

南昌师范学院数学与信息科学学院，江西 南昌

收稿日期：2026年4月9日；录用日期：2026年5月2日；发布日期：2026年5月9日

摘 要

本文借助快慢系统相关的一些理论和概念、Fenichel理论对原系统进行了快慢分析，通过构造Poincare映射应用不动点定理等证明该具有捕食者收获和Holling Type I功能反应的分段光滑捕食–食饵模型存在弛豫振荡，同时应用隐函数定理证明同宿轨的存在性。

关键词

捕食–食饵模型，快慢系统，弛豫振荡，同宿轨

Dynamic Analysis of a Piecewise Smooth Predator-Prey Model with Harvesting and Holling Type I Functional Response

Minghuan Liu

College of Mathematics and Information Science, Nanchang Normal University, Nanchang Jiangxi

Received: April 9, 2026; accepted: May 2, 2026; published: May 9, 2026

Abstract

In this paper, by employing theories and concepts related to fast-slow systems as well as Fenichel's theory, we perform a fast-slow analysis on the original system. Through constructing the Poincaré map and applying the fixed point theorem, we prove the existence of relaxation oscillations in the piecewise smooth predator-prey model with predator harvesting and Holling Type I functional response. Meanwhile, the implicit function theorem is applied to establish the existence of homoclinic orbits.

文章引用: 刘明欢. 具有收获和 Holling Type I 功能反应的分段光滑捕食-食饵模型的动力学分析[J]. 应用数学进展, 2026, 15(5): 10-17. DOI: 10.12677/aam.2026.155203

Keywords

Predator-Prey Model, Fast-Slow System, Relaxation Oscillation, Homoclinic Orbit

1. 引言

捕食食饵模型的动力学研究，既是理解生命系统自组织、稳定与演化的核心钥匙，也是连接数学理论与生态实践的桥梁。它不仅回答了“生态系统为何能运转”的基础科学问题，更提供了定量工具，让人类从“被动适应自然”走向“主动、科学地管理与保护自然”，对维持地球生态平衡、保障农林渔业可持续发展、应对生物入侵与物种灭绝危机，都具有不可替代的理论与现实价值。近年来，有众多学者对捕食–食饵模型进行了研究，在文献[1]中，李等学者研究了无捕食者相互干扰的具有功能反应函数的分段光滑捕食–食饵模型，通过快慢分析证明该系统弛豫振荡的存在性、收敛性和稳定性；在文献[2]中，李等学者对文献[1]中的模型进行了改进，使得功能反应函数具有捕食者相互干扰，通过进出函数、庞加莱映射、Fenichel 理论以及变分方程等，证明研究的捕食-食饵模型具有两个嵌套的弛豫振荡；在文献[3]中，姚等学者考虑了更现实的问题，某捕食者可能对于人类来说是猎物，比如大鱼吃小虾的生态系统中，大鱼是捕食者，小虾是被捕食者，但大鱼对人类而言是食物，所以在文献[3]中，姚等学者考虑了恒定捕食者收获，当然恒定捕食者收获相对于捕食者的增长率是足够小的，姚等学者通过快慢分析以及吹胀等方法，证明了具有分段光滑和捕食者的捕食–食饵模型具有丰富的动力学性质，解释为何有些生态系统能长期稳定，而有些易崩溃等自然生态现象。而对于更普遍更有现实意义的具有线性变化的捕食者收获的分段光滑捕食–食饵模型的研究目前仍是少之又少，故在此背景下，本文研究具有线性捕食者收获的分段光滑捕食–食饵模型

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx\left(1-\dfrac{x}{K}\right) - a\phi(x)y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y\left[ac\phi(x)-d\right] - ky \end{cases} \tag{1.1}$$

其中

$$\phi(x) = \begin{cases} x, x \le x_0 \\ x_0, x > x_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

类似文献[4]，并假设 $K > 2x_0$ 以保证食饵的环境容纳量充足，从而捕食者实现正增长。

其中 $x \ge 0$ 表示食饵密度， $y \ge 0$ 表示捕食者密度， $r, K, d, c, a, x_0, k \ge 0$ 分别表示食饵的内禀增长率、环境容纳量、捕食者的自然死亡率、捕食者的转化率、最大捕食率系数、Holling I 型功能反应的阈值，当时 $x \le x_0$，捕食率随食饵增加；当时 $x > x_0$，捕食率达到饱和、捕食者收获率的线性化系数，当 $k = 0$ 时，模型退化为文献[3]的经典形式，当 $k > 0$ 时，高捕食者密度会抑制个体的捕食效率、对捕食者的恒定收获率。

