Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2026, 15(5), 600-611**
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.155254

Hans汉斯

基于一般随机波动跳扩散过程的几类多变量交换期权定价及创新研究

王立斌，赵 月

河北金融学院统计与数据科学学院，河北 保定

收稿日期：2026年4月27日；录用日期：2026年5月22日；发布日期：2026年5月29日

摘 要

本文重点讨论了某种一般随机波动跳扩散过程下几类多变量交换期权的解析定价问题。首先，金融市场的状态转换特征，设计了具有体制转换特征的一般随机波动跳扩散模型用以描述资产价格的演变机制，主要刻画资产收益率间的联合波动和联合跳跃的综合特征。其次，为了解析定价的需要，构建所有相关随机因素的特征函数，并通过一系列的定理准备工作，最终获得特征函数的解析表达式。再次，运用风险中性定价原理，推导六类多变量交换期权的积分定价公式。最后，应用上述公式，构建了交叉KMV模型并进行金融市场风险分析。实验结果表明，本文所提供的理论能够有效地、稳定地解决多变量交换期权的定价问题及金融市场的风险分析问题。

关键词

随机波动跳扩散过程，体制转换，多变量交换期权，特征函数，交叉KMV

Pricing and Innovative Research on Multivariate Exchange Options Based on General Stochastic Volatility Jump-Diffusion Processes

Libin Wang, Yue Zhao

School of Statistics and Data Science, Hebei Finance University, Baoding Hebei

Received: April 27, 2026; accepted: May 22, 2026; published: May 29, 2026

文章引用: 王立斌, 赵月. 基于一般随机波动跳扩散过程的几类多变量交换期权定价及创新研究[J]. 应用数学进展, 2026, 15(5): 600-611. DOI: 10.12677/aam.2026.155254

Abstract

This paper mainly discusses the analytical pricing issues of several types of multivariate exchange options under a certain general stochastic volatility jump-diffusion process. Firstly, based on the state transition characteristics of the financial market, a general stochastic volatility jump-diffusion model with regime-switching features is designed to describe the evolution mechanism of asset prices, mainly depicting the combined characteristics of joint volatility and joint jumps among asset returns. Secondly, to meet the requirements of analytical pricing, the characteristic functions of all relevant stochastic factors are constructed, and through a series of preparatory theorems, the analytical expression of the characteristic function is finally obtained. Thirdly, by applying the risk-neutral pricing principle, the integral pricing formulas for six types of multivariate exchange options are derived. Finally, the cross-KMV model is constructed using the above formulas and applied to financial market risk analysis. The experimental results show that the theory provided in this paper can effectively and stably solve the pricing problems of multivariate exchange options and the risk analysis of financial markets.

Keywords

Random Fluctuation Jump Diffusion Process, Institutional Transformation, Multivariate Swap Option, Characteristic Function, Cross KMV

1. 引言

金融衍生品是经济市场的重要润滑剂，发挥着转移经济风险、降低经济摩擦、缓解经济压力、改善经济结构及调节经济资源等重要作用。随着全球金融市场的快速发展，作为金融衍生品的代表，期权种类不断涌现。然而，面对期权市场蓬勃发展的趋势，难以回避的问题就是如何科学准确地定价和规范严谨地设计。一旦定价机制失衡，金融市场就会出现套利机会，金融风险便会随之溢出。因此，运用严密的数学方法，在更加贴近金融市场的场景下，研究细致精准的期权定价方法和灵活创新的期权设计思路是一件具有理论意义而又富有实践价值的工作。由此，本项目力图在更宽松的框架和更真实的情景下(如随机波动率、机制转换、随机利率、随机跳跃)研究复杂期权的定价理论和设计思路。一方面，标的资产的价格机制描述一直是学术界和实务界的讨论主题。但是基于之前的系列研究成果还不足以细致描述真实市场价值变化的所有特性。同时，复杂期权的创新是迈向复杂衍生品的重要桥梁。另一方面，复杂期权定价方法更为困难，需要根据期权的具体类型进行分析和论证，故综合多种方法于一体的复杂期权定价方法尚需进一步研究和总结。

继 Black、Scholes 和 Merton [1] [2]的开创性工作，期权定价研究毋庸置疑已经成为金融数学的一个重要研究领域。Stulz [3]首先调查了基于两标的资产的最值期权定价问题。此后，Johnson [4]进一步研究了多种资产的最值期权的定价方法。Cherubini 和 Luciano [5]系统地研究了常见的双变量期权，由于其交易灵活性、收益可变性和内部风险对冲，被视为量化投资和风险管理的优秀工具。然而，上述学者的研究都是基于标的资产价格机制的理想假设，即基础资产服从几何布朗运动。为了改进期权定价的效果，一方面，Merton 将复合泊松过程嵌入到几何布朗运动中，构建了跳扩散模型来模拟资产价格，其通过随

机跳跃来描述罕见事件对资产价格的突发影响；另一方面，Heston [6]通过将常数波动率替换为以均值回归的根式过程驱动的随机波动率，建立了经典的 Heston 模型，用以刻画波动率的细峰性、厚尾性和微笑特征。在 Merton 和 Heston 的基础上，大量文献表明，跳扩散和 Heston 模型的扩展和改进形式可以部分解释现实金融市场中价格数据的各种特征。值得一提的是在 2008 年全球金融危机之后，Klein [7]提出应该将信用风险作为纳入金融衍生品定价的框架。

