

二阶双相滞后方程的有限元方法及误差估计

李艺涵

云南师范大学数学学院, 云南 昆明

收稿日期: 2026年4月19日; 录用日期: 2026年5月13日; 发布日期: 2026年5月20日

摘要

本文针对数学形式复杂的二阶双相滞后热传导方程的研究, 其包含三阶时间导数项, 先引入两个辅助变量将原高阶方程降阶为一阶耦合方程组; 随后采用有限元方法和Crank-Nicolson格式进行离散, 构建了二阶双相滞后模型的全离散有限元格式, 通过构造离散能量泛函完成全离散格式的稳定性证明, 同时分析截断误差与投影误差的叠加效应, 证明全离散格式在 L^2 范数下的收敛阶为 $O(h^{k+1} + \Delta t^2)$ 。最后, 通过对二维区域上的二阶双相滞后方程的数值实验, 验证了本文所构造有限元格式的有效性与收敛性。本文的研究为双相滞后方程提供了一种有限元数值求解方法, 加强了该类方程有限元格式的稳定性与收敛性理论研究。

关键词

非傅里叶热传导, 双相滞后模型, 有限元方法, 稳定性, 收敛性

Finite Element Methods and Error Estimates for Second-Order Dual-Phase-Lag Equations

Yihan Li

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

Received: April 19, 2026; accepted: May 13, 2026; published: May 20, 2026

Abstract

In this paper, we investigate the second-order dual-phase-lag heat conduction equation, which is mathematically complex due to the presence of a third-order time derivative term. Two auxiliary variables are first introduced to reduce the original high-order equation to a first-order coupled system. Subsequently, the finite element method combined with the Crank-Nicolson scheme is employed for discretization, leading to the construction of a fully discrete finite element scheme for the second-order dual-phase-lag model. By constructing a discrete energy functional, we prove the

stability of the fully discrete scheme. Furthermore, the combined effect of the truncation error and the projection error is analyzed, and it is proved that the convergence order of the fully discrete scheme in the L^2 -norm is $O(h^{k+1} + \Delta t^2)$. Finally, numerical experiments on the second-order dual-phase-lag equation in a two-dimensional domain are carried out in this paper to verify the effectiveness and convergence of the finite element scheme constructed in this paper. This study provides a finite element numerical solution method for the dual-phase-lag equation and strengthens the theoretical research on the stability and convergence of the finite element scheme for such equations.

Keywords

Non-Fourier Heat Conduction, Dual-Phase-Lag Model, Finite Element Method, Stability, Convergence

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文考虑如下二阶双相滞后热传导方程

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\tau_q}{\alpha} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\tau_q^2}{2\alpha} \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} = \Delta T + \tau_r \Delta \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\tau_r^2}{2} \Delta \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{\kappa} \left(Q + \tau_q \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\tau_q^2}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \right) \\ T(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T] \\ T(x, 0) = T_0(x), \quad \frac{\partial T}{\partial t}(x, 0) = T_1(x), \quad \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(x, 0) = T_2(x), \quad x \in \Omega \end{cases} \quad (1)$$

其中 T, Q, τ_q, τ_r 分别代表温度、热源、热流滞后和温度梯度滞后, 定义热扩散系数 $\alpha = \frac{\kappa}{\rho C_p}$, κ, ρ, C_p 分别为电导率、密度、比热容。

利用有限元方法求解上述类型二阶双相滞后热传导方程, Deng 等人[1]针对二维和三维的二阶 DPL 模型, 发展了紧致 ADI 格式, 并证明了其在 L^2 范数下的收敛性, 取得了良好的计算效果。Askarizadeh 等人[2]也曾给出了一维情形下一阶和二阶 DPL 模型的解析解, 用以分析局部热力学平衡假设的相容性。Zhou 等人[3]将双相滞后模型拓展至二维轴对称坐标系, 提出了适用于非均匀结构活体生物组织的 DPL 生物传热模型。他们分析了表面加热与体内加热两种方式、以及平顶光束与高斯光束两种激光轮廓对组织热响应的影响。Wu 等人[4]发展了局部间断 Galerkin (LDG)方法结合隐式 - 显式时间离散格式, 用于求解 DPL 方程, 并严格证明了该格式的无条件稳定性和最优误差估计。该方法通过数值实验验证了对一维和二维问题的精度和收敛性, 并成功模拟了金膜在激光脉冲加热下的热行为, 与实验数据吻合良好。这一进展表明, 将有限元类方法应用于非傅里叶热传导问题是当前研究的前沿方向之一。与此同时, Majchrzak 和 Mochnacki [5]采用隐式有限差分格式, 研究了多层微域在强激光脉冲作用下的热过程, 并将 DPL 模型应用于包含熔化和再凝固的相变问题。Cabrera [6]等则系统地讨论了一维 DPL 近似模型的差分格式, 并对其收敛性和稳定性进行了深入分析。

有限元方法[7]-[10]因其在处理复杂几何和自然边界条件方面的天然优势, 成为求解此类问题的有力竞争者。尽管已有一些工作探讨了 DPL 方程的有限元离散, 但相关研究, 尤其是针对二阶 DPL 模型全

离散格式的系统性稳定性与收敛性理论分析，仍相对薄弱。

基于此，本文旨在分析求解二阶双相滞后热传导方程的有限元方法。我们将针对更具挑战性的二阶模型，通过引入辅助变量将其降阶为耦合的一阶系统，进而设计一种高效的隐式-显式混合时间离散策略，并从理论上证明其收敛性。文章共分三部分，第二部分引入一些预备知识，第三部分证明了有限元解误差估计结果。

2. 预备知识

定理 1 (Cauchy-Schwarz 不等式[11]) 设 $u, \omega \in L^2(\Omega)$ ，则有 $|(u, \omega)| \leq \|u\| \|\omega\|$ 等号成立当且仅当 u 和 ω 线性相关。

定理 2 (Young 不等式[11]) 设 $u, w \in \mathbb{R}^+$ ， $\epsilon > 0$ ，则有 $uw \leq \frac{\epsilon}{2}u^2 + \frac{1}{2\epsilon}w^2$ ，更一般地，对任意 $1 < p, q < \infty$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ，有 $uw \leq \frac{u^p}{p} + \frac{w^q}{q}$ 。

定理 3 (Gronwall 不等式 - 离散形式[12]) 设 $\{u_n\}$ 为非负数列， $\{wb_n\}$ 为非负单调不减数列，并且满足 $u_n \leq w_n + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j u_j$ ， $n \geq 1$ ， $u_0 \leq w_0$ ， $\lambda_j \geq 0$ 则有 $u_n \leq w_n \exp\left(\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j\right)$ ， $n \geq 1$ 。

定义 1 (椭圆投影算子[13]) 设 Ω 是一个有界区域， $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ 是一个有限元空间， $a(\cdot, \cdot)$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 上的一个椭圆双线性形式。定义椭圆投影算子 $\mathcal{R}_h: H_0^1(\Omega) \rightarrow V_h$ 如下：对任意 $w \in H_0^1(\Omega)$ ， $\mathcal{R}_h w$ 是满足 $a(\mathcal{R}_h w, v_h) = a(w, v_h)$ ， $\forall v_h \in V_h$ 的唯一元素。

