

旗传递点本原的2-设计与 $Sz(q)$ 群

杨 柳

太原理工大学数学学院, 山西 太原

收稿日期: 2026年4月15日; 录用日期: 2026年5月8日; 发布日期: 2026年5月19日

摘 要

群论与组合设计之间存在深刻的内在关联, 这种关联通常体现为通过分析设计结构的自同构群所具有的传递性或本原性等特征来进行研究。2019年, 王雨洁考虑了对于 $\lambda \leq 10$ 的情况下, 如果自同构群 $G = Sz(q)$ 是旗传递且点本原的, 则一个非平凡 $2-(v, k, \lambda)$ 设计是唯一确定的, 其中参数为 $2-(65, 8, 7)$, 且相应的自同构群为 $Sz(8)$ 。在本文我们将考虑在 \mathcal{D} 是非平凡设计 $2-(v, k, \lambda)$, 其中 $11 \leq \lambda \leq 100$ 的情况下, 如果 $G = Sz(q) \leq Aut(\mathcal{D})$ 是旗传递点本原群, 则 $G_\alpha \cong N_G(H)$ 。

关键词

Suzuki群, 旗传递, 点本原, 自同构群, 2-设计

Flag-Transitive Point-Primitive 2-Designs and $Sz(q)$ Groups

Liu Yang

College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: April 15, 2026; accepted: May 8, 2026; published: May 19, 2026

Abstract

There exists a deep intrinsic connection between group theory and combinatorial designs, which is typically reflected by studying properties such as transitivity and primitivity of the automorphism group of the design structure. In 2019, Yujie Wang obtained that for a nontrivial $2-(v, k, \lambda)$ design, if $G = Sz(q)$ is a flag-transitive point-primitive automorphism group and $\lambda \leq 10$, then a nontrivial design is uniquely determined, with parameters $2-(65, 8, 7)$, and its corresponding automorphism

文章引用: 杨柳. 旗传递点本原的 2-设计与 $Sz(q)$ 群[J]. 应用数学进展, 2026, 15(5): 251-257.

DOI: 10.12677/aam.2026.155225

group is $Sz(q)$. In this paper, we consider the case where the design is a nontrivial $2-(v, k, \lambda)$ design with $11 \leq \lambda \leq 100$, if $G = Sz(q) \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ is a flag-transitive point-primitive group, then $G_\alpha \cong N_G(H)$.

Keywords

Suzuki Group, Flag-Transitive, Point-Primitive, Automorphism Group, 2-Design

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

首先, 我们说一个 $2-(v, k, \lambda)$ 设计 \mathcal{D} 是由两个基本对象构成: 其中一个是大小为 v 的点集 \mathcal{P} 和, 另外一个 \mathcal{P} 中若干个大小为 k 子集所构成的族 \mathcal{B} (\mathcal{B} 的元素我们称之为区组或区). 该结构满足以下的条件: \mathcal{P} 的任意给定的两个不同的点, 恰好同时出现在 \mathcal{B} 中的 λ 个区组之内. 记 b 为区组的总个数, 用 r 表示包含某个固定点的区组数目. 若参数满足 $2 < k < v - 1$, 则称设计 \mathcal{D} 是非平凡的.

假设 σ 为点集 \mathcal{P} 上的一个置换. 若 σ 将 \mathcal{D} 的每一个区组仍然映为 \mathcal{D} 的一个区组, 则称 σ 是 \mathcal{D} 的一个自同构, \mathcal{D} 的所有自同构群构成的群记为 $\text{Aut}(\mathcal{D})$ [1]. 对于 $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$, 如果 G 在 \mathcal{D} 的全体区集合 (或者点集合) 上的作用是传递的, 则称 G 为区传递 (或者点传递) 的, 如果 G 在 \mathcal{D} 的全体区集合 (或者点集合) 上的作用是本原的, 则称 G 为区本原 (或者点本原) 的 [1]. 此外, 满足如果 $\alpha \in B$, 的点区 (α, B) 为称为设计 \mathcal{D} 的一个旗, 如果 G 在 \mathcal{D} 的所有旗组成的集合上的作用是传递的, 则称 G 为旗传递的 [1].