多变量期权定价的关键决定因素之一是基础证券、或者指数之间的价格机制。Duffie 与 Pan [8]运用建立仿射方程方法，获得了基于双模型(Heston 模型 + 跳扩散模型)的单变量欧式期权价格的解析解。在方差和波动率互换衍生品的定价研究中，Elliott 和 Lian [9]首次假设长期波动率存在机制转换特征，并通过连续时间的马尔可夫链来描述这一特征，最后通过向量鞅方法证明了体制转换的积分期望。Xie [10]提出了三模型(Heston 模型 + 跳扩散 + 随机强度)的标的资产价格动态机制，并通过快速傅里叶变换(FFT)得到了标准欧式期权的近似解。Lyu [11]在跳扩散过程中加入了随机利率，进一步丰富了以 Heston 模型为核心的研究场景。多变量期权定价的另一个关键决定因素是定价方法的选择。首先，众所周知，最经典的定价方法是基于测度变换的概率计算方法。在最近的研究中，Zhou 和 Wang 分别研究了脆弱期权的扩展结构，并通过上述方法得到了期权的解析解。然而，在上述方法下，标的资产的价格机制往往无法超越常数波动率与跳扩散过程两个基本假设。期权定价的第二个有效方法是将积分变换与偏微分方程(PDE)相结合。应用单、双梅林变换方法，Yoon [12] [13]研究了随机利率下的欧式期权和脆弱期权，验证了该方法的可行性。考虑到 Mellin 变换的严格条件，另一种积分变换是联合特征函数法或傅立叶变换。Carr 与 Madan [14]推导了标的资产对数价格的特征函数，首次用快速傅里叶变换得到了欧式期权的近似解。Zhang 和 Wang [15]应用类似方法推导了利率随机情况下欧式期权的近似定价表达式。进一步地，Lin [16]在具有体制转换特性的 Heston 模型下，通过建立贴现特征函数分别研究了远期期权定价问题。He [17]通过区制转换 Esscher 变换构造风险中性测度和特征函数，推导出市场受到流动性风险影响时脆弱期权的封闭公式。Lee [18]在 Heston 随机波动率模型下进一步推导出了脆弱期权的准确定价公式，并具体探讨了波动率对该期权的驱动机制。

借鉴上述文献的研究基础，本文以一般随机波动跳扩散模型为基础，讨论在具有体制转换的情况下一系列多变量交换期权的定价理论与应用创新思路。在价格机制方面，根据当前金融市场的实证研究成果[19]-[21]，构建更加贴近真实市场的标的资产价格演变机制，即具有体制转换机制的随机波动跳扩散模型，进一步加深对于现实金融市场的变化规律刻画。应用上述公式，基于传统的 KMV 模型[22] [23]，构建了交叉 KMV 模型并进行金融市场风险分析。在数值实验方面，验证本文所提供的理论对解决多变量交换期权的定价问题及金融市场的风险分析的有效性与稳定性。

2. 理论模型及主要结果

在本小节中，我们将给出体制转换特征的一般随机波动率模型的构造方法。

2.1. 金融市场价格机制

假设在金融市场中，许多风险标的股票或指数 s_{it_j} 的内在价值过程 S_{it_j} 服从如下随机微分方程系统：

$$\frac{\mathrm{d}S_{it}}{S_{it}} = r_t\mathrm{d}t + \sqrt{v_{0t}}\mathrm{d}W_{it}^{(c)} + \sqrt{v_{it}}\mathrm{d}W_{it}^{(e)}, \tag{1}$$

$$\mathrm{d}v_{0t} = \kappa_0\left(\langle \mu_0, X_t\rangle - v_{0t}\right)\mathrm{d}t + \sqrt{v_{0t}}\mathrm{d}W_t^{(v)}, \tag{2}$$

$$\mathrm{d}v_{it} = \kappa_i\left(\mu_i - v_{it}\right)\mathrm{d}t + \sqrt{v_{it}}\mathrm{d}W_{it}^{(v)}。 \tag{3}$$

在资产价格的连续点处，资产价格服从上述随机波动过程；在资产价格的跳跃点处，资产价格服从复合泊松过程，$N_0(t)$，$N_i(t)$ 是相互独立的强度分别为 λ_0，λ_i 的泊松过程；$S_i(t)$ 跳跃的平均幅度 $m_i = E\left[\mathrm{e}^{J_i}-1\right] = E\left[\mathrm{e}^{J_i}\right]-1$。

货币市场中的瞬时利率过程：

$$\mathrm{d}r_t = \kappa_r\left(\langle \mu_r, X_t\rangle - r_t\right)\mathrm{d}t + \sqrt{r_t}\,\mathrm{d}W_t^{(r)}。 \tag{4}$$

相应的债券所服从的过程：

$$\mathrm{d}B(t,T) = r_t B(t,T)\,\mathrm{d}t。 \tag{5}$$

同时，设信息流由上述多维布朗运动生成。在风险中性概率测度下，考虑一个连续时间有限状态可观测马尔可夫链 $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ 来刻画金融市场的宏观状态的变换，其定义为：

$$X_t = X_0 + \int_0^t Q\cdot X_s\,\mathrm{d}s + M_t， \tag{6}$$

用于表示具有不同经济因素的各种市场趋势 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_N\}$，其中 $e_i=(0,\cdots,1,\cdots,0)\in R^N$。矩阵 $Q=(q_{ij})$ 是 $X_t\in S$ 的 $N\times N$ 转移率矩阵，其中 q_{ij} 表示市场从状态 e_i 到状态 e_j 的转移强度。这里，$\{M_t\}$ 是相对于信息流的向量鞅。

2.2. 多变量交换期权定价模型

为了进一步应用风险中性定价原理的核心思想，细致对冲金融市场的各种各样的系统风险，下面将给出六种相关的交换期权。令 $\bar{S}_{it}=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}S_{it}}$，第一种传统型交换期权，其收益函数为 $H_1(T)=\left(S_{iT}-S_{jT}\right)^+$。第二种货币－指数型交换期权，其收益函数为 $H_2(T)=\left(S_{iT}-S_{it}\mathrm{e}^{\int_t^T r_s\mathrm{d}s}\right)^+$。第三种几何平均型交换期权，其收益函数为 $H_3(T)=\left(S_{iT}-\bar{S}_{it}\right)^+$。第四种货币－几何平均型交换期权，其收益函数为 $H_4(T)=\left(\bar{S}_{iT}-\bar{S}_{it}\mathrm{e}^{\int_t^T r_s\mathrm{d}s}\right)^+$。第五种现金－几何平均型交换期权，其收益函数为 $H_4(T)=\left(\bar{S}_{iT}-K\right)^+$。第六种现金－指数型交换期权，其收益函数为 $H_4(T)=\left(S_{iT}-K\right)^+$。