定理 4 (椭圆投影的逼近性质[13]) 设有限元空间 V_h 具有 k 阶逼近性质 ($k \geq 1$)。则对任意 $w \in H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ，成立最优阶误差估计 $\|w - \mathcal{R}_h w\| + h\|w - \mathcal{R}_h w\|_1 \leq Ch^{k+1}\|w\|_{k+1}$ ，其中 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_1$ 分别表示 $L^2(\Omega)$ 和 $H^1(\Omega)$ 范数， $\|\cdot\|_{k+1}$ 表示 $H^{k+1}(\Omega)$ 范数， C 是与 w 和 h 无关的正常数。

3. 误差估计

回顾第一章中的二阶双相滞后热传导方程(1)。将方程(1)中的各项系数进行整理。首先，将(1)的左端三项合并：

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\tau_q}{\alpha} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\tau_q^2}{2\alpha} \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} = AT_t + BT_u + CT_m, \quad (2)$$

其中记

$$A = \frac{1}{\alpha}, \quad B = \frac{\tau_q}{\alpha}, \quad C = \frac{\tau_q^2}{2\alpha}. \quad (3)$$

右端前三项为空间导数项：

$$\Delta T + \tau_T \Delta \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\tau_T^2}{2} \Delta \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \alpha_0 \Delta T + D \Delta T_t + E \Delta T_u, \quad (4)$$

这里取 $\alpha_0 = 1$ ， $D = \tau_T$ ， $E = \frac{\tau_T^2}{2}$ 。原方程中的源项部分记为 $f(x, t) = \frac{1}{\kappa} \left(Q + \tau_q \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\tau_q^2}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \right)$ 。于是方程(1)简化为

$$AT_t + BT_u + CT_m = \alpha_0 \Delta T + D \Delta T_t + E \Delta T_u + f \quad (5)$$

引入两个辅助变量 $p(x, t)$ 和 $q(x, t)$ ：

$$p(\mathbf{x}, t) = BT(\mathbf{x}, t) + C \frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \quad (6)$$

$$q(\mathbf{x}, t) = AT(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{x}, t) \quad (7)$$

利用定义(6)和(7), 可以将方程(5)等价地改写为

$$\frac{\partial}{\partial t} q(\mathbf{x}, t) = b\Delta T(\mathbf{x}, t) + c\Delta p(\mathbf{x}, t) + d\Delta q(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t) \quad (8)$$

其中降阶后的系数为

$$b = \frac{\alpha_0 C^2 + EB^2 - BDC - ACE}{C^2}, \quad c = \frac{DC - EB}{C^2}, \quad d = \frac{E}{C} \quad (9)$$

我们有降阶后系统的变分形式: 寻求三元组 $(T, p, q) \in L^\infty(0, T; V) \times L^\infty(0, T; V) \times L^\infty(0, T; V)$, 满足 $\partial_t T, \partial_t p, \partial_t q \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, 且对任意 $t \in (0, T)$, 成立如下耦合变分方程组:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial T}{\partial t}, v \right) = \frac{1}{C} (p - BT, v), & \forall v \in V, \\ \left(\frac{\partial p}{\partial t}, v \right) = (q - AT, v), & \forall v \in V, \\ \left(\frac{\partial q}{\partial t}, v \right) + ba(T, v) + ca(p, v) + da(q, v) = (f, v), & \forall v \in V, \end{cases} \quad (10)$$

我们采用二阶精度的 Crank-Nicolson 方法进行时间离散。设时间区间 $J = [0, \hat{T}]$ 被等分为 N 个小区间, 时间步长为 $\Delta t = \hat{T}/N$ 。令 $t_n = n\Delta t$ ($n=0, 1, \dots, N$) 为时间节点。我们用 $U^n, P^n, Q^n \in V_h$ 分别表示在时间 t_n 处 T_h, p_h, q_h 的近似解。对离散序列 $\{g^n\}$ 定义

$$\delta_t g^n = \frac{g^{n+1} - g^n}{\Delta t}, \quad g^{n+1/2} = \frac{g^{n+1} + g^n}{2} \quad (11)$$

有全离散有限元格式:

$$\begin{cases} \left(\delta_t U^n, v_h \right) = \frac{1}{C} (P^{n+1/2} - BU^{n+1/2}, v_h), \forall v_h \in V_h. \\ \left(\delta_t P^n, v_h \right) = (Q^{n+1/2} - AU^{n+1/2}, v_h), \forall v_h \in V_h. \\ \left(\delta_t Q^n, v_h \right) + ba(U^{n+1/2}, v_h) + ca(P^{n+1/2}, v_h) + da(Q^{n+1/2}, v_h) = (f^{n+1/2}, v_h), \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (12)$$

初始条件由椭圆投影给出为 $U^0 = \mathcal{R}_h T_0, P^0 = \mathcal{R}_h p_0, Q^0 = \mathcal{R}_h q_0$ 。在每个时间步, 给定 (U^n, P^n, Q^n) , (12) 构成关于 $(U^{n+1}, P^{n+1}, Q^{n+1})$ 的线性系统。由于该系统的系数矩阵可分解为质量矩阵(对称正定)的线性组合, 因此在每个时间步上存在唯一解。

3.1. 全离散格式的稳定性分析

本节分析全离散格式(12)在齐次源项 $f \equiv 0$ 下的稳定性。将连续时间导数替换为离散差分商, 引入扩展能量处理 $|P|_1^2$ 项, 通过离散 Gronwall 不等式得到有界性。

定理 5 (Crank-Nicolson 全离散稳定性) 设常数 $A, B, C > 0$, $b > 0$, $d > 0$ 。则存在仅依赖于 b, c, d, A, B, C 的正常数 μ 和 $C_s > 0$, 使得全离散格式(12)在 $f = 0$ 时的解满足

$$\|Q^n\|^2 + \|P^n\|^2 + \|U^n\|^2 + |U^n|_1^2 + |P^n|_1^2 \leq C_s \left(\|Q^0\|^2 + \|P^0\|^2 + \|U^0\|^2 + |U^0|_1^2 + |P^0|_1^2 \right) \quad (13)$$

对所有 $0 \leq n \leq N$ 成立, 其中 $C_s = C_0 \exp(\mu \hat{T})$ 。

证明 取 $f \equiv 0$, 记中点值 $U = U^{n+1/2}$, $P = P^{n+1/2}$, $Q = Q^{n+1/2}$ 。

在(12)第三式中取 $v_h = Q$, 得

$$\frac{\|Q^{n+1}\|^2 - \|Q^n\|^2}{2\Delta t} + ba(U, Q) + ca(P, Q) + d|Q|_1^2 = 0. \quad (14)$$

在(12)第二式中取 $v_h = \frac{C}{b}P$, 得

$$\frac{C}{2b} \cdot \frac{\|P^{n+1}\|^2 - \|P^n\|^2}{\Delta t} = \frac{C}{b}(Q, P) - \frac{AC}{b}(U, P). \quad (15)$$