2013年田德路考察了对称设计的情形, 并证明了如下结论: 设 \mathcal{D} 是一个对称的 $2-(v, k, \lambda)$ 设计, 若 $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ 在 \mathcal{D} 的上的作用是旗传递点本原的, 且参数 λ 满足 $\lambda \leq 100$, 则 G 一定是仿射型群或者几乎单型群 [2]. 2019年王雨洁考虑对于 $\lambda \leq 10$ 的情况下, 如果自同构群 $G = Sz(q)$ 是旗传递且点本原的, 则一个非平凡 $2-(v, k, \lambda)$ 设计是唯一确定的, 其中参数为 $2-(65, 8, 7)$, 且相应的自同构群为 $Sz(8)$ [3]. 在上述研究的基础上, 本篇论文将研究参数 λ 的范围扩大至 $[11, 100]$ 的情形, 着重分析自同构群为 $Sz(q)$ 群且该群是旗传递点本原的时, 该设计为 $2-(v, k, \lambda)$ 设计的情形, 并由此得到了以下定理:

主要定理: 若设计 \mathcal{D} 的自同构群 $G = Sz(q)$ 是旗传递点本原的, 且 \mathcal{D} 是参数 λ 满足 $11 \leq \lambda \leq 100$ 的一个非平凡的 $2-(v, k, \lambda)$ 设计, 则 $G_\alpha \cong N_G(H)$.

2. 预备知识

2.1. 设计基础知识

引理 2.1.1 [4]: 对于记 $2-(v, k, \lambda)$ 设计, 则有

(a) $b = \lambda v(v-1)/k(k-1)$;

(b) $bk = vr$;

(c) $r(k-1) = \lambda(v-1)$.

引理 2.1.2 (Fisher 不等式) [4]: 对于任何一个 $t-(v, k, \lambda)$ 设计来说, 都有 $b \geq v$.

引理 2.1.3 [4]: 一个 t -设计同样也是一个 s -设计 (其中 $1 \leq s \leq t$). 如果设计参数 $t-(v, k, \lambda)$ 是 t -设计的

参数, 则参数为 $s-(v, k, \lambda_s)$ 为 s -设计时的参数,

此时这里

$$\lambda_s = \lambda \frac{(v-s)(v-s-1)\cdots(v-t+1)}{(k-s)(k-s-1)\cdots(k-t+1)}.$$

引理2.1.4 [4]: 如果 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是一个非平凡的 $t-(v, k, \lambda)$ 设计, 则

$$(k-t+2)(k-t+1) \leq \lambda(v-t+1).$$

定理2.1.5 (Block引理) [5]: 设 \mathcal{D} 为一个 $2-(v, k, \lambda)$ 设计, 如果 $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ 是区传递的则 G 必是点传递的。

定理 2.1.6 (Camina-Gagen 定理) [6]: 设 \mathcal{D} 为一个 $2-(v, k, 1)$, 如果 $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ 是区传递的, 且满足 $k|v$, 则 G 是旗传递的。

定理2.1.7 [7]: 设 \mathcal{D} 为一个 $2-(v, k, 1)$ 设计, 如果 $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ 是区传递且点本原的, 则 G 最多有一个非交换的极小正规子群。

定理2.1.8 (Higman-McLaughlin定理) [4]: 设 \mathcal{D} 为一个 $2-(v, k, 1)$ 设计, 则 $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ 是旗传递的可以推出 G 是点本原的。

定理2.1.9 (Delandtsheer-Doyer定理) [8]: 如果 G 在 \mathcal{D} 为上是传递的, 且 $v > \left(\binom{k}{2} - 1\right)^2$, 则 G 是点本原的。

定理2.1.10 (Delandtsheer) [4]: 如果 G 在 $2-(v, k, 1)$ 设计 \mathcal{D} 上是区本原, 则 G 是几乎单群, 即存在非交换单群 T 使得 $T \trianglelefteq G \leq \text{Aut}(T)$ 。

定理2.2.11 (Camina) [9]: 如果 G 是区传递且点本原的, 则 G 的基柱 $\text{Soc}(G)$ 为初等交换群或者单群。

引理2.1.12 [2]: 设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是一个 $2-(v, k, \lambda)$ 设计, 并且 $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$, 现在任取 $\alpha \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{B}$, 那么 G 在 \mathcal{D} 上旗传递当且仅当下列条件之一成立:

- (1) G 在 \mathcal{P} 上传递, 且 G_α 在 $\mathcal{P}(\alpha)$ 上传递;
- (2) G 在 \mathcal{B} 上传递, 且 G_B 在 B 上传递。

引理2.1.13 [10]: 设 G 旗传递作用在 $t-(v, k, \lambda)$ 设计 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 上, 则下列结论成立:

- (1) $|G| = |G_\alpha| |x^G| = |G_\alpha| v$, 其中 $\alpha \in \mathcal{P}$;
- (2) $|G| = |G_B| |B^G| = |G_B| b$, 其中 $B \in \mathcal{B}$;
- (3) $|G| = |G_{\alpha B}| |(\alpha, B)^G| = |G_{\alpha B}| bk$, 其中 $\alpha \in \mathcal{P}$ 。

引理2.1.14 [11]: 设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是一个 $2-(v, k, \lambda)$ 设计, $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ 。则对于任意取定的点 $\alpha \in \mathcal{P}$ 和区组 $B \in \mathcal{B}$, 以下三个命题彼此等价:

- (1) G 在设计 \mathcal{D} 的旗集合上的作用是传递的;
- (2) G 在点集 \mathcal{P} 上的作用是传递的, 且点稳定化子群 G_α 在全体包含点 α 的区组的集合 $\mathcal{P}(\alpha)$ 上的作用是传递的;
- (3) G 在区组 B 上的作用是传递的, 且区稳定化子群 G_B 在 B 的 k 个点上的作用是传递的。

引理2.1.15 [12]: 假设 \mathcal{D} 是一个非平凡的 $2-(v, k, \lambda)$ 设计, 如果 $G \leq \text{Aut}(\mathcal{D})$ 是旗传递的, 则 $r|\lambda d$, 这里的 d 表示 G 的任意非平凡的次级数。进而我们可以得到 $\frac{r}{\gcd(r, \lambda)} |d$ 。

2.2. Suzuki 群的性质定理

引理2.2.1 [13]: 设 $K = GF(q)$, 其中 $q = 2^{2m+1}$ 且 $m > 0$, 那么 K 有且只有一个自同构映射 π 使得对于任

任意一个 $x \in K$ ，都可以得到 $x\pi^2 = x^2$ ，即 $x\pi = x^{m+1}$ ，对于 $a, b \in K$ 和 $\lambda \in K^*$ ，有

$$S(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & a\pi & 1 & 0 \\ a^2(a\pi) + ab + b\pi & a(a\pi) + b & a & 1 \end{pmatrix}$$

并且

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^{1+2^m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{2^m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2^m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{-1-2^m} \end{pmatrix}$$

(1) 集合

$$F = \{S(a, b) | a, b \in K\}$$

是一个指数为4，阶为 q^2 的2-群

$$S(a, b)S(a', b') = S(a + a', b + b' + (a\pi)a')$$

并且

$$F' = Z(F) = \{S(0, b) | b \in K\}。$$

(2) 集合

$$H = \{M(\lambda) | \lambda \in K^*\}$$

是一个同构于 K^* 的群。

(3) 可以推出

$$S(a, b)^{M(\lambda)} = S(\lambda a, \lambda(\lambda\pi)b)$$

故 FH 是一个Frobenius群，它的Frobenius核是 F 。

引理2.2.2 [13]: 设 $K = GF(q)$ ，其中 $q = 2^{2m+1}$ 并且 $m > 0$ 。

令

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Suzuki 群被定义为如下子群

$$Sz(q) = \langle S(a, b), M(\lambda), T | a \in K, b \in K, \lambda \in K^* \rangle$$

并且满足 $Sz(q) \leq GL(4, q)$ 。

引理2.2.3 [13]: 在射影空间 $P(3, q)$ 中，令

$$p_\infty = [1, 0, 0, 0], p(x, y) = [xy + (x\pi)x^2 + y\pi, y, x, 1], \theta = \{p_\infty, p(x, y) | x \in K, y \in K\}$$

则Suzuki群可以诱导出射影空间 $P(3, q)$ 上一个置换群, 该置换群是由 $P(3, q)$ 上把 θ 变成 θ 的共线的点的全体所构成, 进一步地, Suzuki群在该作用下是忠实的, 并且诱导出来的群Zassenhaus群, 该群的阶为 $(q^2+1)q^2(q-1)$ [7]。

引理2.2.4 [13]: 令 $G = Sz(q)$, $q = 2^{2m+1}$, $r = 2^m$, 那么可以得到如下结论:

(1) 群 G 中包含两个循环子群, 分别记为 U_1 和 U_2 , 其中 U_1 的阶为 $q+2r+1$, U_2 的阶为 $q-2r+1$ 。并且这两个子群均为 G 的Hall子群。