下面为了期权定价的方便，首先进行符号的系统描述和刻画。定义所有资产的对数收益率向量为 $x_t=\left(\ln S_{1t},\ln S_{2t},\cdots,\ln S_{nt},\ln B(t,T)\right)$，所有资产的收益波动率向量为 $v_t=\left(v_{0t},v_{1t},\cdots,v_{nt}\right)$，所有资产对数收益的初始值向量为 $x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1}\right)$，所有资产对数收益的波动率初始值向量为 $v=\left(v_0,v_1,\cdots,v_n\right)$，$u=\left(u_1,u_2,\cdots,u_n,u_{n+1}\right)$。

考虑到期权定价需要用到傅里叶变换或特征函数的关系，故首先定义本文金融模型所有相关的随机因子的特征函数为

$$\varphi(u;t,T;x,v,r;X_t) = E\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s+iu\cdot x_T}\,\middle|\,x_t=x,v_t=v,r_t=r;X_t\right]， \tag{7}$$

其次，根据条件期望的时间积累性质，可得在金融市场所有状态 x_T 已知条件下的本文金融模型所有相关的随机因子的特征函数为

$$\varphi(u;t,T;x,v,r;X_T) = E\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s+iu\cdot x_T}\,\middle|\,x_t=x,v_t=v,r_t=r;X_T\right]； \tag{8}$$

最后，由风险中性定价原理可得所有类型交换期权的定价公式为

$$P_i\left(t,T;x,v,r;X_t\right)=E\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s}\cdot H_i\left(T\right)\middle|x_t=x,v_t=v,r_t=r;X_t\right]；\tag{9}$$

定理 2.1 假设关键指数的内在价值过程服从上述机制(1)~(6)，则所有类型多变量交换期权均具有如下表达式

$$P_i\left(t,T;x,v,r;X_t\right)=A_i\Phi_i\left(t,T;x,v,r;X_t\right)-B_i\Psi_i\left(t,T;x,v,r;X_t\right),\tag{10}$$

其中 $A_1=A_2=A_3=A_6=B_2=S_{it}=\mathrm{e}^{x_i}$， $A_4=A_5=B_3=B_4=B_2=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n S_{it}}=\mathrm{e}^{\bar{x}}$， $B_1=S_{jt}=\mathrm{e}^{x_j}$，

$B_5=B_6=KB\left(t,T\right)$； $\Phi_1\left(t,T;x,v,r;X_t\right)=D\left(0,\varphi^{P_i}\left(u_1\cdot\left(e_i-e_j\right)\right)\right)$，

$\Psi_1\left(t,T;x,v,r;X_t\right)=D\left(0,\varphi^{P_j}\left(u_1\cdot\left(e_i-e_j\right)\right)\right)$； $\Phi_2\left(t,T;x,v,r;X_t\right)=D\left(x_i,\varphi^{P_i}\left(u_1\cdot\left(e_i-e_{n+1}\right)\right)\right)$，

$\Psi_2\left(t,T;x,v,r;X_t\right)=D\left(x_i,\varphi\left(u_1\cdot\left(e_i-e_{n+1}\right)-i\cdot e_{n+1}\right)\right)$； $\Phi_3\left(t,T;x,v,r;X_t\right)=D\left(0,\varphi^{P_i}\left(e_i-\frac{u_1}{n}\sum_{i=1}^n e_i\right)\right)$，

$\Psi_3\left(t,T;x,v,r;X_t\right)=D\left(0,\varphi^{\bar{P}}\left(e_i-\frac{u_1}{n}\sum_{i=1}^n e_i\right)\right)$；

$\Phi_4\left(t,T;x,v,r;X_t\right)=D\left(\bar{x},\varphi^{\bar{P}}\left(u_1\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e_i-e_{n+1}\right)\right)\right)$，

$\Psi_4\left(t,T;x,v,r;X_t\right)=D\left(\bar{x},\varphi\left(u_1\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e_i-e_{n+1}\right)-i\cdot e_{n+1}\right)\right)$； $\Phi_5\left(t,T;x,v,r;X_t\right)=D\left(\ln K,\varphi^{\bar{P}}\left(\frac{u_1}{n}\sum_{i=1}^n e_i\right)\right)$，

$\Psi_5\left(t,T;x,v,r;X_t\right)=D\left(\ln K,\varphi^{P_0}\left(\frac{u_1}{n}\sum_{i=1}^n e_i\right)\right)$； $\Phi_6\left(t,T;x,v,r;X_t\right)=D\left(\ln K,\varphi^{P_i}\left(u_1e_i\right)\right)$，

$\Psi_6\left(t,T;x,v,r;X_t\right)=D\left(\ln K,\varphi^{P_0}\left(u_1e_i\right)\right)$。

同时， $\varphi^{P_0}\left(u\right)=\dfrac{\varphi\left(u-ie_{n+1},t,T;x,v,r;X_t\right)}{\varphi\left(-ie_{n+1},t,T;x,v,r;X_t\right)}$， $\varphi^{P_i}\left(u\right)=\dfrac{\varphi\left(u-ie_i,t,T;x,v,r;X_t\right)}{\varphi\left(-ie_i,t,T;x,v,r;X_t\right)}$，

$\varphi^{P_j}\left(u\right)=\dfrac{\varphi\left(u-ie_j,t,T;x,v,r;X_t\right)}{\varphi\left(-ie_j,t,T;x,v,r;X_t\right)}$， $\varphi^{\bar{P}}\left(u\right)=\dfrac{\varphi\left(u-\frac{i}{n}\sum_{i=1}^n e_i,t,T;x,v,r;X_t\right)}{\varphi\left(-\frac{i}{n}\sum_{i=1}^n e_i,t,T;x,v,r;X_t\right)}$；