在(12)第一式中取 $v_h = \frac{C(A^2+1)}{2b}U$, 得

$$\frac{C(A^2+1)}{4b} \cdot \frac{\|U^{n+1}\|^2 - \|U^n\|^2}{\Delta t} = \frac{A^2+1}{2b}(P, U) - \frac{B(A^2+1)}{2b}\|U\|^2. \quad (16)$$

由(12)第一式, $\delta_t U^n = \frac{1}{C}(P - BU)$ 在 V_h 中成立, 因此

$$\frac{|U^{n+1}|_1^2 - |U^n|_1^2}{2\Delta t} = \frac{1}{C}a(P, U) - \frac{B}{C}|U|_1^2. \quad (17)$$

定义能量

$$E^n = \frac{1}{2}\|Q^n\|^2 + \frac{C}{2b}\|P^n\|^2 + \frac{C(A^2+1)}{4b}\|U^n\|^2 + \frac{1}{2}|U^n|_1^2. \quad (18)$$

将(14)~(17)相加, 得到

$$\frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} = -d|Q|_1^2 - \frac{B}{C}|U|_1^2 - \frac{B(A^2+1)}{2b}\|U\|^2 + I_{\text{cross}}, \quad (19)$$

其中左端项为

$$\begin{aligned} \frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2\Delta t}(\|Q^{n+1}\|^2 - \|Q^n\|^2) + \frac{C}{2b\Delta t}(\|P^{n+1}\|^2 - \|P^n\|^2) \\ &\quad + \frac{C(A^2+1)}{4b\Delta t}(\|U^{n+1}\|^2 - \|U^n\|^2) + \frac{1}{2\Delta t}(|U^{n+1}|_1^2 - |U^n|_1^2). \end{aligned} \quad (20)$$

交叉项为

$$I_{\text{cross}} = -ba(U, Q) - ca(P, Q) + \frac{1}{C}a(P, U) + \frac{C}{b}(Q, P) + \frac{A^2 - 2AC + 1}{2b}(P, U). \quad (21)$$

这里 (P, U) 的 L^2 系数由 $-\frac{AC}{b} + \frac{A^2+1}{2b} = \frac{A^2 - 2AC + 1}{2b}$ 合并得到。下面将 I_{cross} 分为 H^1 交叉项和 L^2 交叉项分别处理。

对 H^1 交叉项, 利用 Cauchy-Schwarz 不等式和 Young 不等式将其吸收到 H^1 耗散中

$$|ba(U, Q)| \leq \frac{d}{4}|Q|_1^2 + \frac{b^2}{d}|U|_1^2, \quad (22)$$

$$|ca(P, Q)| \leq \frac{d}{4}|Q|_1^2 + \frac{c^2}{d}|P|_1^2, \quad (23)$$

$$\left| \frac{1}{C}a(P, U) \right| \leq \frac{1}{2C}|U|_1^2 + \frac{1}{2C}|P|_1^2. \quad (24)$$

记 $\sigma_p = \frac{c^2}{d} + \frac{1}{2C}$ 为 $|P|_1^2$ 的 H^1 交叉贡献。

对 L^2 交叉项，同样用 Cauchy-Schwarz 不等式和 Young 不等式估计得

$$\left| \frac{C}{b}(Q, P) \right| \leq \frac{C}{2|b|}(\|Q\|^2 + \|P\|^2), \quad (25)$$

$$\left| \frac{A^2 - 2AC + 1}{2b}(P, U) \right| \leq \frac{|A^2 - 2AC + 1|}{4|b|}(\|P\|^2 + \|U\|^2). \quad (26)$$

对 L^2 耗散项 $-\frac{B(A^2+1)}{2b}\|U\|^2$ ：当 $b > 0$ 时为负(耗散)，可丢弃；当 $b < 0$ 时为正，其绝对值为 $\frac{B(A^2+1)}{2|b|}\|U\|^2$ 。

上述 L^2 项均为 $\|Q\|^2, \|P\|^2, \|U\|^2$ 的线性组合，而 E^n 包含这些 L^2 范数，因此存在常数 $C_1 > 0$ (仅依赖于 b, A, B, C 和 E^n 中各项的权重)使得 $|L^2$ 交叉项 $\leq C_1 E^{n+1/2}$ 。 $|Q|_1^2$ 的净系数为 $-d + d/4 + d/4 = -d/2$ (始终为负)。 $|U|_1^2$ 的净系数为 $-B/C + b^2/d + 1/(2C) = -(2B-1)/(2C) + b^2/d$ (可正可负)。当 $|U|_1^2$ 系数为正时，利用 $|U|_1^2 \leq 2E$ (因 E 包含 $(1/2)|U|_1^2$) 将其并入右端。

综合得

$$\frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} + \frac{d}{2}|Q|_1^2 \leq C_1 E^{n+1/2} + \sigma_p |P|_1^2 + C_2 |U|_1^2, \quad (27)$$

其中 $C_2 = \max(0, b^2/d - (2B-1)/(2C))$ 。 $|P|_1^2$ 仍无耗散来源。

下面进行对 $|P|_1^2$ 控制。由(12)第二式， $\delta_t P^n = Q - AU$ 在 V_h 中成立。因此

$$\frac{|P^{n+1}|_1^2 - |P^n|_1^2}{2\Delta t} = a(\delta_t P^n, P) = a(Q, P) - Aa(U, P). \quad (28)$$

对(28)右端应用 Cauchy-Schwarz 不等式和 Young 不等式得

$$|a(Q, P)| \leq \frac{1}{2}|Q|_1^2 + \frac{1}{2}|P|_1^2, \quad |Aa(U, P)| \leq \frac{A}{2}|U|_1^2 + \frac{A}{2}|P|_1^2. \quad (29)$$

所以有

$$\frac{|P^{n+1}|_1^2 - |P^n|_1^2}{2\Delta t} \leq \frac{1}{2}|Q|_1^2 + \frac{1+A}{2}|P|_1^2 + \frac{A}{2}|U|_1^2. \quad (30)$$

接下来扩展能量。定义

$$\tilde{E}^n = E^n + \eta |P^n|_1^2, \quad (31)$$

其中 $\eta > 0$ 待定。将(31)加上 2η 倍的(30)得

$$\frac{\tilde{E}^{n+1} - \tilde{E}^n}{\Delta t} + \left(\frac{d}{2} - \eta \right) |Q|_1^2 \leq C_1 \tilde{E}^{n+1/2} + (\sigma_p + \eta(1+A)) |P|_1^2 + (C_2 + \eta A) |U|_1^2. \quad (32)$$

选取 $\eta < d/4$, 使 $(d/2 - \eta)|Q_h^2|$ 保持为正(耗散), 将其舍弃。对右端各项:

$$\begin{aligned} E^{n+1/2} &\leq \tilde{E}^{n+1/2} \quad (\text{因 } E \leq \tilde{E}) \\ |P_h^2| &\leq \frac{1}{\eta} \tilde{E}^{n+1/2} \quad (\text{因 } \tilde{E} \geq \eta |P_h^2|) \\ |U_h^2| &\leq 2\tilde{E}^{n+1/2} \quad (\text{因 } \tilde{E} \geq \frac{1}{2} |U_h^2|) \end{aligned} \quad (33)$$