(2) 成立等式 $|N_G(U_i):U_i|=4$, 并且 $N_G(U_i)=\langle U_i, t_i \rangle$ 。对于任意的 $u \in U_i$, 均有 $u^i = u^q$ 。特别地, $N_G(U_i)$ 构成一个Frobenius群, 其Frobenius群核为 U_i 。

(3) 子群 F , H , U_1 , U_2 以及它们的共轭全体构成的 G 一个分类(或称为划分), 即这些子群及其共轭类之间两两交为平凡子群, 且它们的并集等于整个群 G 。

引理2.2.5 [13]: $Sz(q)$ 是单群, 并且 $3 \nmid |Sz(q)|$ 。

引理2.2.6 [13]: 设 $q = 2^{2m+1}$ ($m > 0$), $G = Sz(q)$, 那么群 G 的极大子群与以下四个子群共轭:

- (1) FH ;
- (2) $N_G(U_i)$, 其 $i=1, 2$ 中;
- (3) $Sz(q_0)$, 这里的 $q = q_0^i$ ($i > 1$), i 是奇素数;
- (4) $N_G(H)$ 。

此时, $|Sz(q)| = q^2(q^2+1)(q-1)$, 并且 $q^2+1 = (q-2^{m+1}+1)(q+2^{m+1}+1)$ 。此外, q^2 , $q-2^{m+1}+1$, $q+2^{m+1}+1$, $q-1$ 彼此之间都是互素的。因此, $Sz(q)$ 中的每一个Sylow p -子群必共轭于 F , H , U_1 或者 U_2 中的某个子群。

引理2.2.7 [13]: $\forall g \in G = Sz(q)$, 下面的结论成立:

- (1) 如果 $F \neq F^g$, 那么 $F \cap F^g = 1$;
- (2) 如果 $H \neq H^g$, 那么并且对于任意 $1 \neq h \in H$, $C_G(h) = H$;
- (3) 如果 $U_i \neq U_i^g$, 那么并且对于任意 $1 \neq \mu \in U_i$, $C_G(\mu) = U_i$, i 可取1和2。

引理2.2.8 [14]: 设 P 为 G 的一个Sylow p -子群, 那么:

- (1) 如果 $P = F$, 则 $N_G(P) = FH$;
- (2) 如果 $P \leq F$, 则 $N_G(P) = N_G(H)$;
- (3) 如果 $P \leq U_i$, 则 $N_G(P) = N_G(U_i)$, $i=1, 2$ 。

引理2.2.9 [13]: 设 $q = 2^{2e+1}$, e 是一个正整数, 则 $3 \nmid (q-1)$, $5 \nmid (q-1)$ 。

定理2.2.10 [15]: 设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是非平凡 (v, k, λ) 设计, G 是 \mathcal{D} 的旗传递自同构群, 其基柱 X 是有限例外李型单群。再设 $H = G_\alpha$, $K = G_\beta$, 对于 (α, β) 是 \mathcal{D} 的一个旗, 若 $(r, \lambda) = 1$, 则 H 是 G 的一个抛物子群, 并且以下情况之一成立:

(a) $X = Sz(q)$, $H \cap X \cong q^2:(q-1)$ 且 $K \cap X \cong q:(q-1)$, 其中 $q = 2^a$, $a \geq 3$ 是奇数, 并且 \mathcal{D} 是一个参数为 $v = q^2+1$, $b = q(q^2+1)$, $r = q^2$, $k = q$ 和 $\lambda = q-1$ 的区组设计;

(b) $X = {}^2G_2(q)$, $H \cap X \cong q^3:(q-1)$ 且 $K \cap X \cong 2 \times A_1(q)$, 其中 $q = 3^a \geq 27$, 并且 \mathcal{D} 是Ree单式空间 $U_R(q)$, 参数为 $v = q^3+1$, $b = q^2(q^2-q+1)$, $r = q^2$, $k = q+1$ 和 $\lambda = 1$;

(c) $X = {}^2G_2(q)$, $H \cap X \cong q^3:(q-1)$ 且 $K \cap X \cong q:(q-1)$, 其中 $q = 3^a$, $a \geq 3$ 且 a 是奇数, 并且 \mathcal{D} 是一个参数为 $v = q^3+1$, $b = q^2(q^3+1)$, $r = q^3$, $k = q$ 和 $\lambda = q-1$ 的区组设计;