$D\left(a,f\left(u_1\right)\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{Re}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-iu_1a}f\left(u_1\right)}{iu_1}\right)\mathrm{d}u_1$。

证 情形 1. 根据第一型交换期权的收益函数，则有

$$\begin{aligned}P_1\left(t,T;x,v,r;X_t\right)&=E\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s}H_1\left(T\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]\\&=E\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s}S_{iT}1_{\{S_{iT}\ge S_{jT}\}}\middle|\mathcal{F}_t\right]-E\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s}S_{jT}1_{\{S_{iT}\ge S_{jT}\}}\middle|\mathcal{F}_t\right],\end{aligned}$$

为了进一步计算，需要定义风险中性测度的新的等价鞅测度 P_i,P_j，由

$$\frac{\partial P_i}{\partial Q}=\frac{\mathrm{e}^{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s}S_{iT}}{S_{it}},\quad \frac{\partial P_j}{\partial Q}=\frac{\mathrm{e}^{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s}S_{jT}}{S_{jt}},$$

同时，给出新的概率测度 P_i 下的联合特征函数

$$\varphi^{P_i}(u)=E^{P_i}\left[\mathrm{e}^{iu\cdot x_T}\,|\mathcal{F}_t\right]=E\left[\frac{\mathrm{e}^{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s}S_{iT}}{S_{it}}\mathrm{e}^{iu\cdot x_T}\,|\mathcal{F}_t\right]=\frac{\varphi(u-ie_i,t,T;x,v,r;X_t)}{\varphi(-ie_i,t,T;x,v,r;X_t)},$$

同理，$\varphi^{P_j}(u)=\dfrac{\varphi(u-ie_j,t,T;x,v,r;X_t)}{\varphi(-ie_j,t,T;x,v,r;X_t)}$。

进一步，借鉴文献[24]的特征函数公式，利用特征函数与概率的关系或傅里叶反变换，得到最终的结果

$$\begin{aligned}&P_1(t,T;x,v,r;X_t)\\&=s_iE^{P_i}\left[1_{\{x_{iT}\ge x_{jT}\}}\,|\,\mathcal{F}_t\right]-s_jE^{P_j}\left[1_{\{x_{iT}\ge x_{jT}\}}\,|\,\mathcal{F}_t\right]\\&=\mathrm{e}^{x_i}P_i\left\{x_{iT}\ge x_{jT}\,|\,\mathcal{F}_t\right\}-\mathrm{e}^{x_j}P_j\left\{x_{iT}\ge x_{jT}\,|\,\mathcal{F}_t\right\}\\&=\mathrm{e}^{x_i}D\left(0,\varphi^{P_i}\left(u_1\cdot(e_i-e_j)\right)\right)-e^{x_j}D\left(0,\varphi^{P_j}\left(u_1\cdot(e_i-e_j)\right)\right)\\&=A_1\Phi_1(t,T;x,v,r;X_t)-B_1\Psi_1(t,T;x,v,r;X_t)\end{aligned}。$$

情形 2、3、4、5、6，可以类似推导得到。定理证明完成。

2.3. 交叉 KMV 模型

将多变量期权的定价结果，应用于传统的 KMV 模型，产生交叉 KMV 模型。主要构建思路是应用几何平均多变量交换期权刻画整体金融市场的风险演变机制，应用其他类型多变量交换期权刻画局部金融市场的风险演化特性，平均与非平均的结构保证了交叉 KMV 模型的系统性和特殊性相结合。

第一，构建整体的 KMV 模型。整体 KMV 模型(现金型)

$$\overline{s}_{it}=A_5\Phi_5(t,T;x,v,r;X_t)-B_5\Psi_5(t,T;x,v,r;X_t),$$
$$\overline{\sigma}_t\overline{s}_{it}=\frac{\partial\overline{s}_{it}}{\partial\overline{S}_{it}}\sqrt{v_{0t}}\,\overline{S}_{it}=\Phi_5(t,T;x,v,r;X_t)\sqrt{v_{0t}}\,\overline{S}_{it}.$$

第二，构建个体的 KMV 模型。主要包含多种类型。第一型个体 KMV 模型(货币市场型)

$$s_{it}=A_2\Phi_2(t,T;x,v,r;X_t)-B_2\Psi_2(t,T;x,v,r;X_t),i=1,\cdots,n,$$
$$\sqrt{\overline{\sigma}_t^2+\sigma_{it}^2}\,s_{it}=\frac{\partial s_{it}}{\partial S_{it}}\sqrt{v_{0t}+v_{it}}\,S_{it}=\Phi_2(t,T;x,v,r;X_t)\sqrt{v_{0t}+v_{it}}\,S_{it},i=1,\cdots,n;$$

第二型个体 KMV 模型(平均市场型)

$$s_{it}=A_3\Phi_3(t,T;x,v,r;X_t)-B_3\Psi_3(t,T;x,v,r;X_t),i=1,\cdots,n,$$
$$\sqrt{\overline{\sigma}_t^2+\sigma_{it}^2}\,s_{it}=\frac{\partial s_{it}}{\partial S_{it}}\sqrt{v_{0t}+v_{it}}\,S_{it}=\Phi_3(t,T;x,v,r;X_t)\sqrt{v_{0t}+v_{it}}\,S_{it},i=1,\cdots,n;$$

第三型个体 KMV 模型(现金市场型)

$$s_{it}=A_6\Phi_6(t,T;x,v,r;X_t)-B_6\Psi_6(t,T;x,v,r;X_t),i=1,\cdots,n,$$
$$\sqrt{\overline{\sigma}_t^2+\sigma_{it}^2}\,s_{it}=\frac{\partial s_{it}}{\partial S_{it}}\sqrt{v_{0t}+v_{it}}\,S_{it}=\Phi_6(t,T;x,v,r;X_t)\sqrt{v_{0t}+v_{it}}\,S_{it},i=1,\cdots,n;$$