因此得

$$\frac{\tilde{E}^{n+1} - \tilde{E}^n}{\Delta t} \leq \mu \tilde{E}^{n+1/2}, \quad (34)$$

其中 $\mu > 0$ 仅依赖于 b, c, d, A, B, C 。

下面利用离散的 Gronwall 不等式, 且 $\tilde{E}^{n+1/2} \leq \frac{1}{2}(\tilde{E}^{n+1} + \tilde{E}^n)$, (34)变为

$$\left(1 - \frac{\mu\Delta t}{2}\right) \tilde{E}^{n+1} \leq \left(1 + \frac{\mu\Delta t}{2}\right) \tilde{E}^n. \quad (35)$$

取 $\Delta t \leq 1/2\mu$ 使 $1 - \mu\Delta t/2 > 0$, 则

$$\tilde{E}^{n+1} \leq \frac{1 + \mu\Delta t/2}{1 - \mu\Delta t/2} \tilde{E}^n \leq (1 + 2\mu\Delta t) \tilde{E}^n. \quad (36)$$

迭代 n 步并利用 $(1 + 2\mu\Delta t)^n \leq e^{2\mu n\Delta t} \leq e^{2\mu\hat{t}}$:

$$\tilde{E}^n \leq e^{2\mu\hat{t}} \tilde{E}^0, \quad \forall 0 \leq n \leq N. \quad (37)$$

由 $b > 0$ 知 E^n 的各项权重均为正, 故 E^n 与 $\|Q^n\|^2 + \|P^n\|^2 + \|U^n\|^2 + |U_h^n|^2$ 等价。结合 $E^n \leq \tilde{E}^n$ 和 $\tilde{E}^n \geq \eta |P_h^n|^2$, 取 $C_s = C_0 e^{2\mu\hat{t}}$ 即得结论。

3.2. 全离散格式的收敛性分析

定理 6 (全离散误差估计)。在定理 5 假设下, 若精确解满足

$$T, p, q \in H^3(0, \hat{T}; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, \hat{T}; H^{k+1}(\Omega)), \quad (38)$$

则对所有 $0 \leq n \leq N$ 有

$$\|T(t_n) - U^n\| + \|p(t_n) - P^n\| + \|q(t_n) - Q^n\| \leq C(h^{k+1} + \Delta t^2). \quad (39)$$

证明 设 $\Pi_h = \mathcal{R}_h$ 为椭圆投影算子。将总误差分解为

$$e^n = (\bullet(t_n) - \Pi_h \bullet(t_n)) + (\Pi_h \bullet(t_n) - \bullet^n) = \rho^n + \theta^n = T, p, q. \quad (40)$$

由椭圆投影的标准逼近性质:

$$\|\rho^n\| \leq Ch^{k+1} \|\bullet(t_n)\|_{k+1}, \|\partial_t \rho^n\| \leq Ch^{k+1} \|\partial_t \bullet\|_{k+1}. \quad (41)$$

将精确解在 $t_{n+1/2}$ 处的方程用 CN 格式表示并与(12)作差得

$$\begin{aligned} (\delta_t \theta_T^n, v_h) + (\delta_t \rho_T^n, v_h) &= \frac{1}{C} (\theta_p^{n+1/2} + \rho_p^{n+1/2} - B(\theta_T^{n+1/2} + \rho_T^{n+1/2}), v_h) \\ &\quad + \left(\frac{T(t_{n+1}) - T(t_n)}{\Delta t} - \partial_t T(t_{n+1/2}), v_h \right), \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} (\delta_t \theta_p^n, v_h) + (\delta_t \rho_p^n, v_h) &= (\theta_q^{n+1/2} + \rho_q^{n+1/2} - A(\theta_T^{n+1/2} + \rho_T^{n+1/2}), v_h) \\ &\quad + \left(\frac{p(t_{n+1}) - p(t_n)}{\Delta t} - \partial_t p(t_{n+1/2}), v_h \right), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} (\delta_t \theta_q^n, v_h) + (\delta_t \rho_q^n, v_h) + ba(\theta_T^{n+1/2} + \rho_T^{n+1/2}, v_h) + ca(\theta_p^{n+1/2} + \rho_p^{n+1/2}, v_h) + da(\theta_q^{n+1/2} + \rho_q^{n+1/2}, v_h) \\ = \left(\frac{q(t_{n+1}) - q(t_n)}{\Delta t} - \partial_t q(t_{n+1/2}), v_h \right). \end{aligned} \quad (44)$$

利用椭圆投影正交性 $a(\rho^{n+1/2}, v_h) = 0$ ，得离散误差方程

$$(\delta_t \theta_T^n, v_h) = \frac{1}{C} (\theta_p^{n+1/2} - B\theta_T^{n+1/2}, v_h) + (R_1^{n+1/2}, v_h), \quad (45)$$

$$(\delta_t \theta_p^n, v_h) = (\theta_q^{n+1/2} - A\theta_T^{n+1/2}, v_h) + (R_2^{n+1/2}, v_h), \quad (46)$$

$$(\delta_t \theta_q^n, v_h) + ba(\theta_T^{n+1/2}, v_h) + ca(\theta_p^{n+1/2}, v_h) + da(\theta_q^{n+1/2}, v_h) = (R_3^{n+1/2}, v_h), \quad (47)$$

对所有 $v_h \in V_h$ ，其中 R_1, R_2, R_3 是局部截断误差，残差各分量为

$$R_1^{n+1/2} = \left(\frac{T(t_{n+1}) - T(t_n)}{\Delta t} - \partial_t T(t_{n+1/2}) \right) + \left(\delta_t \rho_T^n - \partial_t \rho_T(t_{n+1/2}) + \frac{B}{C} \rho_T^{n+1/2} - \frac{1}{C} \rho_p^{n+1/2} \right), \quad (48)$$

$$R_2^{n+1/2} = \left(\frac{p(t_{n+1}) - p(t_n)}{\Delta t} - \partial_t p(t_{n+1/2}) \right) + \left(\delta_t \rho_p^n - \partial_t \rho_p(t_{n+1/2}) + A\rho_T^{n+1/2} - \rho_q^{n+1/2} \right), \quad (49)$$

$$R_3^{n+1/2} = \left(\frac{q(t_{n+1}) - q(t_n)}{\Delta t} - \partial_t q(t_{n+1/2}) \right) - (\partial_t \rho_q(t_{n+1/2}) - \delta_t \rho_q^n). \quad (50)$$

在误差方程(45)~(47)的推导过程中，椭圆投影的正交性 $a(\rho_T^{n+1/2}, v_h) = a(\rho_p^{n+1/2}, v_h) = 0$ 起到了关键作用。它使得将精确解分解为 $\Pi_h \bullet + \rho$ 后，所有含双线性形式 $a(\cdot, v_h)$ 的投影误差项(如 $a(\rho_T^{n+1/2}, v_h)$)在方程相减时严格抵消，从而误差方程中不出现 $a(\rho, v_h)$ 形式的项。因此，残差 R_1, R_2, R_3 的定义(48)~(50)中虽然包含投影误差 ρ 及其时间导数，但这些量仅通过 L^2 内积出现在误差方程右端。