(d) $X = {}^2G_2(q)$, $H \cap X \cong q^3:(q-1)$ 且 $K \cap X \cong q^2:(q-1)$, 其中 $q = 3^a$, $a \geq 3$ 是奇数, 并且 \mathcal{D} 是一个参数为 $v = q^3+1$, $b = q(q^3+1)$, $r = q^3$, $k = q^2$ 和 $\lambda = q^2-1$ 的区组设计。

3. 主要定理及其证明

定理: 若设计 \mathcal{D} 的自同构群 $G = Sz(q)$ 是旗传递点本原的, 且 \mathcal{D} 是参数 λ 满足 $11 \leq \lambda \leq 100$ 的一个非平凡的 $2-(v, k, \lambda)$ 设计, 则 $G_\alpha \not\cong N_G(H)$ 。

设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ 是一个满足 $11 \leq \lambda \leq 100$ 的 $2-(v, k, \lambda)$ 设计, $G \leq Aut(\mathcal{D})$ 是点本原的群, 且 $G = Sz(q)$ 。

我们知道 $|G| = |Sz(q)| = (q^2 + 1)q^2(q - 1)$, 其中 $q = 2^{2e+1} \geq 8$ 。由定理 2.2.6 可知 G 的极大子群 G_α 有五种情况, 分别是 $G_\alpha \cong FH$, $G_\alpha \cong Z_{q+\sqrt{2q+1}}:Z_4$, $G_\alpha \cong Z_{q-\sqrt{2q+1}}:Z_4$, $G_\alpha \cong Sz(q_0)$ 和 $G_\alpha \cong N_G(H)$ 。

故而他们的阶分别为 $q^2(q - 1)$, $4(q + \sqrt{2q + 1})$, $4(q - \sqrt{2q + 1})$, $(q_0^2 + 1)q_0^2(q_0 - 1)$ 和 (其中 $q = q_0^m$, m 为奇素数) 和 $2(q - 1)$ 。在本文中主要对 $G_\alpha \cong N_G(H)$ 是否成立进行讨论?

为完成主要定理的证明, 我们先证明以下引理:

引理 3.1: 设 \mathcal{D} 是一个旗传递的 $2-(v, k, \lambda)$ 设计, 那么可以得到 $\lambda v < r^2$, $\lambda |G| < |G_\alpha|^3$, $r|\lambda(v - 1, |G_\alpha|)$, 其中 $\alpha \in \mathcal{P}$ 。

证明: 首先由引理 2.1.1 中 (b): $bk = vr$, 以及引理 2.1.2: $b \geq v$, 可得 $k \leq r$ 。

在根据引理 2.1.1 中 (c): $r(k - 1) = \lambda(v - 1)$ 可以得到

$$\lambda v = r(k - 1) + \lambda \leq r(r - 1) + \lambda = r^2 - (r - \lambda) < r^2$$

设 $G \leq Aut(\mathcal{D})$, 我们知道 G 是旗传递的, 因此 G 也是点传递的, 再由引理 2.1.8 可知 G_α 在 $\mathcal{P}(\alpha)$ 上传递, 从而 $v = |G : G_\alpha|$ 。

由于 G 是旗传递的, 对于所有包含 α 的区 B , 我们可以得到 $|B^{G_\alpha}| = r|G_\alpha|$, 因此 $r \leq |G_\alpha|$ 。

因此由 $\lambda v < r^2$ 以及 $v = |G : G_\alpha|$, 可以得到

$$\lambda \frac{|G|}{|G_\alpha|} < r^2$$

而 $r \leq |G_\alpha|$, 则有

$$\lambda \frac{|G|}{|G_\alpha|} < |G_\alpha|^2$$

由此可知

$$\lambda |G| < |G_\alpha|^3$$

根据引理 2.1.1 中 (c) 可知 $r|\lambda(v - 1)$, 又 $r|G_\alpha|$, 这时可以得到 $r|\lambda|G_\alpha|$, 因此有

$$r|\lambda(v - 1, |G_\alpha|)$$

综上所述证明了该引理。

接下来证明本文的主要定理

主要定理: 若设计 \mathcal{D} 的自同构群 $G = Sz(q)$ 是旗传递点本原的, 且 \mathcal{D} 是参数 λ 满足 $11 \leq \lambda \leq 100$ 的一个非平凡的 $2-(v, k, \lambda)$ 设计, 则 $G_\alpha \not\cong N_G(H)$ 。