第三，计算金融风险的发生概率 EDF 与发生距离 DD。首先，设定金融风险发生深度参数 θ $(0<\theta<1)$。其次，根据关键指数内在价值的几何布朗运动设定及不同状态下的长期波动率的转换机制，故系统内在价值具有如下运动机制

$$\overline{S}_{iT}=\overline{S}_{it}\exp\left\{\left(u_0-\frac{1}{2}(\mu_0+v_{0t})\right)(T-t)+\sqrt{(\mu_0+v_{0t})(T-t)}\cdot\overline{\varepsilon}\right\},$$

$$S_{iT}=S_{it}\exp\left\{\left(u_0+u_i-\frac{1}{2}(\mu_0+\mu_i+v_{0t}+v_{it})\right)(T-t)+\sqrt{(\mu_0+\mu_i+v_{0t}+v_{it})(T-t)}\cdot\varepsilon_i\right\},$$

其中 $\overline{\varepsilon}$ 与 ε_i 均服从标准正态分布。进一步，应用全概率公式，假设 $X_t=e_i$ 时，计算

$$\begin{aligned}
\overline{EDF}(\theta)&=P\left\{\overline{S}_{iT}\le\overline{S}_{it}\exp\left\{\theta\cdot\mu_r(T-t)\right\}\right\}\\
&=P\left\{\overline{S}_{it}\exp\left\{\left(u_0-\frac{1}{2}(\mu_0+v_{0t})\right)(T-t)+\sqrt{(\mu_0+v_{0t})(T-t)}\cdot\overline{\varepsilon}\right\}\le\overline{S}_{it}\exp\left\{\theta\cdot\mu_r(T-t)\right\}\right\}\\
&=P\left\{\overline{\varepsilon}\le-\frac{\left(u_0-\frac{1}{2}(\mu_0+v_{0t})\right)(T-t)-\theta\cdot\mu_r(T-t)}{\sqrt{(\mu_0+v_{0t})(T-t)}}\right\}\\
&=\sum_{j=1}^{N}P\left\{X_T=e_j\,|\,X_t=e_i\right\}P\left\{\overline{\varepsilon}\le-\frac{\left(u_0^{(j)}-\frac{1}{2}\left(\mu_0^{(j)}+v_{0t}\right)\right)(T-t)-\theta\cdot\mu_r^{(j)}(T-t)}{\sqrt{\left(\mu_0^{(j)}+v_{0t}\right)(T-t)}}\right\}\\
&=\sum_{j=1}^{N}e_i^T\cdot\exp\left\{Q\cdot(T-t)\right\}\cdot e_j\Phi_0\left(-\frac{\left(u_0^{(j)}-\frac{1}{2}\left(\mu_0^{(j)}+v_{0t}\right)\right)(T-t)-\theta\cdot\mu_r^{(j)}(T-t)}{\sqrt{\left(\mu_0^{(j)}+v_{0t}\right)(T-t)}}\right)\\
&=\Phi_0\left(-\overline{DD}\right);
\end{aligned}$$

同理，可得

$$\begin{aligned}
EDF_i(\theta)&=P\left\{S_{iT}\le S_{it}\exp\left\{\theta\cdot\mu_r(T-t)\right\}\right\}\\
&=P\left\{\varepsilon_i\le-\frac{\left(u_0+u_i-\frac{1}{2}(\mu_0+\mu_i+v_{0t}+v_{it})\right)(T-t)-\theta\cdot\mu_r(T-t)}{\sqrt{(\mu_0+\mu_i+v_{0t}+v_{it})(T-t)}}\right\}\\
&=\sum_{j=1}^{N}P\left\{X_T=e_j\,|\,X_t=e_i\right\}P\left\{\varepsilon_i\le-\frac{\left(u_0^{(j)}+u_i-\frac{1}{2}\left(\mu_0^{(j)}+\mu_i+v_{0t}+v_{it}\right)\right)(T-t)-\theta\cdot\mu_r^{(j)}(T-t)}{\sqrt{\left(\mu_0^{(j)}+\mu_i+v_{0t}+v_{it}\right)(T-t)}}\right\}\\
&=\sum_{j=1}^{N}e_i^T\cdot\exp\left\{Q\cdot(T-t)\right\}\cdot e_j\Phi_0\left(-\frac{\left(u_0+u_i-\frac{1}{2}(\mu_0+\mu_i+v_{0t}+v_{it})\right)(T-t)-\theta\cdot\mu_r(T-t)}{\sqrt{(\mu_0+\mu_i+v_{0t}+v_{it})(T-t)}}\right)\\
&=\Phi_0\left(-DD_i\right),i=1,2,\cdots,m.
\end{aligned}$$

3. 参数估计方法

步骤 1. 计算 n 个金融市场关键指数的几何平均收益率数据 $\overline{x}_{t_j}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{it_j}$；

步骤 2. 对 $\left\{\overline{x}_{t_j}\right\}_{1\le j\le m}$ 进行标准化。令 $z_{t_j}=\dfrac{\overline{x}_{t_j}-mean\left(\overline{x}_{t_j}\right)}{std\left(\overline{x}_{t_j}\right)}$，其中 $mean\left(\overline{x}_{t_j}\right)$ 为 $\overline{x}_{t_j}$ 的样本平均值，$std\left(\overline{x}_{t_j}\right)$ 为 $\overline{x}_{t_j}$ 的样本标准差。

步骤 3. 对 $\left\{\overline{x}_{t_j}\right\}_{1\le j\le m}$ 进行体制分解。在市场形势两状态(e_1 表示向好、e_2 表示向差)体制转换假设下，则

$$X_{t_j}=e_1\cdot 1_{\left\{z_{t_j}\ge 0\right\}}+e_2\cdot 1_{\left\{z_{t_j}<0\right\}};$$