进一步，利用定理 4 以及时间导数的投影误差估计得

$$\|\delta_t \rho^n - \partial_t \rho(t_{n+1/2})\| \leq C(h^{k+1} + \Delta t^2), \quad (51)$$

并结合时间离散的 Taylor 展开，可得

$$\|R_1^{n+1/2}\| + \|R_2^{n+1/2}\| + \|R_3^{n+1/2}\| \leq C(h^{k+1} + \Delta t^2). \quad (52)$$

此外，由(45)~(47)中时间导数项的形式，在后续能量估计中还需用到 R_1 和 R_2 的 H_1 范数估计。通过类似的投影误差估计及逆不等式，可得

$$|R_1^{n+1/2}|_1 + |R_2^{n+1/2}|_1 \leq C(h^{k+1} + \Delta t^2). \quad (53)$$

从而综合有

$$\|R_1^{n+1/2}\| + \|R_2^{n+1/2}\| + \|R_3^{n+1/2}\| + |R_1^{n+1/2}|_1 + |R_2^{n+1/2}|_1 \leq C(h^{k+1} + \Delta t^2). \quad (54)$$

定义离散误差能量与稳定性证明(18)相同

$$E_\theta^n = \frac{1}{2} \|\theta_q^n\|^2 + \frac{C}{2b} \|\theta_p^n\|^2 + \frac{C(A^2 + 1)}{4b} \|\theta_T^n\|^2 + \frac{1}{2} |\theta_T^n|_1^2. \quad (55)$$

在(45)~(47)上重复定理 5 证明的(14)~(17)的步骤(取相同检验函数), 得到

$$\frac{E_\theta^{n+1} - E_\theta^n}{\Delta t} = -d|\theta_q|_1^2 - \frac{B}{C}|\theta_T|_1^2 - \frac{B(A^2 + 1)}{2b}\|\theta_T\|^2 + I_{\text{cross}}^\theta + I_{\text{res}}, \quad (56)$$

其中 I_{cross}^θ 与(21)的交叉项结构相同(U, P, Q 换为 $\theta_T, \theta_p, \theta_q$), I_{res} 为残差贡献:

$$I_{\text{res}} = (R_3, \theta_q) + \frac{C}{b}(R_2, \theta_p) + \frac{C(A^2 + 1)}{2b}(R_1, \theta_T) + \frac{1}{C}a(R_1^*, \theta_T). \quad (57)$$

其中最后一项 $a(R_1^*, \theta_T)$ 来自 $|\theta_T|_1^2$ 演化中的残差。由椭圆投影正交性 $a(\rho_T, v_h) = a(\rho_p, v_h) = 0$, 该项中的投影误差部分为零, 仅剩时间截断误差 $O(\Delta t^2)$ 。对 I_{res} 中的 L^2 内积项用 Cauchy-Schwarz 和 Young 不等式:

$$|(R_3, \theta_q)| \leq \frac{1}{2}\|R_3\|^2 + \frac{1}{2}\|\theta_q\|^2, \quad (58)$$

$$\left| \frac{C}{b}(R_2, \theta_p) \right| \leq \frac{C^2}{2b^2}\|R_2\|^2 + \frac{1}{2}\|\theta_p\|^2, \quad (59)$$

$$\left| \frac{C(A^2 + 1)}{2b}(R_1, \theta_T) \right| \leq \frac{C^2(A^2 + 1)^2}{8b^2}\|R_1\|^2 + \frac{1}{2}\|\theta_T\|^2. \quad (60)$$

$\|\theta\|^2$ 项可被 $E_\theta^{n+1/2}$ 吸收(因 E_θ 包含相应范数)。

下面处理交叉项和 $|\theta_p|_1^2$ 。对 I_{cross}^θ 应用与定理 5 交叉项完全相同的估计。定义 $\tilde{E}_\theta^n = E_\theta^n + \delta|\theta_p^n|_1^2$, 利用(46)推出 $\delta_t \theta_p = \theta_q - A\theta_T + R_2$, 从而

$$\frac{|\theta_p^{n+1}|_1^2 - |\theta_p^n|_1^2}{2\Delta t} = a(\theta_q - A\theta_T + R_2, \theta_p) \leq \frac{1}{2}|\theta_q|_1^2 + \frac{1+A}{2}|\theta_p|_1^2 + \frac{A}{2}|\theta_T|_1^2 + C\|R_2\|_1^2. \quad (61)$$

合并估计, 将 E_θ 的演化与 $|\theta_p|_1^2$ 的演化(乘以 2η)相加, 并利用稳定性分析中处理交叉项的方法(即用 Young 不等式将 $ba(\theta_T, \theta_q), ca(\theta_p, \theta_q), \frac{1}{C}a(\theta_p, \theta_T)$ 等吸收到 $-d|\theta_q|_1^2$ 和 $-B|\theta_T|_1^2/C$ 等耗散项中), 可以得到存在常数 $\mu > 0$ 和 $C_R > 0$ 使得

$$\frac{\tilde{E}_\theta^{n+1} - \tilde{E}_\theta^n}{\Delta t} \leq \mu\tilde{E}_\theta^{n+1/2} + C_R(\|R_1\|^2 + \|R_2\|^2 + \|R_3\|^2 + |R_1|_1^2 + |R_2|_1^2). \quad (62)$$

这里 $\tilde{E}_\theta^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\tilde{E}_\theta^{n+1} + \tilde{E}_\theta^n)$, 并且有前文可知 $|R_1|_1$ 已经在 $a(R_1^*, \theta_T)$ 中被椭圆投影正交性处理掉了, 有效的部分只有 $O(\Delta t^2)$ 。取 $\Delta t \leq 1/\mu$, 则

$$\tilde{E}_\theta^{n+1} \leq (1 + 2\mu\Delta t)\tilde{E}_\theta^n + 2C_R\Delta t(\|R^{n+1/2}\|^2 + |R^{n+1/2}|_1^2). \quad (63)$$

记 $R_{\text{total}}^{n+1/2} = \|R_1\|^2 + \|R_2\|^2 + \|R_3\|^2 + |R_1|_1^2 + |R_2|_1^2$ 。

由初始条件 $\theta^0 = 0$ 得 $\tilde{E}_\theta^0 = 0$ 。递推得

$$\tilde{E}_\theta^m \leq \sum_{j=0}^{m-1} 2C_R\Delta t(1 + 2\mu\Delta t)^{m-1-j} R_{\text{total}}^{j+1/2}. \quad (64)$$

由于 $(1 + 2\mu\Delta t)^{m-1-j} \leq e^{2\mu\hat{t}}$, 且 $\sum_{j=0}^{m-1} \Delta t \leq \hat{t}$, 故

$$\tilde{E}_\theta^m \leq Ce^{2\mu\hat{t}} \max_{0 \leq j \leq m-1} R_{\text{total}}^{j+1/2}. \quad (65)$$

代入残差估计得

$$\tilde{E}_\theta^m \leq C(h^{2k+2} + \Delta t^4). \quad (66)$$

最后, 由 E_θ 的正定性(即 $\|\theta_T\|^2 + \|\theta_p\|^2 + \|\theta_q\|^2 \leq CE_\theta$)和 $\tilde{E}_\theta \geq E_\theta$ 得

$$\|\theta_T^m\| + \|\theta_p^m\| + \|\theta_q^m\| \leq C(h^{k+1} + \Delta t^2). \quad (67)$$