证明: 假设 $G_\alpha \cong N_G(H)$, 那么 $|G_\alpha| = 2(q - 1)$, 而 $|G| = |Sz(q)| = (q^2 + 1)q^2(q - 1)$, 从而

$$\lambda q^2 (q^2 + 1)(q - 1) > [2(q - 1)]^3,$$

与引理 3.1 中 $\lambda |G| < |G_\alpha|^3$ 矛盾。

因此得出此条件下

$$G_\alpha \not\cong N_G(H)。$$

至此主要定理的证明完毕, 得出了若设计 \mathcal{D} 的自同构群 $G = Sz(q)$ 是旗传递点本原的, 且 \mathcal{D} 是参数 λ 满足 $11 \leq \lambda \leq 100$ 的一个非平凡的 $2-(v, k, \lambda)$ 设计, 则 $G_\alpha \not\cong N_G(H)$ 。也就是说在 $G_\alpha \cong N_G(H)$ 这种情况下, 不存在一个自同构群 $G = Sz(q)$ 是旗传递点本原的 $11 \leq \lambda \leq 100$ 的非平凡的 $2-(v, k, \lambda)$ 设计, 该结论的基于与王雨洁讨论的一致的前提下, 对其研究成果的合理延伸和重要补充, 同时, 该结论为相应条件下的设计分类工作排除了一种特定的可能。之后我们也将继续讨论 $11 \leq \lambda \leq 100$ 条件下, 自同构群是 $G = Sz(q)$ 的旗传递点本原的 $2-(v, k, \lambda)$ 设计的分类情况。

参考文献

- [1] 廖小莲, 陈国华. 两类几乎单群与斯坦诺 4-设计[J]. 湖南人文科技学院学报, 2007, 24(4): 1-3.
- [2] 田德路. 旗传递点本原对称设计的分类[D]: [博士学位论文]. 广州: 华南理工大学, 2013.
- [3] 王雨洁. Suzuki 群与旗传递点本原 $2-(v, k, \lambda)$ ($\lambda \leq 10$) 设计[D]: [硕士学位论文]. 广州: 华南理工大学, 2019.
- [4] 周胜林. 群与设计简介[D]: [硕士学位论文]. 广州: 华南理工大学, 2012.
- [5] Block, R.E. (1967) On the Orbits of Collineation Groups. *Mathematische Zeitschrift*, **96**, 33-49. <https://doi.org/10.1007/bf01111448>
- [6] Camina, A.R. and Gagen, T.M. (1984) Block Transitive Automorphism Groups of Designs. *Journal of Algebra*, **86**, 549-554. [https://doi.org/10.1016/0021-8693\(84\)90047-4](https://doi.org/10.1016/0021-8693(84)90047-4)
- [7] Camina, A.R. and Praeger, C.E. (1993) Line-Transitive Automorphism Groups of Linear Spaces. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **25**, 309-315. <https://doi.org/10.1112/blms/25.4.309>
- [8] Delandtsheer, A. (1989) Line-Primitive Automorphism Groups of Finite Linear Spaces. *European Journal of Combinatorics*, **10**, 161-169. [https://doi.org/10.1016/s0195-6698\(89\)80043-5](https://doi.org/10.1016/s0195-6698(89)80043-5)
- [9] Camina, A.R. (1996) The Socle of Automorphism Groups of Linear Spaces. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **28**, 269-272. <https://doi.org/10.1112/blms/28.3.269>
- [10] Huber, M. (2009) Flag-Transitive Steiner Design. Birkhauser Basel. <https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0002-6>
- [11] 王亚杰. $2-(v, k, \lambda)$ 设计的旗传递自同构群[D]: [博士学位论文]. 广州: 华南理工大学, 2016.
- [12] Davies, H. (1987) Flag-Transitivity and Primitivity. *Discrete Mathematics*, **63**, 91-93. [https://doi.org/10.1016/0012-365x\(87\)90154-3](https://doi.org/10.1016/0012-365x(87)90154-3)
- [13] Huppert, B. and Blackburn, N. (1982) Finite Groups III. Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-67997-1>
- [14] Liu, W., Li, H. and Ma, C. (2000) Suzuki Groups and $2-(v, k, \lambda)$ Designs. *European Journal of Combinatorics*, **22**, 513-519.
- [15] Alavi, S.H. (2020) Flag-Transitive Block Designs and Finite Simple Exceptional Groups of Lie Type. *Graphs and Combinatorics*, **36**, 1001-1014. <https://doi.org/10.1007/s00373-020-02161-0>