在市场形势三状态(e_1 表示向好、e_2 表示适中、e_3 表示向差)体制转换假设下，则

$$X_{t_j}=e_1\cdot 1_{\left\{z_{t_j}\ge 0.43\right\}}+e_2\cdot 1_{\left\{-0.43\le z_{t_j}<0.43\right\}}+e_3\cdot 1_{\left\{z_{t_j}<-0.43\right\}};$$

在市场形势四状态(e_1 表示繁荣、e_2 表示衰退、e_3 表示复苏、e_4 表示萧条)体制转换假设下，则

$$X_{t_j}=e_1\cdot 1_{\left\{z_{t_j}\ge 0.675\right\}}+e_2\cdot 1_{\left\{0\le z_{t_j}<0.675\right\}}+e_3\cdot 1_{\left\{-0.675\le z_{t_j}<0\right\}}+e_4\cdot 1_{\left\{z_{t_j}<-0.675\right\}}。$$

步骤 4. 计算所有状态的频率用以估计马氏链 X_t 的转移概率矩阵 $q(\Delta T)$。经济形势通过 ΔT 时段由状态 e_i 转移至状态 e_j 的概率为

$$q_{ij}=\frac{\left|X_{t_k}=e_i,X_{t_{k+1}}=e_j,k=1,\cdots,m-1\right|}{\left|X_{t_k}=e_i,k=1,\cdots,m-1\right|},\quad \forall i,\forall j。$$

步骤 5. 进一步计算马氏链 X_t 的转移速率矩阵 $Q=\left(Q_{ij}\right)$。根据 $q(\Delta T)$ 与 Q 的关系 $q(\Delta T)=\exp\{Q\cdot\Delta T\}$，利用矩阵的相似对角化思想，存在特征矩阵 A 与对角矩阵 $\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots)$，使得

$$q(\Delta T)=A\Lambda A^{-1}=A\begin{pmatrix}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\ln\lambda_1)^n}{n!} & 0 & \cdots\\ 0 & \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\ln\lambda_2)^n}{n!} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}=E+A\Lambda_0A^{-1}+\frac{\left(A\Lambda_0A^{-1}\right)^2}{2!}+\cdots$$

其中 $\Lambda_0=diag(\ln\lambda_1,\ln\lambda_2,\cdots)$，并对照

$$\exp\{Q\cdot\Delta T\}=E+Q\cdot\Delta T+\frac{Q^2\cdot\Delta T^2}{2!}+\cdots,$$

最终整理可得转移速率矩阵的表达式为 $Q=\dfrac{1}{\Delta T}A\Lambda_0A^{-1}$。

4. 实证结果

本文的研究对象为具有体制转换的一般随机波动跳扩散模型下多变量交换期权的定价与金融风险分析，为保证结果的可信性与可参考性，本文选取了 IF300 数据进行对比分析，以此来得到更加精准的分析结论，验证本文所提供的理论和方法的有效性和可靠性。本文选取了 IF300 2024 年 1 月 1 日~2024 年 12 月 31 日，共一年的数据进行研究。样本选取还选取我国金融市场其他关键指数作为研究样本，计算各个指数的收益率、波动率等。为最大限度避免关键指数波动差异及收益规模对实证结论的干扰，选择关键指数与整体的金融市场具有相依性和贡献性，需要指出的所需数据来源于万德数据库。下面对本文的

参数进行逐步的估计和计算。

下面表 1 首先给出波动率模型的参数 η_0 的估计和方法。一方面，从标准误差上看，随着状态的划分深入，剩余误差在 3、4 状态上逐渐趋于稳定；另一方面，从残差的平方和上看，状态数量越多，残差变化越小，但是基于状态过多带来的过拟合性，本文接下来的研究主要基于 4 状态的体制转换机制。

Table 1. Parameter estimates on η_0

表1. η_0 **的参数估计**

η_0	e_1	e_2	e_3	e_4	残差平方和
$N=1$	−0.0001 (0.0056)				0.0653
$N=2$	0.0039 (0.002)	−0.0035 (0.0002)			0.0368
$N=3$	0.0065 (0.0003)	−0.0002 (0.0001)	−0.0057 (0.0001)		0.0250
$N=4$	0.0081 (0.0003)	0.0016 (0.0001)	−0.0016 (0.0001)	−0.0070 (0.0002)	0.0198

表 2 给出了不同体制转换状态下截距项与一阶自回归项的系数估计。从各个截距项的非负性可以看出，本模型未考虑的外生变量的综合效应是减弱波动率，即虽然区域金融市场会出现短期风险失衡，但整体金融市场存在着波动率风险控制机制。从一阶自回归项的系数的一致性可以发现，相邻波动率存在着高度的传染性，这促使波动率聚集效应的出现。另外，一阶项与截距项的绝对值呈现反比变化，这刻画了内生解释与外生解释的相互补充，相互依赖。表 3 给出了系统模型中滑动性分析，即波动率是否存在 MA 现象。通过卡方统计量分析，检验出原假设不存在滑动效应需要被拒绝，即存在着强烈的 MA 效应。基于 4 状态的体制转换机制，根据不同状态下滑动阶数的 AIC 与 BIC 信息标准，由信息标准的第一最小性，确定了各个状态的最佳模型为 MA(1)。

Table 2. Parameter estimates on β_0 and β_1

表2. β_0 **与** β_1 **的参数估计**

状态	4(1)	4(2)	4(3)	4(4)
β_0	−0.0191 (0.0056)	−0.1746 (0.0116)	−0.1369 (0.0113)	−0.0893 (0.0087)
β_1	0.9975 (0.0059)	0.9681 (0.0093)	0.9755 (0.0086)	0.9816 (0.0083)

Table 3. Parameter estimates on θ_1

表3. θ_1 **的参数估计**

状态	4(1)	4(2)	4(3)	4(4)
θ_1	−0.0121 (0.0042)	−0.0613 (0.0065)	0.0176 (0.0037)	−0.0282 (0.0045)
σ_v	0.0529	0.0767	0.0745	0.0674

按照波动率模型的建模与参数估计的类似思路，在无体制转换或 1 状态的情形下，对个体波动率模型进行建模和参数估计。对比系统模型，个体模型的一致性具有很大的差异性。由此，可见不同关键指数所在的金融市场均具有不同的波动率演变规律。从估计参数上看，表 4 表明系统市场具有其它所不同的长记忆性，IF500 具有相对较短的记忆性，但是具有较长的滑动，体现了滑动性与自回归性的相互影响，

DOI: 10.12677/aam.2026.155254

相互补充。另外，相较于系统模型，个体的估计方差相对较大，这表明了各个个体市场波动率的灵活性和多变性。

Table 4. Parameter estimates on η_{i0}
表4. η_{i0} 的参数估计

指数类型	IC500	IF300	IH50	IM1000
η_{i0}	0.0020	0.1360	0.1235	−0.2615
(10^{-4})	(0.0019)	(0.0018)	(0.0030)	(0.0031)

基于上述股票市场指数的波动率建模，下面应用本文所建立的交叉KMV模型，研究整体金融市场的风险发生距离(其他类型类似)。首先，通过整体KMV方程，表5求解样本内的平均市场内在价值与内在波动率，给出了通过Gibbs-MCMC计算的获得系统市场内在价值 $\overline{S}_{it}$ 与内在波动率 v_{0t}。其次，表6给出了4状态体制转换机制下长期回报率与长期波动率的数值解，可见较高和较低长期回报率往往会对应较高的波动率，换言之，市场内在价值一般不会长期停靠高回报或低回报，而是回归一般回报率。

Table 5. Numerical solutions of μ_r and μ_0
表5. μ_r 与 μ_0 的数值解

状态	4(1)	4(2)	4(3)	4(4)
μ_r	0.0136	0.0011	0.0004	−0.0155
μ_0	0.0047	0.0006	0.0007	0.0028

Table 6. Calculation of risk occurrence distance in the system market within the sample
表6. 样本内系统市场的风险发生距离计算

$(T-t,\theta)$	一个月	两个月	一季度	四个月	半年	8个月	三季度	10个月	全年
0.1	0.2174	0.3074	0.3763	0.4343	0.5314	0.6130	0.6499	0.6847	0.7494
0.2	0.1873	0.2647	0.3241	0.3741	0.4579	0.5283	0.5602	0.5903	0.6461
0.3	0.1571	0.2221	0.2719	0.3139	0.3843	0.4435	0.4702	0.4955	0.5425
0.4	0.1269	0.1794	0.2197	0.2537	0.3105	0.3584	0.3801	0.4006	0.4387
0.5	0.0967	0.1368	0.1675	0.1934	0.2367	0.2733	0.2898	0.3055	0.3345
0.6	0.0665	0.0941	0.1152	0.1330	0.1629	0.1880	0.1994	0.2102	0.2302
0.7	0.0363	0.0514	0.0629	0.0726	0.0889	0.1027	0.1089	0.1148	0.1258
0.8	0.0061	0.0087	0.0106	0.0122	0.0150	0.0173	0.0184	0.0193	0.0212
0.9	−0.0241	−0.0341	−0.0417	−0.0482	−0.0590	−0.0681	−0.0722	−0.0762	−0.0834
1	−0.0543	−0.0768	−0.0940	−0.1086	−0.1330	−0.1535	−0.1628	−0.1717	−0.1880

再次，表7基于本文所采集的市场关键指数数据，获得了不同的参数 θ 的取值与观察周期 $T-t$ 下系统金融市场的风险发生距离 $\overline{DD}$。由于以货币市场为参照物以及风险发生距离 $\overline{DD}$ 与预期风险发生概率 $\Phi_0\left(-\overline{DD}\right)$ 呈现反比变化，故通过观察风险发生距离随参数 θ 的增加而减小，即预期风险发生的概率逐渐

上升。参数θ的取值越小，确定金融风险来临能力越精确，参数θ的取值越大，确定金融风险来临能力越粗糙。但是参数取值太小可能会抓不住潜在金融风险的尾巴。故综合正反的结果，一般选择 0.5 周围的参数值，能够较理想地获得金融风险的预警。另外，随着观察周期或预测周期的延长，金融市场内在价值的波动将潜在加剧，预测金融风险发生的能力会减弱，风险发生的预测距离将增加。最后，对比表 6 的样本内特征，表 8 基于之前的整体 KMV 与个体 KMV 模型对未来金融风险进行预测的基础上给出了样本外的风险发生距离。相较于样本内，样本外预测风险发生距离更加缩小。一方面，运用模型将所有可能出现的状况进行集中性计算，与现实真实情况略有区别。另一方面，尽可能不放过任何出现金融风险的机会，从保证预测的谨慎性。

Table 7. Parameter estimates on u_i and μ_i
表7. u_i 与 μ_i 的参数估计

指数类型	IC500	IF300	IH50	IM1000
u_i	−0.0085	0.0051	−0.0003	0.0027
μ_i	0.0018	0.0020	0.0025	0.0026

Table 8. Risk of IF300 market volatility for individual samples distance calculation from occurrence
表8. 样本内个体IF300市场风险发生距离计算

$(T-t,\theta)$	一个月	两个月	一季度	四个月	半年	8个月	三季度	10个月	全年
0.1	0.1165	0.1648	0.2017	0.2328	0.2850	0.3288	0.3487	0.3674	0.4022
0.2	0.0940	0.1329	0.1627	0.1879	0.2300	0.2654	0.2814	0.2966	0.3247
0.3	0.0715	0.1011	0.1238	0.1429	0.1749	0.2019	0.2141	0.2256	0.2470
0.4	0.0489	0.0692	0.0847	0.0978	0.1198	0.1383	0.1466	0.1545	0.1692
0.5	0.0264	0.0373	0.0457	0.0528	0.0646	0.0746	0.0791	0.0834	0.0913
0.6	0.0039	0.0055	0.0067	0.0077	0.0095	0.0109	0.0116	0.0122	0.0133
0.7	−0.0187	−0.0264	−0.0324	−0.0374	−0.0458	−0.0528	−0.0560	−0.0591	−0.0647
0.8	−0.0412	−0.0583	−0.0714	−0.0824	−0.1010	−0.1166	−0.1237	−0.1303	−0.1428
0.9	−0.0638	−0.0902	−0.1104	−0.1275	−0.1562	−0.1804	−0.1913	−0.2016	−0.2209
1	−0.0863	−0.1221	−0.1495	−0.1726	−0.2114	−0.2441	−0.2589	−0.2729	−0.2990

5. 结论

本文通过对具有体制转换的一般随机波动跳扩散模型与随机利率下多变量交换期权进行理论定价和应用创新研究。与之前的研究相比，本文采用了更加一般的随机波动跳扩散模型来刻画股票指数的演变机制，并且将该定价问题应用于交叉 KMV 模型的构造，使得对应金融市场的风险分析更加精准。结果表明用公式计算的效果较为稳定，同时讨论了多变量交换期权价格在金融市场风险中应用进行了详细的讨论。未来，可以在更加复杂金融市场假设下对金融市场的系统风险进行进一步的定价与度量。

基金项目

本论文受 2026 年度河北省教育厅高等学校科学技术项目资助(Grant No. QN2026050)。

参考文献

[1] Black, F. and Scholes, M. (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**, 637-654. https://doi.org/10.1086/260062

[2] Merton, R.C. (1976) Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous. *Journal of Financial Economics*, **3**, 125-144. https://doi.org/10.1016/0304-405x(76)90022-2

[3] Stulz, R. (1982) Options on the Minimum or the Maximum of Two Risky Assets. *Journal of Financial Economics*, **10**, 161-185. https://doi.org/10.1016/0304-405x(82)90011-3

[4] Johnson, H. (1987) Options on the Maximum or the Minimum of Several Assets. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **22**, 277-283. https://doi.org/10.2307/2330963

[5] Cherubini, U. and Luciano, E. (2002) Bivariate Option Pricing with Copulas. *Applied Mathematical Finance*, **9**, 69-85. https://doi.org/10.1080/13504860210136721a

[6] Heston, S.L. (1993) A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *Review of Financial Studies*, **6**, 327-343. https://doi.org/10.1093/rfs/6.2.327

[7] Klein, P. (1996) Pricing Black-Scholes Options with Correlated Credit Risk. *Journal of Banking & Finance*, **20**, 1211-1229. https://doi.org/10.1016/0378-4266(95)00052-6

[8] Duffie, D., Pan, J. and Singleton, K. (2000) Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusions. *Econometrica*, **68**, 1343-1376. https://doi.org/10.1111/1468-0262.00164

[9] Elliott, R.J. and Lian, G. (2013) Pricing Variance and Volatility Swaps in a Stochastic Volatility Model with Regime Switching: Discrete Observations Case. *Quantitative Finance*, **13**, 687-698. https://doi.org/10.1080/14697688.2012.676208

[10] Xie, Y. and Deng, G. (2022) Vulnerable European Option Pricing in a Markov Regime-Switching Heston Model with Stochastic Interest Rate. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, **156**, Article ID: 111896. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.111896

[11] Lyu, J., Ma, Y. and Sun, W. (2020) A Unified Option Pricing Model with Markov Regime-Switching Double Stochastic Volatility, Stochastic Interest Rate and Jumps. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **51**, 5112-5123. https://doi.org/10.1080/03610926.2020.1833221

[12] Yoon, J.H. (2014) Mellin Transform Method for European Option Pricing with Hull-White Stochastic Interest Rate. *Journal of Applied Mathematics*, **2014**, Article ID: 759562. https://doi.org/10.1155/2014/759562

[13] Yoon J.H. and Kim J.H. (2015) The Pricing of Vulnerable Options with Double Mellin Transforms. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **422**, 838-857. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.09.015

[14] Carr, P. and Madan, D. (1999) Option Valuation Using the Fast Fourier Transform. *The Journal of Computational Finance*, **2**, 61-73. https://doi.org/10.21314/jcf.1999.043

[15] Zhang, S. and Wang, L. (2013) Fast Fourier Transform Option Pricing with Stochastic Interest Rate, Stochastic Volatility and Double Jumps. *Applied Mathematics and Computation*, **219**, 10928-10933. https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.05.008

[16] Lin, S. and He, X. (2021) A Closed-Form Pricing Formula for Forward Start Options under a Regime-Switching Stochastic Volatility Model. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, **144**, Article ID: 110644. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110644

[17] He, X., Pasricha, P., Lu, T. and Lin, S. (2024) Vulnerable Options with Regime Switching and Stochastic Liquidity. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, **98**, Article ID: 101930. https://doi.org/10.1016/j.qref.2024.101930

[18] Lee, M.K., Yang, S.J. and Kim, J.H. (2016) A Closed Form Solution for Vulnerable Options with Heston's Stochastic Volatility. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, **86**, 23-27. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2016.01.026

[19] 陈浪南，黄杰鲲. 中国股票市场波动非对称性的实证研究[J]. 金融研究, 2002(5): 67-73.

[20] 吴鑫育，周海林，汪寿阳，等. 双杠杆门限随机波动率模型及其实证研究[J]. 管理科学学报, 2014, 17(7): 63-81.

[21] 郝红霞，胡红倩，韩忠成，林金官. 带有时变杠杆效应的随机波动率模型参数估计及其应用[J]. 应用概率统计, 2024, 40(2): 264-276.

[22] 李彦，童霞. 基于跳-扩散模型的上市公司违约风险度量[J]. 南京财经大学学报, 2013(2): 52-59.

[23] 蒋彧，高瑜. 基于 KMV 模型的中国上市公司信用风险评估研究[J]. 中央财经大学学报, 2015(9): 38-45.

[24] 王立斌，肖倩，赵月. 基于具有体制转换的 SV-KMV 模型的金融风险分析与预测[J]. 统计学与应用, 2025, 14(11): 172-185.