结合投影误差 $\|\rho\| \leq Ch^{k+1}$, 即得整体误差估计。

4. 数值实验

为验证本文所提出有限元方法在二维二阶双相滞热传导模型中的有效性及收敛特性, 考虑如下初边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} = 2\Delta T + \Delta \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + f(x, y, t), & (x, y) \in \Omega, t \in (0, 1], \\ T(x, y, t) = e^{0.5t} \sinh(x) \sinh(y), & (x, y) \in \partial\Omega, t \in [0, 1], \\ T(x, y, 0) = \sinh(x) \sinh(y), \quad \frac{\partial T}{\partial t}(x, y, 0) = \frac{1}{2} \sinh(x) \sinh(y), \\ \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(x, y, 0) = \frac{1}{4} \sinh(x) \sinh(y), & (x, y) \in \Omega, \end{cases} \quad (68)$$

其中空间区域 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, Δ 为二维 Laplace 算子。该方程对应标准形式

$AT_t + BT_{tt} + CT_{ttt} = \alpha_0 \Delta T + D\Delta T_t + E\Delta T_{tt} + f$ 的参数取值为 $A = B = C = 1$, $\alpha_0 = 2$, $D = 1$, $E = 1/2$ 。精确解为 $T(x, y, t) = e^{0.5t} \sinh(x) \sinh(y)$, 源项 $f(x, y, t) = -\frac{35}{8}e^{0.5t} \sinh(x) \sinh(y)$ 。空间离散采用有限元方法。

将 $[0, 1] \times [0, 1]$ 划分为 $N \times N$ 的均匀矩形网格, 每个矩形沿对角线剖分为两个三角形单元。时间离散采用 Crank-Nicolson 格式。固定空间网格 $N = 64$, 取时间步长 $\tau = 1/2, 1/4, 1/8, 1/16$ 。表 1 给出了相应的数值误差及时间收敛阶。表 1 显示, 当时间步长减半时, 温度场 T 的 L^2 误差和 L^∞ 误差均稳定地减小为原来的约四分之一, 时间收敛阶稳定在 2 附近。这一结果与 Crank-Nicolson 格式的二阶时间精度高度一致。

Table 1. Time convergence order (fixed spatial grid $N = 64$)

表 1. 时间收敛阶(固定空间网格 $N = 64$)

时间步长	L^2 误差	收敛阶	L^∞ 误差	收敛阶
0.50000	1.2608e-03	--	5.0669e-03	--
0.25000	3.1042e-04	2.01	1.2669e-03	2.00
0.12500	7.3305e-05	2.08	3.1634e-06	2.00
0.06250	1.4606e-05	2.33	7.8894e-07	2.00

图 1(a)给出了时间收敛阶, 误差曲线与斜率为 2 的参考线保持高度平行, 进一步验证了时间离散格式的优异数值性能。

再固定时间步长 $\tau = 10^{-3}$, 取空间网格尺寸 $h = 1/N$, $N = 8, 16, 32, 64$ 。从表 2 和表 3 的数值结果可以看出, 随着空间网格从 $N = 8$ 逐次加密至 $N = 64$, 温度场 T 的 L^2 误差和 L^∞ 误差均呈现出稳定的二阶下降规律。辅助变量 p 和 q 的 L^2 误差同样展现出二阶收敛特性, 验证了降阶系统各分量的一致收敛性。

图 1(b)直观地展示了固定时间步长下的空间收敛行为。从图中可以清晰观察到, 在整个网格加密过

程中($N = 8, 16, 32, 64$), 四条误差曲线几乎严格平行于参考线, 且 $L^2(T)$ 与 $L^\infty(T)$ 曲线几乎重合或保持固定的偏移量, 辅助变量误差与温度场误差同步收敛。这二阶收敛趋势充分验证了有限元空间离散格式对块系统降阶方法的有效性和渐近最优性。

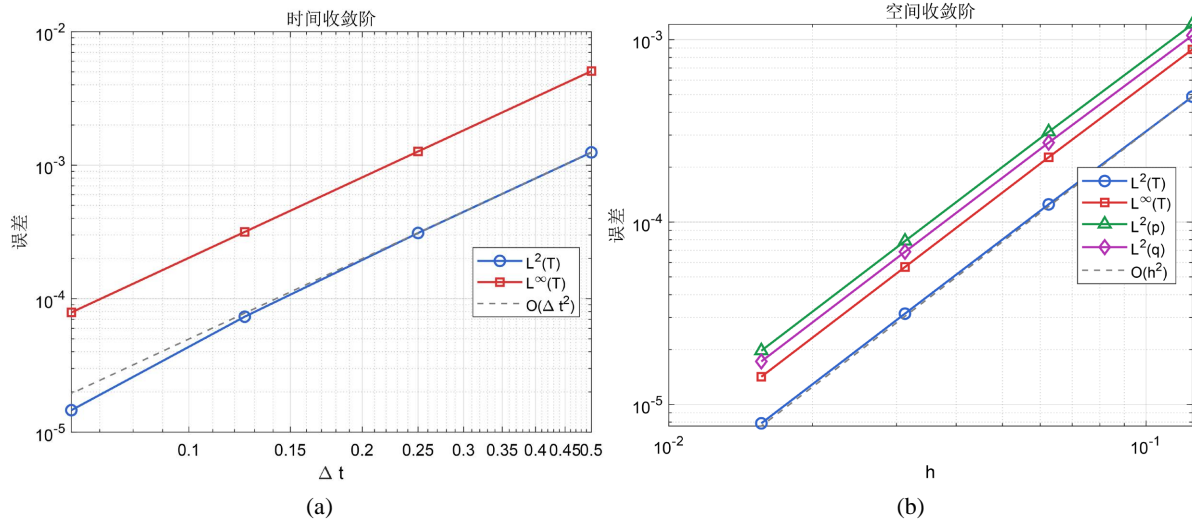


Figure 1. Time convergence order and spatial convergence order. (a) Time convergence order; (b) Spatial convergence under fixed time step

图 1. 时间收敛阶和空间收敛阶。(a) 时间收敛阶; (b) 固定时间步长下的空间收敛

Table 2. Fixing $\tau = 10^{-3}$, the error and convergence order of $L^2(T)$ and $L^\infty(T)$

表 2. 固定 $\tau = 10^{-3}$, $L^2(T)$ 和 $L^\infty(T)$ 的误差与收敛阶

N	h	$L^2(T)$ 误差	收敛阶	$L^\infty(T)$ 误差	收敛阶
8	0.1250	4.8701e-04	--	8.8382e-04	--
16	0.0625	1.2506e-04	1.96	2.2655e-04	1.96
32	0.0312	3.1474e-05	1.99	5.6712e-05	2.00
64	0.0156	7.8787e-06	2.00	1.4182e-05	2.00

Table 3. Fixing $\tau = 10^{-3}$, the error and convergence order of $L^2(p)$ and $L^2(q)$