为了能应用几何奇异摄动理论对模型(1.1)进行动力学分析，我们和文献[3]做出类似的假设，假设对捕食者的恒定收获率 h 相较于食饵的内禀增长率 r 足够小，即

$$0<\frac{h}{r}\ll 1$$

我们对模型(1.1)进行无量纲化，令$0<\varepsilon=\frac{1}{r}\ll 1,\tilde{x}=\frac{x}{x_0},\tilde{y}=\frac{a}{r}y,\tau=rt$，因为数学习惯，我们仍用$x,y,t$代替$\tilde{x},\tilde{y},\tau$，通过变量替换，我们可以得到原始模型(1.1)的无量纲化方程为：

原功能反应函数转化为$\phi(x_0x)=\begin{cases}x_0x, x_0x\le x_0\\ x_0, x_0x>x_0\end{cases}$，引进新的符号表示功能反应函数$\varphi(x)=\begin{cases}x, x\le 1\\ 1, x>1\end{cases}$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x\left(1-\dfrac{x_0x}{K}\right)-xy\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\varepsilon y\left[acx_0\varphi(x)-d-k\right]\end{cases},0\le x\le 1 \tag{1.3}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x\left(1-\dfrac{x_0x}{K}\right)-y\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\varepsilon y\left(acx_0\varphi(x)-d-k\right)\end{cases},x>1 \tag{1.4}$$

下面将证明如下结果，具有线性捕食者收获的分段光滑捕食－食饵模型(1.3)和(1.4)存在弛豫振荡和同宿轨。

2. 系统的快慢动力学分析

2.1. $0\le x\le 1$时系统的动力学分析

根据引言部分，易知当$0\le x\le 1$时，捕食－食饵模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x\left(1-\dfrac{x_0x}{K}\right)-xy\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\varepsilon y\left(acx_0x-d-k\right)\end{cases} \tag{1.3}$$，

其中$0<\varepsilon=\frac{1}{r}\ll 1$，显然系统为标准的快慢系统，故可用几何奇异摄动理论[5] [6]来进行分析。

令$\varepsilon=0$得到快系统(1.3)对应的快子系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x\left(1-\dfrac{x_0x}{K}\right)-xy\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0\end{cases} \tag{1.5}$$，

做时间尺度变换令$\tau=\varepsilon t$，得到快系统(1.3)对应的慢系统

$$\begin{cases}\varepsilon\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=x\left(1-\dfrac{x_0x}{K}\right)-xy\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y\left(acx_0x-d-k\right)\end{cases} \tag{1.6}$$，

慢子系统

$$\begin{cases}0=x\left(1-\dfrac{x_0x}{K}\right)-xy\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y\left(acx_0x-d-k\right)\end{cases} \tag{1.7}$$，

此时临界流形记为$C_1=\left\{(x,y)\mid y=1-\frac{x_0x}{K},0\le x\le 1\right\}$，根据 Fenichel 理论，计算$\forall(x,y)\in C_1$时，所对应的雅可比矩阵$J_1=\begin{pmatrix}1-\frac{2x_0}{K}x-y & -x\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\forall(x,y)\in C_1$雅可比矩阵$J_1$存在一个零特征值和一个正特征值，根据 Fenichel 理论，在$0\le x\le 1$的区间内，临界流形是排斥的。

2.2. $x>1$时系统的动力学分析

根据引言部分，易知当$x>1$时，捕食－食饵模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x\left(1-\dfrac{x_0x}{K}\right)-y\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\varepsilon y\left(acx_0-d-k\right)\end{cases},x>1, \tag{1.4}$$

其中$0<\varepsilon=\frac{1}{r}\ll 1$，显然系统为标准的快慢系统[7]，故可用几何奇异摄动理论来进行分析令$\varepsilon=0$得到快系统(1.4)对应的快子系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x\left(1-\dfrac{x_0x}{K}\right)-y\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0\end{cases} \tag{1.8}$$

做时间尺度变换令$\tau=\varepsilon t$，得到快系统(1.4)对应的慢系统

$$\begin{cases}\varepsilon\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=x\left(1-\dfrac{x_0x}{K}\right)-y\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}=y\left(acx_0-d-k\right)\end{cases} \tag{1.9}$$

令$\varepsilon=0$，得到慢系统对应的慢子系统

$$\begin{cases}0=x\left(1-\dfrac{x_0x}{K}\right)-y\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}=y\left(acx_0-d-k\right)\end{cases} \tag{1.10}$$

通过计算易知当$x>1$时，临界流形$C_2=\left\{(x,y)\mid y=x\left(1-\frac{x_0x}{K}\right),x>1\right\}$，为一个开口向下的抛物线。根据 Fenichel 理论，计算$\forall(x,y)\in C_2$时，所对应的雅可比矩阵$J_2=\begin{pmatrix}1-\frac{2x_0}{K}y & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，当$\forall(x,y)\in C_2$且$1<x<\frac{K}{2x_0}$，雅可比矩阵$J_2$存在一个零特征值和一个正特征值，该段临界流形是排斥的；当$\forall(x,y)\in C_2$且$\frac{K}{2x_0}<x\le\frac{K}{x_0}$，雅可比矩阵$J_2$存在一个零特征值和一个负特征值，该段临界流形是吸引的；其中$\left(\frac{K}{2x_0},\frac{K}{4x_0}\right)$为系统的非双曲点，可利用吹胀的方法[7]，分析系统在非双曲点的动力学行为。

命题 2.1 对于系统(1.3)和系统(1.4)下面声明是成立的。

(1) 系统(1.3)和系统(1.4)对于 x 轴和 y 轴是正不变的；

(2) 系统(1.3)存在稳定结点 $E\left(\frac{k+d}{acx_0},1-\frac{k+d}{Kac}\right)$。

命题 2.2 定义进出函数[7]，$E(y)=\int_0^{\tau_0} g\left(x(\xi),0,0\right)\mathrm{d}\xi=0$，令 $y_m=1-\frac{x_0}{K},y_M=\frac{K}{4x_0}$，则存在唯一的 $E\left(y_p\right)=0$，其中 $0<y_p\le y_m$。

3. 主要动力学行为

3.1. 弛豫振荡

3.1.1. 弛豫振荡的存在性、收敛性和稳定性

我们证明大弛豫振荡 Γ_ε 的存在性。首先，我们构造一个庞加莱映射 P，证明构造的庞加莱映射 P 是一个压缩映射，根据压缩映射定理和不动点定理，即可证明弛豫振荡 Γ 的存在性。定义一个垂直截面 $I=\left\{(1,y)\,|\,y\in\left(\frac{K}{4x_0}-\delta,\frac{K}{4x_0}+\delta\right)\right\}$，其中 δ 足够小。依据进出函数解的存在唯一性中，对每个 $y_0\in I$，我们利用进出函数可计算 y_p。

我们考虑系统(1.4)的两条轨迹从垂直截面出发的轨迹 $\rho_{1\varepsilon}$ 和 $\rho_{2\varepsilon}$，追踪他们的运动行径，它们从点 $(1,y)\in I$ 出发，根据 Fenichel 理论，两条轨迹会先径直跳向 y 轴，在 $1\le y\le y_M$ 时，临界流形是吸引的，当 $y<1$ 时，根据进出函数，两条轨迹从 y_p 垂直运动到 $\left(1,y_p\right)$，然后运动到临界流形的吸引分支上，以速率为 $O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right)$ 指数级收缩[8]，由于当 $\frac{K}{2x_0}\le x\le\frac{K}{x_0}$ 临界流形是法向双曲吸引的，两条轨迹运动到非双曲点，根据 Fenichel 理论从垂直截面出发的轨迹 $\rho_{1\varepsilon}$ 和 $\rho_{2\varepsilon}$，以指数形式相互靠近，最终运动到垂直截面 I 上。综上所述，定义的庞加莱映射 $P:I\to I$，是一个以指数速率 $O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right)$ 压缩的映射。故利用压缩映射定理，我们知道庞加莱映射 P 有唯一的不动点，再根据不动点定理，这个不动点正是弛豫振荡 Γ_ε 上的一个点。再次利用 Fenichel 理论和文献[9]中的定理 2.1，我们知道是 Γ_ε 稳定的，并且当 $\varepsilon\to 0$ 时，它在 Hausdorff 距离下收敛到 Γ_0。

接下来，我们证明小弛豫振荡 γ_ε 的存在性。命题 2.2 告诉我们系统(1.3)存在稳定结点 $E\left(\frac{k+d}{acx_0},1-\frac{k+d}{Kac}\right)$，且上文证明了大弛豫振荡是稳定的；根据庞加莱－本迪克松定理，我们可知系统(1.3)在大弛豫振荡和稳定结点之间必至少存在一个不稳定极限环。下面我们证明大弛豫振荡和稳定结点之间恰好存在一个不稳定极限环，且这个极限环就是小弛豫振荡 γ_ε。根据文献[10]中推论 4.3，系统(1.3)的极限环的稳定性将由以下变分方程的特征值决定：

$$\oint\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[x\left(1-\frac{x_0x}{K}\right)\right]-xy\right)+\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon y\left(acx_0x-d-k\right)\mathrm{d}t=\oint\left(1-\frac{2x_0}{K}x-y+acx_0\varepsilon-d\varepsilon-k\varepsilon\right)\mathrm{d}t>0$$

根据文献[10]中推论 4.3 知变分方程的特征值包含正实部，故弛豫振荡 γ_ε 是不稳定的，又由于任意相邻极限环的稳定性是不相同的，所以系统(1.3)的存在唯一的不稳定极限环 γ_ε 在大弛豫振荡和稳定结点之间，在 $\varepsilon\to 0$ 时，它在 Hausdorff 距离下收敛到 γ_0。

3.1.2. 弛豫振荡的存在性、收敛性和稳定性的生物学意义

弛豫振荡是一种特殊的极限环，表现为长时间的“准静态”行为与短时间的快速变化交替出现的周期性轨迹。在生物学上，它表明该具有分段光滑和捕食者收获的快慢系统种群密度在长时间内相对平稳，但会突然发生剧烈的、短暂的数量变化，随后再次恢复平稳。这是对自然界中常见的种群爆发衰退现象的合理化解释。

本文通过构造庞加莱映射、变分方程以及利用几何奇异摄动理论，证明了弛豫振荡的存在性，并且系统存在唯一的弛豫振荡，并且这个振荡是稳定的。生物学上，这意味着在给定的参数条件下，系统的动力学行为最终会收敛到一个稳定的周期性轨道，而不会发散到其他状态。即无论种群的初始密度如何，它们最终会以特定的、可预测的模式进行周期性波动，这有助于解释为什么某些生态系统在长期内表现出稳定的、周期性的种群变化，而不会随机地崩溃或爆炸。

弛豫振荡的稳定性意味着，即使系统受到小的扰动如环境变化或者其他种群的干扰，其轨道也会回到原来的周期性轨迹。这对应着生态系统的抗干扰能力。本文研究的模型包含了线性捕食者收获，并且收获率相对于食饵的增长率较低。弛豫振荡的稳定性表明，在适当的收获率下，捕食者和猎物种群的周期性变化可以保持稳定，从而允许可持续的资源利用。

总结来说，弛豫振荡的存在性、收敛性和稳定性在生物学上代表了种群动态的可预测性、系统的自我调节能力以及对环境扰动的稳健性。这对理解自然种群的周期性波动、评估人类活动对生态系统的影响，以及制定可持续的资源管理政策都具有重要意义。

3.2. 同宿轨

3.2.1. 同宿轨的存在性

在 3.1 节的证明过程中，我们追踪从垂直截面出发的点 $A\left(1,\dfrac{K}{4x_0}+O(\varepsilon)\right)$ 轨迹，根据 Fenichel 理论通过临界流形等轨迹会再次运动到垂直截面 I 上，根据进出函数[9]，该轨迹再次运动到垂直界面上点的位置为 $B\left(1,y_p+O(\varepsilon)\right)$，由此可计算运动一圈后两点之间的距离 $S_{AB}=\dfrac{K}{4x_0}-y_0+O(\varepsilon)$，$S_{AB}$ 关于参数是光滑的函数，故可用解对初值的连续性和可依赖性，当 $\varepsilon\to 0$ 时，$S_{AB}\to 0$，即任意一条出发的轨迹，运动一周后又回到起点，故证明了同宿轨的存在性。

3.2.2. 同宿轨存在性的生物学意义

同宿轨道是连接一个鞍点平衡态到其自身的轨道。本文证明系统存在一条特殊的轨迹，从该鞍点出发，运动一圈后最终又回到原来的鞍点。这对应着生物学上捕食者和猎物种群数量在经历一次大尺度的周期性波动后，最终会回到一个不稳定的共存平衡点。这个平衡点即鞍点是不稳定的，意味着任何微小的扰动都会使系统偏离它。因此，同宿轨道可以被视为一个生态阈值。如果种群数量正好在同宿轨道上，它会经历一次剧烈的波动后回到不稳定的平衡点。

4. 研究总结、研究不足与研究展望

4.1. 研究结论

本文以文献[3]中模型为基础以及借鉴文献[1]等参考文献，对文献[3]中具有恒定捕食者收获率的分段光滑的捕食–食饵模型进行改进，将恒定捕食者收获率转为线性捕食者收获率，即人类对捕食者的活动随着捕食者的数量呈现线性变化，使得研究的生物系统模型更加具有现实意义。

本文主要是对系统进行快慢分析，应用 Fenichel 理论等理论证明了具有线性捕食者收获的分段光滑

捕食–食饵模型的弛豫振荡存在性、收敛性和稳定性，从而解释了无论种群的初始密度如何，它们最终会以特定的、可预测的模式进行周期性波动这种生态系统现象，这有助于解释为什么某些生态系统在长期内表现出稳定的、周期性的种群变化，而不会随机地崩溃或爆炸。

同时本文证明了具有线性捕食者收获的分段光滑捕食–食饵模型的同宿轨存在性，它表明生态系统在某些参数组合下，其动态行为可能会发生突然的、不连续的转变。

综上所述，通过本文的研究，使得我们对更具有现实意义的生物系统的生态现象有了更加深刻的理解。

4.2. 研究不足与研究展望

本文虽在原有的研究成果上进行了改进，考虑了更具现实意义的生物系统。但只考虑了人类的简单活动即线性收获率对生态系统的影响，不足以覆盖和包含复杂多变的生态系统的各种生态学行为，故针对上述不足，接下来可研究一个具有收获和相互干扰的分段光滑、快–慢捕食–食饵模型，即考虑人类的活动和物种之间的相互干扰，如下述模型

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx\left(1-\dfrac{x}{K}\right) - a\psi\left(x,y\right)y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y\left(a\psi\left(x,y\right)-d\right)-ky \end{cases}$$

其中$\psi\left(x,y\right)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+\lambda y} \\ \dfrac{x_0}{1+\lambda y} \end{cases}$，当$\begin{cases} x \le x_0 \\ x > x_0 \end{cases}$。

或者我们考虑更高维的生物系统的动力学行为，后期也可以考虑带有时滞的生物系统的动力学行为，从而可以解释更加符合现实意义，更复杂的生物学现象。

基金项目

本研究得到江西省教育厅科学技术研究项目(项目编号：GJJ2401901)和南昌师范学院科研项目(项目编号：24XJZR01)的资助。

参考文献

[1] Li, S., Wang, X., Li, X. and Wu, K. (2021) Relaxation Oscillations for Leslie-Type Predator-Prey Model with Holling Type I Response Functional Function. *Applied Mathematics Letters*, **120**, Article ID: 107328. https://doi.org/10.1016/j.aml.2021.107328

[2] Li, S., Wang, C. and Wu, K. (2021) Relaxation Oscillations of a Slow-Fast Predator-Prey Model with a Piecewise Smooth Functional Response. *Applied Mathematics Letters*, **113**, Article ID: 106852. https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106852

[3] Yao, J., Huang, J. and Wang, H. (2024) Relaxation Oscillation, Homoclinic Orbit and Limit Cycles in a Piecewise Smooth Predator-Prey Model. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, **23**, Article No. 289. https://doi.org/10.1007/s12346-024-01154-1

[4] Saha, T., Pal, P.J. and Banerjee, M. (2022) Slow-Fast Analysis of a Modified Leslie-Gower Model with Holling Type I Functional Response. *Nonlinear Dynamics*, **108**, 4531-4555. https://doi.org/10.1007/s11071-022-07370-1

[5] Fenichel, N. (1979) Geometric Singular Perturbation Theory for Ordinary Differential Equations. *Journal of Differential Equations*, **31**, 53-98. https://doi.org/10.1016/0022-0396(79)90152-9

[6] Jones, C.K.R.T. (1995) Geometric Singular Perturbation Theory. In: Arnold, L., *et al*., Eds., *Dynamical Systems*, Springer, 44-118. https://doi.org/10.1007/bfb0095239

[7] 王成. 快-慢系统的延迟失稳和种群模型的动力学[D]: [博士学位论文]. 上海: 上海交通大学, 2019.

[8] 师向云, 张泰瑞, 高喜文, 等. 一类捕食者具似 Allee 效应的捕食食饵集合种群系统的动力学行为研究[J]. 信阳师范学院学报(自然科学版), 2021, 34(3): 345-349.

[9] Medrado, J.C. and Torregrosa, J. (2015) Uniqueness of Limit Cycles for Sewing Planar Piecewise Linear Systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **431**, 529-544. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.05.064

[10] Krupa, M. and Szmolyan, P. (2001) Extending Geometric Singular Perturbation Theory to Nonhyperbolic Points—Fold and Canard Points in Two Dimensions. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **33**, 286-314. https://doi.org/10.1137/s0036141099360919