

解法有异，思维无界

——动点问题中的无限可能

韩冰*, 郑晨

吉林师范大学数学与计算机学院, 吉林 四平

收稿日期: 2026年4月27日; 录用日期: 2026年5月22日; 发布日期: 2026年5月28日

摘要

本文以等腰直角三角形为几何背景, 选取典型动点问题展开多路径探究, 综合运用坐标法、向量法等多种方法完成线段长度恒等性证明, 精准揭示运动过程中蕴含的几何不变量本质。研究立足数形结合、参数化等核心思想, 通过一题多解对比梳理动点问题的解题逻辑与通用策略, 充分体现直观想象、逻辑推理、数学运算等数学核心素养在几何动态问题求解中的融合应用, 展现了数学解法的多样性与思维的开放性。

关键词

动点问题, 等腰直角三角形, 坐标法, 不变量, 数学素养

Different Solutions, Boundless Thinking

—Infinite Possibilities in Dynamic Point Problems

Bing Han*, Chen Zheng

School of Mathematics and Computer Science, Jilin Normal University, Siping Jilin

Received: April 27, 2026; accepted: May 22, 2026; published: May 28, 2026

Abstract

Taking an isosceles right triangle as the geometric background, this paper conducts a multi-path exploration on typical dynamic point problems. A variety of methods such as the coordinate method and vector method are comprehensively applied to prove the constancy of line segment lengths, accurately revealing the nature of geometric invariants contained in the motion process. Based on the core ideas of number-shape combination, parameterization and others, this study combs the

*通讯作者。

problem-solving logic and general strategies of dynamic point problems through multiple solutions to one problem. It fully reflects the integrated application of core mathematical competencies including intuitive imagination, logical reasoning and mathematical operation in solving geometric dynamic problems, demonstrating the diversity of mathematical solutions and the openness of thinking.

Keywords

Dynamic Point Problems, Isosceles Right Triangle, Coordinate Method, Invariants, Mathematical Competencies

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

数学的真谛, 从来不是寻找唯一的答案, 而是探索无限的可能。当面对一道数学问题, 常常会习惯于寻找解题的“标准路径”。然而, 真正的数学思维往往超越这条“路径”本身。正如“条条大路通罗马”, 一道好的数学题, 其价值不在于找到标准答案, 而在于连接问题与答案的那些蜿蜒曲折、却又充满智慧的思维路径。本文以一道经典的初中数学题为例, 通过探究多种解法, 体会数学思维的奇妙无穷。

2. 试题呈现

(2024年希望杯全国数学邀请赛改编)如图1, 在等腰 $Rt\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$, 点 D 是 BC 边上的中点。点 P 从点 A 出发, 以每秒1个单位的速度沿 $A \rightarrow B$ 运动, 点 Q 从点 C 出发, 以每秒1个单位的速度沿 $C \rightarrow A$ 运动。当点 P 到达点 B 时, 两点同时停止运动。设运动时间为 t 秒($0 < t < AB$)。连接 DP , DQ , PQ 。求证: 在运动过程中, $\triangle PDQ$ 始终是等腰直角三角形(即 $DP = DQ$, 且 $\angle PDQ = 90^\circ$)。

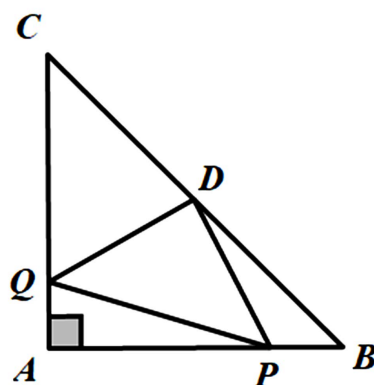


Figure 1. Schematic diagram of dynamic point problem

图1. 动点问题几何示意图

3. 问题分析

这是一道综合性较强的动态几何证明题, 需要学生分析、整理已知条件, 回忆学过的相关知识, 并梳理解题思路。

首先, 从已知条件出发, 可以得到以下结论:

(1) 图形基本性质: $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, 且 $\angle A = 90^\circ$ 。由此可推出 $AB = AC$, 以及 $\angle B = \angle C = 45^\circ$ 。点 D 是斜边 BC 的中点, 根据“直角三角形斜边中线等于斜边的一半”这一性质, 可得 $AD = BD = CD$ 。不仅如此, 在等腰直角三角形中, 斜边中线 AD 也同时是高线和角平分线, 因此 $AD \perp BC$ 。

(2) 动点运动规律: 点 P 和点 Q 同时从点 A 和点 C 出发, 速度相同, 分别在线段 AB 和 CA 上相向运动[1]。这意味着在任意时刻 t , 有 $AP = CQ$ 。这个“等距”条件($AP = CQ$)是连接两个动点的关键纽带, 暗示着图形中可能存在某种对称或全等关系。

其次, 从证明的结论出发, 在运动过程中的任意时刻, $\triangle PDQ$ 始终是等腰直角三角形, 且直角位于点 D 处。这包含两个子目标: 边的关系需证明 $DP = DQ$; 角的关系需证明 $\angle PDQ = 90^\circ$ 。

最后, 联系所学知识, 观察图形, 这里没有明显的全等三角形或平行线, 因此需要通过添加辅助线或变换视角来构造关系。

在证明之前, 需明确相关已知条件: 设 $AB = AC = a$, 动点位置: $AP = t$, $CQ = t$ 。所以 $PB = a - t$, $AQ = a - t$ 。由于 D 是斜边 BC 的中点, 且 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, 根据“三线合一”和“直角三角形斜边中线等于斜边一半”的性质, 得到: $AD \perp BC$, $AD = BD = CD$, $\angle BAD = \angle CAD = \angle ABD = \angle ACD = 45^\circ$ 。

4. 巧妙之径

解法 1: 经典全等法

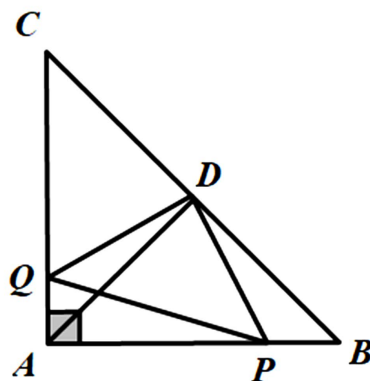


Figure 2. Auxiliary line diagram of classic congruence method
图 2. 经典全等法辅助线示意图

如图 2, 连接 AD 。在 $\triangle ADP$ 和 $\triangle CQD$ 中, $AP = CQ$, $AD = CD$, $\angle PAD = \angle QCD = 45^\circ$ 。

根据 SAS 判定定理, $\triangle ADP \cong \triangle CQD$ 。由全等可得: $DP = DQ$, $\angle ADP = \angle CDQ$ 。

又 $\angle PDQ = \angle PDC - \angle CDQ$, $\angle CDQ = \angle ADP$ 得 $\angle PDQ = \angle PDC - \angle ADP$ 。

而 $\angle PDC - \angle ADP = \angle ADC$, 由于 $AD \perp BC$, 所以 $\angle ADC = 90^\circ$, 即 $\angle PDQ = 90^\circ$ 。

综上, $\triangle PDQ$ 是等腰直角三角形。

剖析:

经典全等法的核心要点是连接 AD , 证明 $\triangle ADP \cong \triangle CQD$ 。利用全等直接得到 $DP = DQ$, 并通过角度和($\angle PDC + \angle ADP = \angle ADC = 90^\circ$)证明 $\angle PDQ = 90^\circ$ 。应用了等腰直角三角形“三线合一”的性质, 三角形全等的判定(SAS), 邻补角、角度和的计算等知识[2]。主要体现了基本图形思想与化归思想。

解法 2: 坐标向量法

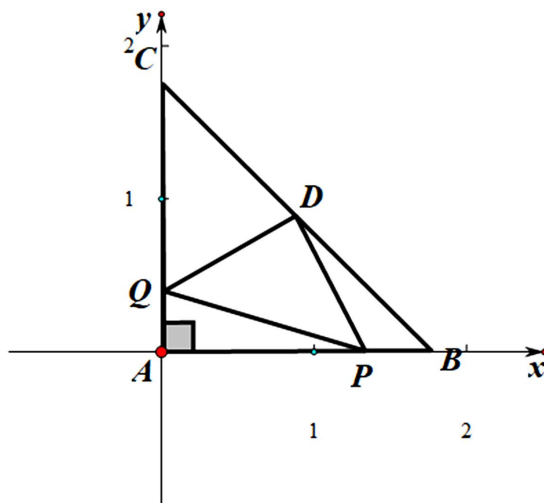


Figure 3. Coordinate system diagram of coordinate vector method
图 3. 坐标向量法坐标系示意图

建立坐标系: 以点 A 为原点, AB 为 x 轴, AC 为 y 轴, 如图 3。

$$A(0,0), B(a,0), C(0,a), D = \left(\frac{a+0}{2}, \frac{0+a}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right),$$

P 在 AB 上, $AP = t$, 所以 $P(t,0)$, Q 在 AC 上, $CQ = t$, 所以 $AQ = a - t$, 故 $Q(0, a - t)$ 。

$$\overrightarrow{DP} = \left(t - \frac{a}{2}, 0 - \frac{a}{2}\right) = \left(t - \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right), \quad \overrightarrow{DQ} = \left(0 - \frac{a}{2}, a - t - \frac{a}{2}\right) = \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2} - t\right).$$

$$\overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{DQ} = \left(t - \frac{a}{2}\right) \times \left(-\frac{a}{2}\right) + \left(-\frac{a}{2}\right) \times \left(\frac{a}{2} - t\right) = 0.$$

由于点积为 0, 所以 $\overrightarrow{DP} \perp \overrightarrow{DQ}$, 即 $\angle PDQ = 90^\circ$ 。

又

$$|\overrightarrow{DP}|^2 = \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{a}{2}\right)^2 = t^2 - at + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = t^2 - at + \frac{a^2}{2},$$

$$|\overrightarrow{DQ}|^2 = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - t\right)^2 = \frac{a^2}{4} + t^2 - at + \frac{a^2}{4} = t^2 - at + \frac{a^2}{2}.$$

所以 $|\overrightarrow{DP}|^2 = |\overrightarrow{DQ}|^2$, 即 $|\overrightarrow{DP}| = |\overrightarrow{DQ}|$, 也就是 $DP = DQ$ 。

综上, $\triangle PDQ$ 是等腰直角三角形。

剖析:

向量坐标法的核心要点是选择基向量(如 AB, AC), 用向量表示所有点。计算向量 DP 与 DQ 的点积为零证明垂直, 计算它们的模长相等证明边相等, 应用了向量的线性运算(加法、数乘), 向量的点积(数量积)及其性质(垂直的充要条件), 向量的模长等知识[3]。主要体现了向量基底思想与代数化思想。

解法 3: 勾股定理法

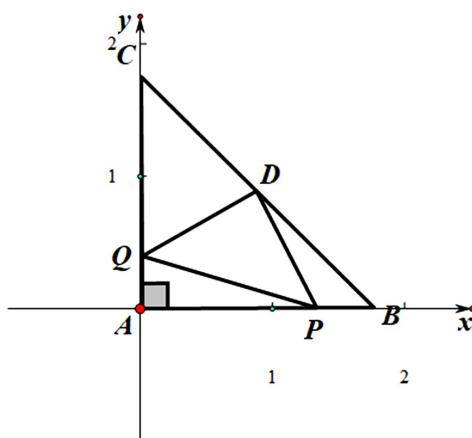


Figure 4. Coordinate system diagram of Pythagorean theorem method
图 4. 勾股定理法坐标系示意图

建立坐标系：以点 A 为原点， AB 为 x 轴， AC 为 y 轴，如图 4。

$$A(0,0), B(a,0), C(0,a), D = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right), P(t,0), Q(0, a-t).$$

$$DP^2 = t^2 - at + \frac{a^2}{2}, DQ^2 = t^2 - at + \frac{a^2}{2}, PQ^2 = (t-0)^2 + (0-(a-t))^2 = 2t^2 - 2at + a^2.$$

根据勾股定理的逆定理，如果一个三角形两边的平方和等于第三边的平方，那么这个三角形是直角三角形，且第三边所对的角是直角。

所以 $DP = DQ$ ， $DP^2 + DQ^2 = PQ^2$ 。

综上， $\triangle PDQ$ 是等腰直角三角形。

剖析：

勾股定理法的核心要点是分别计算出 DP^2 ， DQ^2 ， PQ^2 的代数表达式，先证 $DP^2 = DQ^2$ 得边相等，再证 $DP^2 + DQ^2 = PQ^2$ ，利用勾股定理逆定理判定 $\angle PDQ = 90^\circ$ [4]。应用了两点间距离公式，勾股定理及其逆定理，代数式的运算等知识。主要体现了代数验证思想。

解法 4：几何斜率法

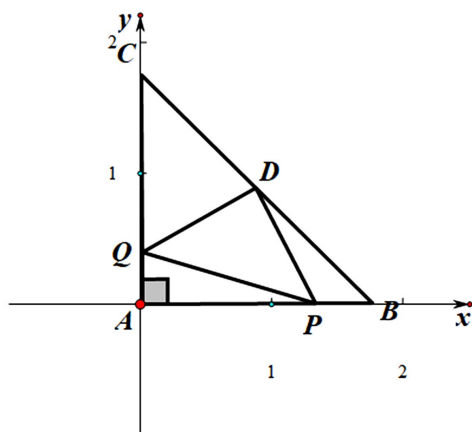


Figure 5. Coordinate system diagram of geometric slope method
图 5. 几何斜率法坐标系示意图

建立坐标系: 以点 A 为原点, AB 为 x 轴, AC 为 y 轴, 如图 5。

$$A(0,0), B(a,0), C(0,a), D=\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right), P(t,0), Q(0,a-t)。$$

$$DP^2 = t^2 - at + \frac{a^2}{2}, DQ^2 = t^2 - at + \frac{a^2}{2}。$$

所以 $DP = DQ$ 。

$$DP \text{ 斜率 } m_1 = \frac{0 - \frac{a}{2}}{t - \frac{a}{2}} = \frac{-\frac{a}{2}}{t - \frac{a}{2}}, DQ \text{ 斜率 } m_2 = \frac{a - t - \frac{a}{2}}{0 - \frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2} - t}{-\frac{a}{2}}。$$

$$\text{得 } m_1 m_2 = \frac{-\frac{a}{2}}{t - \frac{a}{2}} \cdot \frac{\frac{a}{2} - t}{-\frac{a}{2}} = -1。$$

所以 $DP \perp DQ$ 。

综上, $\triangle PDQ$ 是等腰直角三角形。

剖析:

几何斜率法的核心要点是建立平面直角坐标系, 设定各点坐标, 通过距离公式证明 $DP = DQ$, 由斜率证明 $DP \perp DQ$, 应用了点的坐标表示, 斜率乘积判定垂直等知识[5]。主要体现了数形结合思想与参数思想。

5. 万流归宗

为进一步揭示不同解法的思维差异与应用价值, 我们从计算复杂度、思维创新性、对先备知识的要求、可推广性四个维度, 对上述四种解法进行横向对比与评述, 结果见表 1。

Table 1. Multi-dimensional comparison of four solutions

表 1. 四种解法多维度对比

解法类型	计算复杂度	思维创新性	先备知识要求	可推广性	适用场景
经典全等法	低(无代数运算, 仅几何推理)	高(需构造辅助线, 挖掘图形全等关系)	中(需熟练掌握等腰直角三角形性质、全等三角形判定)	中(依赖特殊图形的对称结构, 对一般三角形动点问题适用性有限)	课堂教学、概念理解(适合初中阶段, 直观易懂, 能体现几何本质)
坐标向量法	中(需计算向量点积与模长, 代数运算量中等)	中(依赖坐标系建立与向量工具的直接应用, 思路固定)	高(需掌握平面向量的线性运算、数量积性质)	高(可推广至任意几何图形的垂直、相等问题, 不依赖图形特殊性)	竞赛解题、高中衔接教学(体现代数与几何的融合, 适合有向量基础的学生)
勾股定理法	中(需计算线段平方表达式, 代数运算量中等)	低(通过两点间距离公式转化为代数验证, 思路直接)	中(需掌握勾股定理逆定理、两点间距离公式)	高(可推广至任意三角形的垂直判定, 通用性强)	课堂练习、基础代数训练(适合初中阶段, 降低几何推理难度, 强化代数运算能力)
几何斜率法	中(需计算直线斜率与乘积, 代数运算量中等)	中(依赖坐标系建立与斜率垂直判定规则)	中(需掌握平面直角坐标系、斜率公式及垂直判定条件)	高(可推广至任意两条直线的垂直问题, 通用性强)	解析几何入门教学、基础数形结合训练(适合初中高年级, 为高中解析几何铺垫)

从表 1 对比结果来看:

(1) 计算复杂度: 经典全等法最低, 无需复杂代数运算; 其余三种基于坐标系的解法计算量相近, 均需进行多项式运算与化简。

(2) 思维创新性: 经典全等法最高, 需要学生主动挖掘图形中的全等关系, 构造辅助线, 最能体现几何思维的灵活性; 其余三种方法的思路相对固定, 属于“通法通解”, 创新性较弱。

(3) 对先备知识的要求: 坐标向量法最高, 需要学生掌握高中阶段的向量知识, 对初中阶段学生不够友好; 经典全等法、勾股定理法、几何斜率法均以初中数学知识为基础, 适配性更强。

(4) 可推广性: 三种基于坐标系的解法(坐标向量法、勾股定理法、几何斜率法)均不依赖等腰直角三角形的特殊结构, 可直接推广至任意几何图形的动点问题, 通用性强; 经典全等法依赖图形的对称与全等结构, 仅适用于特定类型的题目, 可推广性有限。

(5) 在实际教学与解题中, 不同解法各有优势: 课堂教学中, 可优先采用经典全等法, 帮助学生理解几何问题的本质, 培养直观想象与逻辑推理能力; 对于基础薄弱的学生, 可采用勾股定理法或几何斜率法, 通过代数运算降低几何推理的难度; 对于学有余力的学生, 可引入坐标向量法, 拓展其数学视野, 感受代数工具的强大通用性。

这类动点问题的本质是利用等速运动产生的对称路径, 构造出恒等的几何关系, 核心是寻找运动中的不变量, 在动态问题中寻找不变关系, 体现不变量思想; 为了将动态问题转化为静态问题, 引入时间参数 t , 体现参数思想; 题中由等腰直角三角形斜边中点形成的旋转全等结构, 使得某两条线段始终相等, 利用坐标将几何问题转化为代数问题, 从而通过计算证明结论, 体现数形结合思想。这正是“解法有异, 思维无界”的真正含义——数学学习的精髓, 不在于背诵公式与套路, 而在于多角度思考、自由探索与融会贯通能力的培养。

参考文献

- [1] 魏素林. 初中数学动点问题类型分类与解题策略[J]. 数理天地(初中版), 2025(14): 14-15.
- [2] 段维成. 初中数学全等三角形解题方法分析[J]. 中学数学, 2025(18): 106-107.
- [3] 米雯雯. 基于问题驱动的平面向量课堂教学策略与实践研究[D]: [硕士学位论文]. 银川: 宁夏大学, 2023.
- [4] 徐瑞. 坐标法求解几何问题[J]. 初中数学教与学, 2025(13): 43-45.
- [5] 赵栋. 炼思维, 优算法——解析几何斜率谈[J]. 新世纪智能, 2024(94): 21-24.