表 3. 固定 $\tau = 10^{-3}$, $L^2(p)$ 和 $L^2(q)$ 的误差与收敛阶

N	h	$L^2(p)$ 误差	收敛阶	$L^2(q)$ 误差	收敛阶
8	0.1250	1.2135e-03	--	1.05515e-03	--
16	0.0625	3.1244e-04	1.96	2.7251e-04	1.95
32	0.0312	7.8684e-05	1.99	6.8692e-05	1.99
64	0.0156	1.9705e-05	2.00	1.7211e-05	2.00

图 2 展示了在终止时刻 $T = 1$ 、网格参数 $N = 64$ 条件下数值解与精确解的三维表面图对比。左图为有限元数值解 $T_h(x, y, 1)$ 的三维表面图, 右图为精确解 $T(x, y, 1) = e^{0.5} \sinh(x) \sinh(y)$ 的三维表面图。从图中

可以清晰观察到，数值解与精确解在定性形态上完全一致：二者均呈现从原点(0,0)向对角点(1,1)单调递增的指数型曲面分布，在区域中心附近曲率变化平缓，在边界附近梯度增大。数值解准确捕捉了精确解的空间分布特征和边界值特性，没有出现可见的相位偏移或幅值衰减。

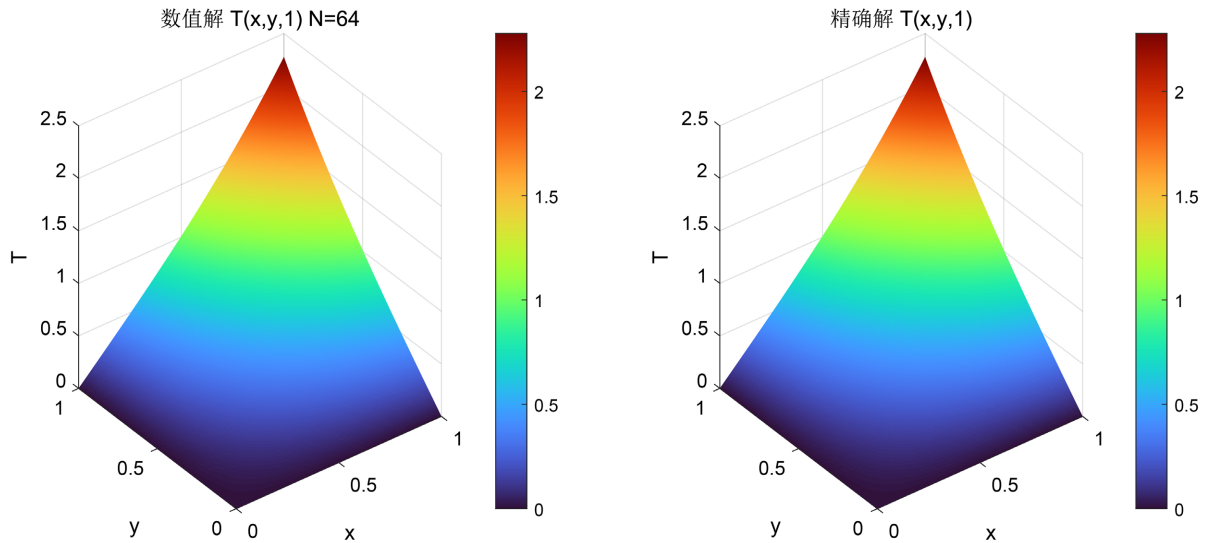


Figure 2. Comparison between numerical solution and exact solution
图 2. 数值解与精确解对比

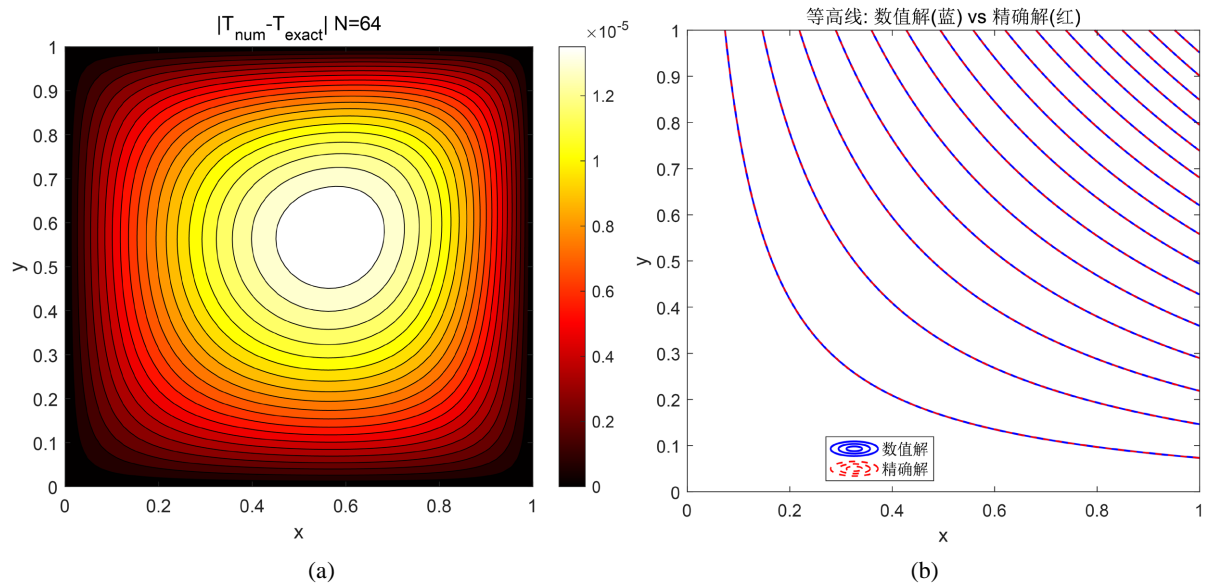


Figure 3. Comparison of two-dimensional numerical solution error and temperature field. (a) Distribution of the absolute value of the difference between the numerical solution and the exact solution; (b) Temperature field contour comparison chart
图 3. 二维数值解误差与温度场对比。(a) 数值解与精确解之差的绝对值分布；(b) 温度场等高线对比图

图 3(a)绘制了数值解与精确解之差的绝对值分布 $|T_h - T_{ex}|$ 的二维云图。误差分布呈现出对称的四角结构，在区域四角(靠近(1,1)及其对称位置)误差幅值相对较大，而在中心区域误差较小。这一分布特征与双曲正弦函数 $\sinh(x)\sinh(y)$ 在边界处的梯度特性相一致，验证了数值方法在实际计算中的高精度特性。

图 3(b)给出了温度场等高线对比图,蓝色实线为数值解的等高线,红色虚线为精确解的对应等高线。从图中可见,两组等高线几乎完全重合,没有出现可分辨的偏移或形变,即使在梯度较大的区域(靠近(1,1)角点)仍保持高度一致。这一结果进一步验证了数值方法在捕捉解的局部特征和全局形态方面的优异性能。

为展示方法的普适性,评估双相滞后模型中松弛时间比值 $\frac{\tau_q}{\tau_T}$ 对有限元-数值解收敛行为的影响,再取两组物理参数: $(\tau_q, \tau_T) = (1,1)$ 与 $(\tau_q, \tau_T) = (1,0.5)$, 固定热扩散系数 $\alpha = 1$ 及 $\alpha_0 = 2$ 。空间离散依旧采用均匀矩形网格,时间离散采用二阶 Crank-Nicolson 格式。固定时间步长 $\Delta t = 10^{-3}$, 加密空间网格 $N = 8,16,32,64$, 计算 L^2 与 L^∞ 误差及收敛阶。

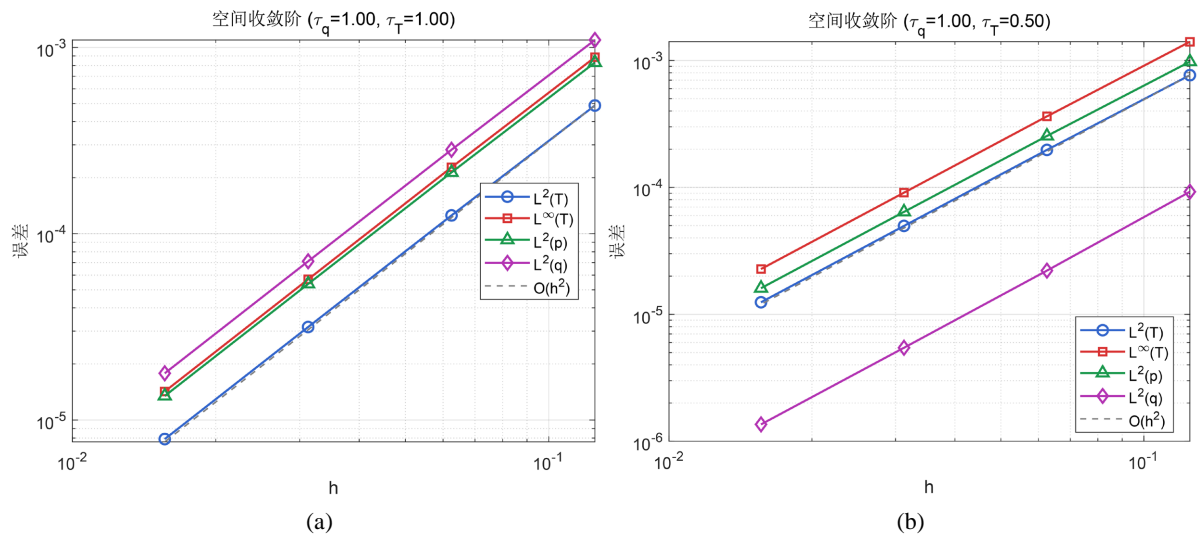


Figure 4. Comparison of spatial convergence order results for $(\tau_q, \tau_T) = (1,1)$ and $(\tau_q, \tau_T) = (1,0.5)$. (a) $(\tau_q, \tau_T) = (1,1)$ spatial convergence order; (b) $(\tau_q, \tau_T) = (1,0.5)$ spatial convergence order

图 4. $(\tau_q, \tau_T) = (1,1)$ 和 $(\tau_q, \tau_T) = (1,0.5)$ 空间收敛阶结果对比。(a) $(\tau_q, \tau_T) = (1,1)$ 空间收敛阶; (b) $(\tau_q, \tau_T) = (1,0.5)$ 空间收敛阶

图 4(a)和图 4(b)分别对应参数组 1 与参数组 2 的误差曲线,由结果可见两组参数下所有误差曲线均几乎严格平行于参考线 $O(h^2)$ 。这说明无论 τ_T 取 1 还是 0.5, 空间离散均保持二阶精度, 松弛时间比值未改变格式的基本收敛速率。在相同网格尺寸下(如 $h = 1/64$), 参数组 2 ($\tau_T = 0.5$)的 $L^2(T)$ 误差约为 7.9×10^{-6} , 参数组 1 的对应误差为 8.8×10^{-6} , 两者非常接近且量级相同。值得注意的是, 在较粗网格($h = 1/8$)时, 两组误差几乎重合; 随着网格加密, 参数组 2 的误差略微低于参数组 1, 但差值始终在 10% 以内。该微小偏差可归因于 τ_T 变化导致源项系数及方程耗散特性的改变, 但并未破坏误差主导项的渐近行为。因此, 本文数值方法对双相滞后模型中的参数变化具有良好鲁棒性, 其收敛性质是参数统一的。

参考文献

- [1] Deng, D., Jiang, Y. and Liang, D. (2017) High-Order Finite Difference Methods for a Second Order Dual-Phase-Lagging Models of Microscale Heat Transfer. *Applied Mathematics and Computation*, **309**, 31-48. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.03.035>
- [2] Askarizadeh, H., Baniasadi, E. and Ahmadikia, H. (2017) Equilibrium and Non-Equilibrium Thermodynamic Analysis of High-Order Dual-Phase-Lag Heat Conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **104**, 301-309. <https://doi.org/10.1016/j.jheatmasstransfer.2016.08.060>

-
- [3] Zhou, J., Zhang, Y. and Chen, J.K. (2009) An Axisymmetric Dual-Phase-Lag Bioheat Model for Laser Heating of Living Tissues. *International Journal of Thermal Sciences*, **48**, 1477-1485. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2008.12.012>
- [4] Wu, W. and Shu, C. (2025) Numerical Simulations of Non-Fourier Heat Transfer Using Local Discontinuous Galerkin Methods. *Applied Thermal Engineering*, **281**, Article 128676. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2025.128676>
- [5] Majchrzak, E. and Mochnacki, B. (2018) Dual-Phase Lag Model of Thermal Processes in a Multi-Layered Microdomain Subjected to a Strong Laser Pulse Using the Implicit Scheme of FDM. *International Journal of Thermal Sciences*, **133**, 240-251. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2018.07.030>
- [6] Cabrera, J., Castro, M.A., Rodríguez, F. and Martín, J.A. (2013) Difference Schemes for Numerical Solutions of Lagging Models of Heat Conduction. *Mathematical and Computer Modelling*, **57**, 1625-1632. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.10.048>
- [7] Yang, Z., Wang, Z., Tian, S. and Chen, X. (2019) Analysis and Modelling of Non-Fourier Heat Behavior Using the Wavelet Finite Element Method. *Materials*, **12**, Article 1337. <https://doi.org/10.3390/ma12081337>
- [8] 冯康. 基于变分原理的差分格式[J]. 应用数学与计算数学, 1965, 2(4): 238-262.
- [9] 刁群, 石东洋, 张芳. Sobolev 方程一个新的 H1-Galerkin 混合有限元分析[J]. 高校应用数学学报: A 辑, 2016, 31(2): 215-224.
- [10] 李臻臻, 李宏. 对流扩散方程的时空间断有限元方法[J]. 高校应用数学学报: A 辑, 2012, 27(3): 283-292.
- [11] Garling, D.J.H. (2007) *Inequalities: A Journey into Linear Analysis*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511755217>
- [12] Reddy, K.N. (1980) Integral Inequalities and Applications. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **21**, 13-20. <https://doi.org/10.1017/s0004972700011254>.
- [13] Ciarlet, P.G. (2002) *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics.