Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(5), 673-685
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.155259

Hans汉斯

绝对破产下一类带干扰复合Poisson-Geometric过程风险模型的分红问题

孔梁光，张　申，陆健云，陈雪丽，赵金娥*

红河学院数理与统计学院，云南 蒙自

收稿日期：2026年4月28日；录用日期：2026年5月22日；发布日期：2026年5月29日

摘　要

对贷款和随机扰动下索赔次数为复合Poisson-Geometric过程风险模型的分红问题进行研究，得到了绝对破产前分红总量现值的期望、矩母函数以及n阶原点矩满足的积分–微分方程和边界条件，并给出这些积分–微分方程和边界条件的经济学直觉解释，借助confluent hypergeometric函数求出了个体索赔额服从指数分布时的解析表达式。

关键词

绝对破产，分红总量，Poisson-Geometric过程，Brown运动，合流超几何函数

The Dividend Problems in the Perturbed Poisson-Geometric Processes Risk Model under Absolute Ruin

Liangguang Kong, Shen Zhang, Jianyun Lu, Xueli Chen, Jin'e Zhao*

School of Mathematics, Physics and Statistics, Honghe University, Mengzi Yunnan

Received: April 28, 2026; accepted: May 22, 2026; published: May 29, 2026

Abstract

In this paper, we consider the dividend payments problems in a risk model perturbed by diffusion with a constant barrier dividend strategy and debit interest, in which the claim counting process is a compound Poisson-Geometric process. We derive a system of integro-differential equations with

*通讯作者。

文章引用: 孔梁光, 张申, 陆健云, 陈雪丽, 赵金娥. 绝对破产下一类带干扰复合 Poisson-Geometric 过程风险模型的分红问题[J]. 应用数学进展, 2026, 15(5): 673-685. DOI: 10.12677/aam.2026.155259

boundary conditions satisfied by the moment generating function, the expectation and the *n*th moment of the cumulative discounted dividend payments until absolute ruin. Furthermore, we give intuitive economic explanations for these integral-differential equations and boundary conditions. Meanwhile, we obtain the explicit expressions when the claim sizes are exponentially distributed by the confluent hypergeometric function.

Keywords

Absolute Ruin, Cumulative Dividend Payments, Poisson-Geometric Process, Brown Motion, Confluent Hypergeometric Function

1. 引言

保险风险理论是当前精算界和数学界及保险业研究的热点课题，也是近代应用统计学的一个重要分支，其主要研究和处理保险实务中的随机风险模型，并从定量的角度分析保险公司投资组合的资金流动，即直至破产时的分红总量。

自 De Finetti (1957) [1]首次提出分红策略以来，考虑分红的风险模型引起了众多学者的广泛关注，并得到了许多有现实意义的研究成果。Lin *et al*. (2003) [2]对障碍分红策略下经典复合 Poisson 风险模型的期望折现罚金函数及指数索赔和混合指数索赔下一些与破产相关的特征量进行了研究。Tan *et al*. (2011) [3]采用迭代方法讨论了障碍分红策略下 Sparre Andersen 风险模型直至破产前的期望折现分红总量以及 Gerber-Shiu 函数，并通过递推方法得到了直至破产前折现分红总量的任意阶矩。Zhang (2020) [4]研究了带有双边跳跃 Erlang(n)分红风险模型的期望折现罚金函数和直至破产前分红总量现值的各阶矩，并通过数值算例给出了期望折现罚金函数和分红总量期望现值的具体表达式。谢佳益和张志民(2025) [5]利用 COS 方法讨论了谱负 Lévy 风险模型分红与破产相关函数的统计估计，并推导了估计量的收敛速率。赵金娥等(2023) [6]对投资利率和障碍分红策略下保费收入为复合 Poisson 过程风险模型破产前的累积分红现值进行了研究，并通过数值算例分析了初始资本、红利界限及投资利率对累积分红期望现值的影响。这些研究不仅进一步充实了保险风险理论的现有成果，也为公司管理层在平衡日常运营与股东利益、制定红利分配策略时提供了理论依据与决策参考。

在上述研究中，通常假定当保险公司的盈余小于 0 时公司发生破产，这并不符合保险公司的实际运营情况。事实上当保险公司出现赤字时，可借助银行贷款、保费收入偿还债务等途径缓解资金缺口。保险公司有可能扭亏为盈，但是当赤字低于某一特定阈值时，负盈余便无法恢复为正值，此时称绝对破产发生。Cai Jun (2007) [7]探究了保险公司的资产盈余为负时通过贷款利率 β 维持经营，并对模型的 Gerber-Shiu 函数和绝对破产概率进行了研究。Gerber 和 Yang (2007) [8]讨论了借贷利率下带干扰风险模型的绝对破产概率；Yuen *et al*. (2008) [9]和 Wang (2009) [10]对贷款利息下经典分红风险模型的期望折现罚金函数和直至绝对破产前总分红量的期望现值进行了研究。李帅(2023) [11]利用动态规划原理研究了贷款利息和障碍分红策略下经典风险模型的最优分红与注资问题，其它有关绝对破产风险模型的研究可见文献[12]-[14]。

在以上考虑的风险模型中，保险公司的索赔次数通常用复合 Poisson 过程来描述。而 Poisson 分布具

有“方差与均值相等”的统计特征，这意味着“事故发生即赔付，即赔付次数等于风险事件数”。但在保险实务中，自保险公司推出免赔额制度和无赔款折扣(NCD)等制度后，赔付次数显著小于风险事件数。针对这一问题，毛泽春[15]和廖基定[16]提出的复合 Poisson-Geometric 过程有效解决了风险事件和赔付事件等价的问题，并且给出了有关 Gerber-Shiu 函数及与破产相关特征量的一些研究成果；侯致武等在此基础上进一步考虑了投资收益下复合 Poisson-Geometric 过程风险模型的 Gerber-Shiu 函数和破产问题[17]-[20]，但是到目前为止，尚未有关于该模型在绝对破产方面的研究。

为使模型更接近保险公司的实际经营运作，本文在文献[9]的基础上将索赔过程由复合 Poisson 过程推广为复合 Poisson-Geometric 过程，并在模型中考虑随机干扰因素，建立带干扰的复合 Poisson-Geometric 分红风险模型，然后运用盈余过程的强 Markov 性得到了分红总量现值的期望、矩母函数、n 阶原点矩；最后借助 confluent hypergeometric 函数给出指数索赔下分红总量现值矩的显示表达式。

2. 模型介绍

定义 1.1 设 $b\ (u\le b)$ 为红利界限，当保险公司的资产盈余超过 b 时，超出部分全部用来分红；当资产盈余介于 0 和 b 之间时，不进行分红；当资产盈余小于 0 时，公司以利率 β 借入资金；当资产盈余小于 $-c/\beta$ 时，绝对破产发生。于是保险公司的盈余过程 $\{U_b(t),t\ge 0\}$ 可表示为：

$$\mathrm{d}U_b(t)=\begin{cases}-\mathrm{d}S(t)+\sigma\mathrm{d}W(t), & U_b(t)\ge b\\ c\mathrm{d}t-\mathrm{d}S(t)+\sigma\mathrm{d}W(t), & 0\le U_b(t)<b\\ \left[c+\beta U_b(t)\right]\mathrm{d}t-\mathrm{d}S(t)+\sigma\mathrm{d}W(t), & -c/\beta<U(t)<0\end{cases}$$

其中 $U_b(0)=u$ 是保险公司的初始资本，c 为保费率，$S(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}X_i$ 是保险公司到时刻 t 为止支付的总索赔额，$N(t)$ 为发生的索赔次数，X_i 表示第 i 次的索赔额，$\sigma\ge 0$ 是扩散系数。且

(1) $\{N(t),t\ge 0\}$ 是服从参数为 $(\lambda,\rho)(0\le\rho<1)$ 的 Poisson-Geometric 过程；

(2) $\{X_i,i\ge 1\}$ 是独立同分布随机变量序列，其分布函数为 $F(x)$，密度函数为 $f(x)$，且 $F^{*k}(x)$ 与 $f^{*k}(x)$ 分别是 $F(x)$ 和 $f(x)$ 的 k 重卷积，并记 $F_\rho(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(1-\rho)\rho^{k-1}F^{*k}(x)$，$f_\rho(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(1-\rho)\rho^{k-1}f^{*k}(x)$，$\overline{F}_\rho(x)=1-F_\rho(x)$；

(3) $\{W(t),t\ge 0\}$ 是一标准的 Brown 运动；

(4) $\{X_i,i\ge 1\}$、$\{N(t),t\ge 0\}$、$\{W(t),t\ge 0\}$ 相互独立。

定义 1.2 设 $D(t)$ 为 $[0,t]$ 时间内保险公司的分红总量，定义

$$D_{u,b}=\int_0^{\tau_b}\mathrm{e}^{-\delta t}\mathrm{d}D(t),$$

为直至 τ_b 时分红总量的现值，其中 $\tau_b=\inf\{t\ge 0,U_b(t)\le -c/\beta\}$ 为绝对破产时刻，$\delta\ge 0$ 为折现因子，且对于 $-c/\beta<u<b$，定义 $D_{u,b}$ 的期望、矩母函数和 n 阶原点矩分别为：

$$V(u,b)=E\left[D_{u,b}\right],$$

$$M(u,y,b)=E\left[\mathrm{e}^{yD_{u,b}}\right],$$

$$V_n(u,b)=E\left[D_{u,b}^n\right],\ \ n\in N,$$

其中 $V_0(u,b)\equiv 1$，显然 $V_1(u,b)=V(u,b)$。

引理 1.1 [15]设 $\{N(t),t\ge 0\}$ 是服从参数为 (λ,ρ) 的 Poisson-Geometric 过程，则当 $t\to 0$ 时，有

$$\mathrm{P}\left(N(t)=0\right)=\mathrm{e}^{-\lambda t}=1-\lambda t+o(t),$$

$$\mathrm{P}\left(N(t)=k\right)=\theta\rho^{k}t+A_{k}(t)o(t),\ k=1,2,3,\cdots,$$

其中 $\theta=\dfrac{\lambda(1-\rho)}{\rho}$（若 $\rho=0$，则 $\theta=\lambda$），$A_k(t)=\rho^k+(k-1)\left[\rho(1+\theta t)\right]^{k-2}$，且 $\sum_{k=0}^{\infty}A_k(t)$ 一致收敛，$o(t)$ 与 k 无关。

3. 积分－微分方程

考虑到当 $-c/\beta<u<b$ 时，对于 u 在不同范围的取值，绝对破产前分红总量现值 $D_{u,b}$ 的矩母函数 $M(u,y,b)$ 的表达式也不同，故定义

$$M(u,y,b)=\begin{cases}M_1(u,y,b), & -c/\beta<u<0\\ M_2(u,y,b), & 0\le u<b\end{cases}$$

定理 2.1 当 $-c/\beta<u<0$ 时，$M_1(u,y,b)$ 满足以下的积分－微分方程：

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 M_1(u,y,b)}{\partial u^2}+(\beta u+c)\frac{\partial M_1(u,y,b)}{\partial u}-\delta y\frac{\partial M_1(u,y,b)}{\partial y}-\lambda M_1(u,y,b)\\&+\lambda\int_0^{u+c/\beta}M_1(u-x,y,b)f_\rho(x)\mathrm{d}x+\lambda\bar{F}_\rho(u+c/\beta)=0,\end{aligned}\tag{3.1}$$

当 $0\le u<b$ 时，$M_2(u,y,b)$ 满足下面的积分－微分方程：

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 M_2(u,y,b)}{\partial u^2}+c\frac{\partial M_2(u,y,b)}{\partial u}-\delta y\frac{\partial M_2(u,y,b)}{\partial y}-\lambda M_2(u,y,b)\\&+\lambda\int_0^{u}M_2(u-x,y,b)f_\rho(x)\mathrm{d}x+\lambda\int_u^{u+c/\beta}M_1(u-x,y,b)f_\rho(x)\mathrm{d}x+\lambda\bar{F}_\rho(u+c/\beta)=0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

并满足边界条件：

$$M_1(-c/\beta,y,b)=1\tag{3.3}$$

$$\left.\frac{\partial M_2(u,y,b)}{\partial u}\right|_{u=b}=yM_2(b,y,b)\tag{3.4}$$

$$M_1(0^-,y,b)=M_2(0,y,b)\tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}&\left.\left(\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 M_1(u,y,b)}{\partial u^2}+c\frac{\partial M_1(u,y,b)}{\partial u}-\delta y\frac{\partial M_1(u,y,b)}{\partial y}\right)\right|_{u=0^-}\\&=\left.\left(\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 M_2(u,y,b)}{\partial u^2}+c\frac{\partial M_2(u,y,b)}{\partial u}-\delta y\frac{\partial M_2(u,y,b)}{\partial y}\right)\right|_{u=0}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

证明：当 $-c/\beta<u<0$ 时，在非常小的时间区间 $(0,t)$ 内，由引理 1.1 及盈余过程 $\{U_b(t),t\ge0\}$ 的强马尔可夫性，有

$$\begin{aligned}M_1(u,y,b)=&\left(1-\lambda t+o(t)\right)M_1\left(u\mathrm{e}^{\beta t}+c\frac{\mathrm{e}^{\beta t}-1}{\beta}+\sigma W(t),y\mathrm{e}^{-\delta t},b\right)\\&+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_0^{u\mathrm{e}^{\beta t}+c\frac{\mathrm{e}^{\beta t}-1}{\beta}+\sigma W(t)+c/\beta}M_1\left(u\mathrm{e}^{\beta t}+c\frac{\mathrm{e}^{\beta t}-1}{\beta}+\sigma W(t)-x,y\mathrm{e}^{-\delta t},b\right)\mathrm{d}F^{*k}(x)\right.\\&\left.+\int_{u\mathrm{e}^{\beta t}+c\frac{\mathrm{e}^{\beta t}-1}{\beta}+\sigma W(t)+c/\beta}^{\infty}\mathrm{d}F^{*k}(x)\right]\left[\theta\rho^k t+A_k(t)o(t)\right],\end{aligned}\tag{3.7}$$

由 Taylor 展式，有

$$M_1\left(h_0(t,u), y\mathrm{e}^{-\delta t}, b\right) = M_1(u,y,b) + (\beta u + c)t\frac{\partial M_1(u,y,b)}{\partial u} - \delta yt\frac{\partial M_1(u,y,b)}{\partial y} + \frac{\sigma^2}{2}t\frac{\partial^2 M_1(u,y,b)}{\partial u^2} + o(t),$$

将上式代入式(3.7)，并在两边都除以 t，然后再令 $t \to 0$，得

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 M_1(u,y,b)}{\partial u^2} + (\beta u + c)\frac{\partial M_1(u,y,b)}{\partial u} - \delta y\frac{\partial M_1(u,y,b)}{\partial y} - \lambda M_1(u,y,b) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_0^{u+c/\beta} M_1(u-x,y,b)\mathrm{d}F^{*k}(x) + \int_{u+c/\beta}^{\infty}\mathrm{d}F^{*k}(x)\right]\theta\rho^k = 0,$$

将 $\theta = \frac{\lambda(1-\rho)}{\rho}$ 代入上式，并运用级数的一致收敛性，即得式(3.1)。

类似地，当 $0 \le u < b$ 时，在非常小的时间区间 $(0,t)$ 内，有

$$\begin{aligned} M_2(u,y,b) &= \left(1-\lambda t + o(t)\right)M_2\left(u+ct+\sigma W(t), y\mathrm{e}^{-\delta t}, b\right) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_0^{u+ct+\sigma W(t)} M_2\left(u+ct+\sigma W(t)-x, y\mathrm{e}^{-\delta t}, b\right)\mathrm{d}F^{*k}(x)\right. \\ &+ \int_{u+ct+\sigma W(t)}^{u+ct+\sigma W(t)+c/\beta} M_1\left(u+ct+\sigma W(t)-x, y\mathrm{e}^{-\delta t}, b\right)\mathrm{d}F^{*k}(x) \\ &\left.+ \int_{u+ct+\sigma W(t)+c/\beta}^{\infty}\mathrm{d}F^{*k}(x)\right]\left[\theta\rho^k t + A_k(t)o(t)\right], \end{aligned}$$

类似于式(3.1)的推导即得式(3.2)。

若 $u = -c/\beta$，绝对破产发生，此刻保险公司没有红利支付，所以边界条件(3.3)成立。

当 $u = b$ 时，有

$$\begin{aligned} M_2(b,y,b) &= \left(1-\lambda t + o(t)\right)\mathrm{e}^{yct}M_2\left(b+\sigma W(t), y\mathrm{e}^{-\delta t}, b\right) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_0^{b+\sigma W(t)} M_2\left(b+\sigma W(t)-x, y\mathrm{e}^{-\delta t}, b\right)\mathrm{d}F^{*k}(x)\right. \\ &+ \int_{b+\sigma W(t)}^{b+\sigma W(t)+c/\beta} M_1\left(b+\sigma W(t)-x, y\mathrm{e}^{-\delta t}, b\right)\mathrm{d}F^{*k}(x) \\ &\left.+ \int_{b+\sigma W(t)+c/\beta}^{\infty}\mathrm{d}F^{*k}(x)\right]\left[\theta\rho^k t + A_k(t)o(t)\right], \end{aligned} \tag{3.8}$$

利用类似的方法，由式(3.8)可得

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 M_2(b,y,b)}{\partial b^2} - \delta y\frac{\partial M_2(b,y,b)}{\partial y} + (yc-\lambda)M_2(b,y,b) \\ &+ \lambda\left[\int_0^b M_2(b-x,y,b)f_\rho(x)\mathrm{d}x + \int_b^{b+c/\beta} M_1(b-x,y,b)f_\rho(x)\mathrm{d}x + \bar{F}_\rho(b+c/\beta)\right] = 0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

在式(3.2)中令 $u \uparrow b$，并与式(3.9)进行比较即得边界条件(3.4)。

当 $-c/\beta < u < 0$ 时，设 t_0 为盈余由 u 首次到达 0 的时刻，则由盈余过程 $\{U_b(t), t \ge 0\}$ 的马氏性，有

$$\begin{aligned} M_1(u,y,b) &= E\left[\mathrm{I}(t_0 < \tau_b)\mathrm{e}^{yD_{u,b}}\right] + E\left[\mathrm{I}(t_0 \ge \tau_b)\mathrm{e}^{yD_{u,b}}\right] \\ &= E\left[\mathrm{I}(t_0 < \tau_b)M_2\left(0, y\mathrm{e}^{-\delta t_0}, b\right)\right] + \mathrm{P}(t_0 \ge \tau_b) \\ &= M_2(0,y,b)E\left[\mathrm{e}^{-\delta t_0}\mathrm{I}(t_0 < \tau_b)\right] + \mathrm{P}(t_0 \ge \tau_b) \\ &\le M_2(0,y,b) + \mathrm{P}(t_0 \ge \tau_b), \end{aligned} \tag{3.10}$$

类似地，有

$$\begin{aligned}M_1(u,y,b)&\ge E\left[\mathrm{I}(t_0<\tau_b,t_0=t_0')\mathrm{e}^{yD_{u,b}}\right]+E\left[\mathrm{I}(t_0\ge\tau_b)\mathrm{e}^{yD_{u,b}}\right]\\&=E\left[\mathrm{I}(t_0<\tau_b,t_0=t_0')M_2\left(0,y\mathrm{e}^{-\delta t_0'},b\right)\right]+\mathrm{P}(t_0\ge\tau_b)\\&=M_2(0,y,b)\mathrm{e}^{-\delta t_0'}\mathrm{P}(T_1>t_0')+\mathrm{P}(t_0\ge\tau_b)\\&\ge\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)t_0'}M_2(0,y,b)+\mathrm{P}(t_0\ge\tau_b),\end{aligned}\tag{3.11}$$

其中，t_0' 为索赔发生前盈余由 u 首次到达 0 的时刻，而 T_1 是首次索赔发生的时间。由于当 $u\uparrow 0$ 时，$\tau_0\to 0$，$t_0\to 0$，且 $\lim\limits_{u\uparrow 0}\mathrm{P}(\tau_0\ge\tau_b)=0$，于是在式(3.10)和式(3.11)中令 $u\uparrow 0$，可得边界条件(3.5)。

在式(3.1)中令 $u\uparrow 0$，而在式(3.2)中令 $u\downarrow 0$，并结合边界条件(3.5)，即得边界条件(3.6)。

注：当 $\rho=0$ 时，式(3.1)~(3.4)变为文献[12]中的式(3.1)~(3.3)，而式(3.5)为文献[12]中的定理 3.2；当 $\rho=0$ 且 $\sigma=0$ 时，式(3.1)~(3.4)为文献[10]中的式(1)~(4)，而式(3.5)为文献[10]中的定理 2.2；当 $\rho=0$，$\sigma=0$ 且 $\beta\to\infty$ (即 $-c/\beta\to 0$)时，式(3.1)~(3.4)为文献[21]中的式(19)~(21)。

记 $V_n(u,b)=\begin{cases}V_{n1}(u,b), & -c/\beta<u<0\\ V_{n2}(u,b), & 0\le u<b\end{cases}$，则有

定理 2.2 当 $-c/\beta<u<0$ 时，绝对破产前分红总量现值 $D_{u,b}$ 的 n 阶原点矩 $V_{n1}(u,b)$ 满足：

$$\frac{\sigma^2}{2}V_{n1}''(u,b)+(\beta u+c)V_{n1}'(u,b)-(\lambda+n\delta)V_{n1}(u,b)+\lambda\int_0^{u+c/\beta}V_{n1}(u-x,b)f_\rho(x)\mathrm{d}x=0\tag{3.12}$$

当 $0\le u<b$ 时，绝对破产前分红总量现值 $D_{u,b}$ 的 n 阶原点矩 $V_{n2}(u,b)$ 满足：

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma^2}{2}V_{n2}''(u,b)+cV_{n2}'(u,b)-(\lambda+n\delta)V_{n2}(u,b)+\lambda\int_0^{u}V_{n2}(u-x,b)f_\rho(x)\mathrm{d}x\\&+\lambda\int_u^{u+c/\beta}V_{n1}(u-x,b)f_\rho(x)\mathrm{d}x=0,\end{aligned}\tag{3.13}$$

且满足边界条件：

$$V_{n1}(-c/\beta,b)=0,\tag{3.14}$$

$$V_{n2}'(u,b)\big|_{u=b}=nV_{n-1,2}(b,b),\tag{3.15}$$

$$V_{n1}(0^-,b)=V_{n2}(0,b),\tag{3.16}$$

$$\frac{\sigma^2}{2}V_{n1}''(0^-,b)+cV_{n1}'(0^-,b)=\frac{\sigma^2}{2}V_{n2}''(0,b)+cV_{n2}'(0,b),\tag{3.17}$$

$$V_{n1}''(-c/\beta,b)=0.\tag{3.18}$$

证明：将 $M(u,y,b)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{V_n(u,b)}{n!}y^n$ 代入式(3.1)~(3.6)并比较 $y^n\left(n\in\mathrm{N}^+\right)$ 的系数即得式(3.12)~(3.17)。在式(3.12)中令 $u\downarrow -c/\beta$，并结合边界条件(3.14)可得边界条件(3.18)。

注：当 $\rho=0$ 时，式(3.12)~(3.16)变为文[12]中的式(3.6)~(3.10)；当 $\rho=0$ 且 $\sigma=0$ 时，式(3.12)~(3.16)为文[10]中的式(15)~(20)；当 $\rho=0$，$\sigma=0$ 且 $\beta\to\infty$ (即 $-c/\beta\to 0$)时，式(3.12)、(3.13)和(3.15)为文[21]中的式(22)和式(24)。

当 $n=1$ 时，由定理 2.2，有

定理 2.3 当 $-c/\beta<u<0$ 时，绝对破产前分红总量 $D(t)$ 的期望现值 $V_{11}(u,b)$ 满足：

$$\frac{\sigma^2}{2}V_{11}''(u,b)+(\beta u+c)V_{11}'(u,b)-(\lambda+\delta)V_{11}(u,b)+\lambda\int_0^{u+c/\beta}V_{11}(u-x,b)f_\rho(x)\mathrm{d}x=0, \tag{3.19}$$

当 $0\le u<b$ 时，绝对破产前分红总量 $D(t)$ 的期望现值 $V_{12}(u,b)$ 满足：

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma^2}{2}V_{12}''(u,b)+cV_{12}'(u,b)-(\lambda+\delta)V_{12}(u,b)+\lambda\int_0^{u}V_{12}(u-x,b)f_\rho(x)\mathrm{d}x\\&+\lambda\int_u^{u+c/\beta}V_{11}(u-x,b)f_\rho(x)\mathrm{d}x=0,\end{aligned} \tag{3.20}$$

相应的边界条件为

$$V_{11}(-c/\beta,b)=0, \tag{3.21}$$

$$V_{12}'(u,b)\big|_{u=b}=1, \tag{3.22}$$

$$V_{11}(0^-,b)=V_{12}(0,b), \tag{3.23}$$

$$\frac{\sigma^2}{2}V_{11}''(0^-,b)+cV_{11}'(0^-,b)=\frac{\sigma^2}{2}V_{12}''(0,b)+cV_{12}'(0,b), \tag{3.24}$$

$$V_{11}''(-c/\beta,b)=0. \tag{3.25}$$

4. 关键方程与边界条件的经济学含义

下面对定理 2.1~2.3 中的积分－微分方程及其边界条件给出金融经济学视角的阐释，以增强模型的可读性与经济内涵。

4.1. 积分－微分方程的经济学含义

本文所构建的积分－微分方程体系，本质上是对带扩散扰动的 Poisson-Geometric 风险模型下“绝对破产前累积分红现值”这一随机变量的概率特征与经济行为的数学刻画，其各项的经济学含义如下：

扩散项 $\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 M}{\partial u^2}$ (或 $\frac{\sigma^2}{2}V_n''$)：表示资产或市场环境的波动带来的不确定性影响。

漂移项 $(\beta u+c)\frac{\partial M}{\partial u}$ (或 $(\beta u+c)V_n'$)：表示当 $u<0$ 时，公司处于借贷状态，保费收入需优先偿还以利率 β 计息的债务，净现金流为 $\beta u+c$ (注意 $u<0$，故 βu 为负)；当 $u\ge 0$ 时，公司恢复正常运营，漂移项简化为 c，即仅由保费收入推动盈余增长。

折现项 $-\delta y\frac{\partial M}{\partial y}$ (或 $-n\delta V_n$)：表示资金的时间价值。未来分红需按无风险利率(或公司要求的回报率) δ 折现到当前；n 阶矩中 $n\delta$ 反映高阶矩对时间价值更敏感。

跳跃项 $\lambda\left[M-\int\cdot f_\rho(x)\mathrm{d}x\right]$ (或 $\lambda\left[V_n-\int\cdot f_\rho(x)\mathrm{d}x\right]$)：表示保险索赔的冲击效应。$\lambda$ 是 Poisson-Geometric 过程的索赔到达率，积分项表示索赔发生后盈余减少 x 时累积分红现值矩的期望，二者差值体现索赔发生会降低盈余，进而降低累积分红现值。

4.2. 边界条件的经济学含义

(1) 绝对破产处的吸收边界条件

边界条件(3.3)、(3.14)和(3.21)表示当盈余降至绝对破产水平 $-c/\beta$ 时，公司资不抵债且无法通过借贷继续经营，此时未来的分红现值恒为 0，故其矩母函数退化为 1，各阶矩均为 0，这是自然的“吸收边界”条件。

边界条件(3.18)和(3.25)表示在吸收边界附近，价值函数的曲率消失。直观上，一旦盈余接近绝对破产点，破产的确定性趋于 1，任何微小的盈余波动都不再改变“分红价值为 0”这一事实。因此，价值函数在边界附近以线性(平坦)方式趋近于 0，这排除了通过无限放大波动来获取套利收益的可能性，确保了边界处的数学正则性与经济合理性。

(2) 分红边界处的平滑粘贴条件

边界条件(3.4)、(3.15)和(3.22)表示分红边界处的边际效益等于即时分红带来的收益，确保分红时无套利。

(3) 零点处的无套利连续性

边界条件(3.5)、(3.16)和(3.23)表示盈余穿越 0 点时分红现值满足连续性，避免跳跃式价值差异。

(4) 零点处的连续平滑粘贴性

边界条件(3.6)、(3.17)和(3.24)表示盈余在零点处的“边际价值”无跳跃，该条件同时也体现了风险模型的“连续性假设”，即盈余微小变化不会导致分红价值突变。

5. 指数索赔下的显示解

假设索赔额服从参数为 α 的指数分布，即 $F(x)=1-\mathrm{e}^{-\alpha x}\left(x>0,\alpha>0\right)$。由于 $f^{*k}(x)=\dfrac{\alpha^k x^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\alpha x}$，所以 $f_\rho(x)=\alpha^*\mathrm{e}^{-\alpha^* x}$，其中 $\alpha^*=(1-\rho)\alpha$。

将 $f_\rho(x)=\alpha^*\mathrm{e}^{-\alpha^* x}$ 分别代入式(3.16)和式(3.17)，并令 $\delta=0$，有

$$\frac{\sigma^2}{2}V_{n1}''(u,b)+(\beta u+c)V_{n1}'(u,b)-\lambda V_{n1}(u,b)+\lambda\int_{-c/\beta}^{u}V_{n1}(x,b)\alpha^*\mathrm{e}^{-\alpha^*(u-x)}\mathrm{d}x=0, \tag{5.1}$$

$$\frac{\sigma^2}{2}V_{n2}''(u,b)+cV_{n2}'(u,b)-\lambda V_{n2}(u,b)+\lambda\int_{0}^{u}V_{n2}(x,b)\alpha^*\mathrm{e}^{-\alpha^*(u-x)}\mathrm{d}x+\lambda\int_{-c/\beta}^{0}V_{n1}(x,b)\alpha^*\mathrm{e}^{-\alpha^*(u-x)}\mathrm{d}x=0, \tag{5.2}$$

分别对式(5.1)和式(5.2)运用算子 $\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}+\alpha^*\right)$，得

$$\frac{\sigma^2}{2}V_{n1}'''(u,b)+\left[\frac{\sigma^2}{2}\alpha^*+(\beta u+c)\right]V_{n1}''(u,b)+\left[\alpha^*(\beta u+c)+\beta-\lambda\right]V_{n1}'(u,b)=0, \tag{5.3}$$

$$\frac{\sigma^2}{2}V_{n2}'''(u,b)+\left(\frac{\sigma^2}{2}\alpha^*+c\right)V_{n2}''(u,b)+\left(c\alpha^*-\lambda\right)V_{n2}'(u,b)=0, \tag{5.4}$$

当 $-c/\beta<u<0$ 时，令 $V_{n1}'(u,b)=\mathrm{e}^{-\alpha^* z}g(z)$，$z=u+\dfrac{c}{\beta}-\dfrac{\alpha^*\sigma^2}{2\beta}$，故三阶变系数微分方程(5.3)变为

$$\frac{\sigma^2}{2}g''(z)+\beta z g'(z)+(\beta-\lambda)g(z)=0. \tag{5.5}$$

再令 $x=-\dfrac{\beta}{\sigma^2}z^2$，$g(z)=k(x)$，则方程(5.5)可转化为 Kummer 合流超几何方程

$$xk''(x)+\left(\frac{1}{2}-x\right)k'(x)-\left(\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2\beta}\right)k(x)=0, \tag{5.6}$$

由文献[22] [23]知方程(5.6)的解为

$$k(x)=a_{n1}\mathrm{e}^{x}\mathrm{U}\left(\frac{\lambda}{2\beta},\frac{1}{2};-x\right)+a_{n2}(-x)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{x}\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2\beta},\frac{3}{2};-x\right),$$

其中 a_{n1}、a_{n2} 是任意常数，而

$$\mathrm{M}(l_1,l_2;x)=\frac{\Gamma(l_2)}{\Gamma(l_2-l_1)\Gamma(l_1)}\int_0^1 \mathrm{e}^{xt}t^{l_1-1}(1-t)^{l_2-l_1-1}\,\mathrm{d}t,\quad l_2>l_1>0,$$

$$\mathrm{U}(l_1,l_2;x)=\frac{1}{\Gamma(l_1)}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-xt}t^{l_1-1}(1+t)^{l_2-l_1-1}\,\mathrm{d}t,\quad l_1>0,$$

分别是第一类和第二类合流超几何函数。所以

$$g(z)=a_{n1}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{\sigma^2}z^2}\mathrm{U}\left(\frac{\lambda}{2\beta},\frac{1}{2};\frac{\beta}{\sigma^2}z^2\right)+a_{n2}\frac{\sqrt{\beta}}{\sigma}z\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{\sigma^2}z^2}\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2\beta},\frac{3}{2};\frac{\beta}{\sigma^2}z^2\right).$$

记 $\kappa=\frac{c}{\beta}-\frac{\alpha^*\sigma^2}{2\beta}$，则

$$V_{n1}'(u,b)=a_{n1}^*h_1(u)+a_{n2}^*h_2(u),$$

其中

$$a_{n1}^*=a_{n1}\mathrm{e}^{-\alpha^*\kappa},\quad a_{n2}^*=a_{n2}\frac{\sqrt{\beta}}{\sigma}\mathrm{e}^{-\alpha^*\kappa}$$

是待定常数，且

$$h_1(u)=\mathrm{e}^{-\left[\alpha^*u+\frac{\beta(u+\kappa)^2}{\sigma^2}\right]}\mathrm{U}\left(\frac{\lambda}{2\beta},\frac{1}{2};\frac{\beta(u+\kappa)^2}{\sigma^2}\right),$$

$$h_2(u)=(u+\kappa)\mathrm{e}^{-\left[\alpha^*u+\frac{\beta(u+\kappa)^2}{\sigma^2}\right]}\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2\beta},\frac{3}{2};\frac{\beta(u+\kappa)^2}{\sigma^2}\right).$$

因此

$$V_{n1}(u,b)=a_{n1}^*H_1(u)+a_{n2}^*H_2(u) \tag{5.7}$$

其中

$$H_1(u)=\int_{-c/\beta}^{u}h_1(s)\,\mathrm{d}s,\quad H_2(u)=\int_{-c/\beta}^{u}h_2(s)\,\mathrm{d}s.$$

显然，三阶常微分方程(5.4)的通解为

$$V_{n2}(u,b)=a_{n3}^*+a_{n4}^*\mathrm{e}^{s_1u}+a_{n5}^*\mathrm{e}^{s_2u} \tag{5.8}$$

其中 a_{n3}^*、a_{n4}^* 和 a_{n5}^* 是待定系数，而 s_1 和 s_2 是方程

$$\frac{\sigma^2}{2}s^2+\left(\frac{\sigma^2}{2}\alpha^*+c\right)s+\left(c\alpha^*-\lambda\right)=0$$

的两个根，且

$$s_1=\frac{-\left(\frac{\sigma^2}{2}\alpha^*+c\right)+\sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{2}\alpha^*+c\right)^2-2\sigma^2\left(c\alpha^*-\lambda\right)}}{\sigma^2}$$

$$s_2=\frac{-\left(\frac{\sigma^2}{2}\alpha^*+c\right)-\sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{2}\alpha^*+c\right)^2-2\sigma^2\left(c\alpha^*-\lambda\right)}}{\sigma^2}.$$

将式(5.7)和式(5.8)代入式(5.2)并令 $u\downarrow 0$，再结合边界条件(3.15)~(3.18)，可得

$$\begin{cases}a_{n4}^*s_1\mathrm{e}^{s_1b}+a_{n5}^*s_2\mathrm{e}^{s_2b}=nV_{n-1,2}\left(b,b\right)\\ a_{n1}^*A_9+a_{n2}^*A_{10}=a_{n3}^*+a_{n4}^*+a_{n5}^*\\ a_{n1}^*A_5+a_{n2}^*A_6=a_{n4}^*A_3+a_{n5}^*A_4\\ a_{n1}^*h_1'\left(-c/\beta\right)+a_{n2}^*h_2'\left(-c/\beta\right)=0\\ a_{n1}^*A_7+a_{n2}^*A_8=\lambda a_{n3}^*+a_{n4}^*A_1+a_{n5}^*A_2\end{cases}\tag{5.9}$$

其中

$$A_1=\frac{\sigma^2}{2}s_1^2+cs_1-\lambda,\quad A_2=\frac{\sigma^2}{2}s_2^2+cs_2-\lambda,\quad A_3=\frac{\sigma^2}{2}s_1^2+cs_1,\quad A_4=\frac{\sigma^2}{2}s_2^2+cs_2,$$

$$A_5=\frac{\sigma^2}{2}h_1'\left(0\right)+ch_1\left(0\right),\quad A_6=\frac{\sigma^2}{2}h_2'\left(0\right)+ch_2\left(0\right),$$

$$A_7=\lambda\int_0^{c/\beta}H_1\left(-x\right)\alpha^*\mathrm{e}^{-\alpha^*x}\mathrm{d}x=\lambda\int_{-c/\beta}^0\alpha^*\mathrm{e}^{\alpha^*x}\int_{-c/\beta}^x h_1\left(s\right)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x,$$

$$A_8=\lambda\int_0^{c/\beta}H_2\left(-x\right)\alpha^*\mathrm{e}^{-\alpha^*x}\mathrm{d}x=\lambda\int_{-c/\beta}^0\alpha^*\mathrm{e}^{\alpha^*x}\int_{-c/\beta}^x h_2\left(s\right)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x,$$

$$A_9=\int_{-c/\beta}^0 h_1\left(s\right)\mathrm{d}s,\quad A_{10}=\int_{-c/\beta}^0 h_2\left(s\right)\mathrm{d}s.$$

记

$$D=\begin{pmatrix}0&0&0&s_1\mathrm{e}^{s_1b}&s_2\mathrm{e}^{s_2b}\\ A_9&A_{10}&-1&-1&-1\\ A_5&A_6&0&-A_3&-A_4\\ h_1'\left(-c/\beta\right)&h_2'\left(-c/\beta\right)&0&0&0\\ A_7&A_8&-\lambda&-A_1&-A_2\end{pmatrix},\quad b_n=\begin{pmatrix}nV_{n-1,2}\left(b,b\right)\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

即可得方程组(5.9)的解为

$$a_{n1}^*=\frac{\det\left(D_{n1}\right)}{\det\left(D\right)},a_{n2}^*=\frac{\det\left(D_{n2}\right)}{\det\left(D\right)},\cdots,a_{n5}^*=\frac{\det\left(D_{n5}\right)}{\det\left(D\right)},$$

其中 $D_{ni}\left(i=1,2,\cdots,5\right)$ 是把矩阵 D 中第 i 列元素换成向量 b_n 所得到的矩阵，且

$$h_1\left(0\right)=\mathrm{e}^{-\frac{\left(2c-\alpha^*\sigma^2\right)^2}{4\beta\sigma^2}}\mathrm{U}\left(\frac{\lambda}{2\beta},\frac{1}{2},\frac{\left(2c-\alpha^*\sigma^2\right)^2}{4\beta\sigma^2}\right),$$

$$h_2\left(0\right)=\frac{2c-\alpha^*\sigma^2}{2\beta}\mathrm{e}^{-\frac{\left(2c-\alpha^*\sigma^2\right)^2}{4\beta\sigma^2}}\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2\beta},\frac{3}{2};\frac{\left(2c-\alpha^*\sigma^2\right)^2}{4\beta\sigma^2}\right),$$

$$h_1'(-c/\beta)=\mathrm{e}^{\frac{\alpha^*\left(4c-\alpha^*\sigma^2\right)}{4\beta}}\left[-\frac{\lambda\left(-\alpha^*\sigma^2/2\beta\right)}{\sigma^2}\mathrm{U}\left(\frac{\lambda}{2\beta}+1,\frac{3}{2};\frac{\left(\alpha^*\sigma\right)^2}{4\beta}\right)\right]$$

$$+\frac{\lambda\alpha^*}{2\beta}\mathrm{e}^{\frac{\alpha^*\left(4c-\alpha^*\sigma^2\right)}{4\beta}}\mathrm{U}\left(\frac{\lambda}{2\beta}+1,\frac{3}{2};\frac{\left(\alpha^*\sigma\right)^2}{4\beta}\right),$$

$$h_2'(-c/\beta)=\mathrm{e}^{\frac{\alpha^*\left(4c-\alpha^*\sigma^2\right)}{4\beta}}\left[\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2\beta},\frac{3}{2};\frac{\left(\alpha^*\sigma\right)^2}{4\beta}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{(\lambda+\beta)\left(\alpha^*\sigma\right)^2}{6\beta^2}\mathrm{M}\left(\frac{3}{2}+\frac{\lambda}{2\beta},\frac{5}{2};\frac{\left(\alpha^*\sigma\right)^2}{4\beta}\right)\right],$$

$$h_1'(0)=\mathrm{e}^{-\frac{\left(2c-\alpha^*\sigma^2\right)^2}{4\beta\sigma^2}}\left\{-\frac{1}{\sigma^2}\left[2c\mathrm{U}\left(\frac{\lambda}{2\beta},\frac{1}{2};\frac{\left(2c-\alpha^*\sigma^2\right)^2}{4\beta\sigma^2}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\lambda\left(2c-\alpha^*\sigma^2\right)}{2\beta}\mathrm{U}\left(\frac{\lambda}{2\beta}+1,\frac{3}{2};\frac{\left(2c-\alpha^*\sigma^2\right)^2}{4\beta\sigma^2}\right)\right]\right\},$$

$$h_2'(0)=\mathrm{e}^{-\frac{\left(2c-\alpha^*\sigma^2\right)^2}{4\beta\sigma^2}}\left\{\left[1-\frac{c\left(2c-\alpha^*\sigma^2\right)}{\beta\sigma^2}\right]\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2\beta},\frac{3}{2};\frac{\left(2c-\alpha^*\sigma^2\right)^2}{4\beta\sigma^2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{(\lambda+\beta)\left(2c-\alpha^*\sigma^2\right)^2}{6\beta\sigma^2}\mathrm{M}\left(\frac{3}{2}+\frac{\lambda}{2\beta},\frac{5}{2};\frac{\left(2c-\alpha^*\sigma^2\right)^2}{4\beta\sigma^2}\right)\right\}.$$

综上，有

定理 4.1 若 $F(x)=1-\mathrm{e}^{-\alpha x}(x>0,\alpha>0)$，则绝对破产前分红总量 $D(t)$ 的 n 阶原点矩 $V_{n1}(u,b)$ 和 $V_{n2}(u,b)$ 的显示表达式为：

$$V_{n1}(u,b)=a_{n1}^*H_1(u)+a_{n2}^*H_2(u),\quad -c/\beta<u<0;$$

$$V_{n2}(u,b)=a_{n3}^*+a_{n4}^*\mathrm{e}^{s_1u}+a_{n5}^*\mathrm{e}^{s_2u},\quad 0\le u<b.$$

定理 4.2 若 $F(x)=1-\mathrm{e}^{-\alpha x}(x>0,\alpha>0)$，则绝对破产前分红总量 $D(t)$ 的矩母函数 $M_1(u,y,b)$ 和 $M_2(u,y,b)$ 的显示表达式为：

$$M_1(u,y,b)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\left(a_{n1}^*H_1(u)+a_{n2}^*H_2(u)\right),\quad -c/\beta<u<0;$$

$$M_2(u,y,b)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\left(a_{n3}^*+a_{n4}^*\mathrm{e}^{s_1u}+a_{n5}^*\mathrm{e}^{s_2u}\right),\quad 0\le u<b.$$

定理 4.3 若 $F(x)=1-\mathrm{e}^{-\alpha x}(x>0,\alpha>0)$，则绝对破产前分红总量 $D(t)$ 的期望 $V_{11}(u,b)$ 和 $V_{12}(u,b)$ 的显示表达式为：

$$V_{11}(u,b)=a_{11}^*H_1(u)+a_{12}^*H_2(u),\quad -c/\beta<u<0;$$

$$V_{12}(u,b)=a_{13}^*+a_{14}^*e^{s_1u}+a_{15}^*e^{s_2u}，\quad 0\le u<b.$$

其中 $a_{11}^*=\dfrac{\det(D_{11})}{\det(D)}, a_{12}^*=\dfrac{\det(D_{12})}{\det(D)},\cdots,a_{15}^*=\dfrac{\det(D_{15})}{\det(D)}$，而 $D_{1i}\ (i=1,2,3,4,5)$ 是把矩阵 D 中第 i 列元素换成向量 $b=(1,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 所得到的矩阵。

6. 小结

本文在绝对破产情形下首次将索赔过程由传统的复合 Poisson 过程推广为复合 Poisson-Geometric 过程，并同时引入障碍分红和随机扰动项，建立了一类更具现实意义的风险模型。利用盈余过程的强 Markov 性，推导了绝对破产前分红总量现值的期望、矩母函数以及 n 阶矩满足的积分－微分方程及边界条件，并给出这些积分－微分方程和边界条件的经济学直觉解释，最后在指数索赔假设下借助合流超几何函数得到了分红总量现值矩的显式表达式。但由于一般索赔分布下的积分－微分方程难以求解，对于一般索赔额分布情形分红总量现值矩的显示表达式并没有给出；其次，未考虑随机因素及时变的影响，模型中的参数(如保费率 c、贷款利率 β 等)均视为常数；此外，本文研究了障碍分红策略下的分红问题，未从收益最大化角度寻找最优分红界 b^*，在后面我们将进一步研究并解决。

参考文献

[1] De Finetti, B. (1957) Su un'impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio. *Proceedings of the Transactions of the XVth International Congress of Actuaries*, New York, 14-21 October 1957, 433-443.

[2] Sheldon Lin, X., E. Willmot, G. and Drekic, S. (2003) The Classical Risk Model with a Constant Dividend Barrier: Analysis of the Gerber-Shiu Discounted Penalty Function. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **33**, 551-566. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2003.08.004

[3] Tan, J., Xiao, L., Liu, S. and Yang, X. (2011) Moments of Discounted Dividend Payments in the Sparre Andersen Model with a Constant Dividend Barrier. *Applied Mathematics*, **2**, 444-451. https://doi.org/10.4236/am.2011.24056

[4] Zhang, L. (2020) The Erlang(n) Risk Model with Two-Sided Jumps and a Constant Dividend Barrier. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **50**, 5899-5917. https://doi.org/10.1080/03610926.2020.1737712

[5] 谢佳益，张志民. Lévy 风险模型下分红与破产相关函数的统计估计[J]. 应用概率统计, 2025, 41(2): 248-276.

[6] 赵金娥，王贵红，曾黎，等. 常利率下保费随机收取风险模型分红问题的研究[J]. 应用概率统计，2023，39(5): 701-710.

[7] Cai, J. (2007) On the Time Value of Absolute Ruin with Debit Interest. *Advances in Applied Probability*, **39**, 343-359. https://doi.org/10.1239/aap/1183667614

[8] Gerber, H.U. and Yang, H. (2007) Absolute Ruin Probabilities in a Jump Diffusion Risk Model with Investment. *North American Actuarial Journal*, **11**, 159-169. https://doi.org/10.1080/10920277.2007.10597474

[9] Yuen, K., Zhou, M. and Guo, J. (2008) On a Risk Model with Debit Interest and Dividend Payments. *Statistics & Probability Letters*, **78**, 2426-2432. https://doi.org/10.1016/j.spl.2008.02.021

[10] Wang, C. and Yin, C. (2008) Dividend Payments in the Classical Risk Model under Absolute Ruin with Debit Interest. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **25**, 247-262. https://doi.org/10.1002/asmb.722

[11] 李帅. 绝对破产情形下经典风险模型的最优分红和注资问题[J]. 应用数学进展, 2023, 12(3): 1100-1113.

[12] 王春伟，尹传存. 绝对破产下具有贷款利息及常数分红界的扰动复合 Poisson 风险模型[J]. 数学物理学报(A 辑), 2010, 30(1): 31-41.

[13] Wang, W. and He, J. (2020) Optimality of Barrier Dividend Strategy in a Jump-Diffusion Risk Model with Debit Interest. *Periodica Mathematica Hungarica*, **82**, 39-55. https://doi.org/10.1007/s10998-020-00338-x

[14] 李静伟，刘国欣. 复合 Poisson 模型带投资-借贷利率和固定交易费用的最优分红策略[J]. 运筹与管理, 2023, 32(7): 204-210.

[15] 毛泽春，刘锦萼. 索赔次数为复合 Poisson-Geometric 过程的风险模型及破产概率[J]. 应用数学学报, 2005, 28(3): 419-428.

[16] 廖基定，龚日朝，刘再明等. 复合 Poisson-Geometric 风险模型 Gerber-Shiu 折现惩罚函数[J]. 应用数学学报, 2007,

30(6): 1076-1085.

[17] 侯致武, 乔克林, 张璐. 一类带干扰的复合 Poisson-Geometric 风险模型的罚金函数[J]. 贵州大学学报(自然科学版), 2018, 35(2): 1-3.

[18] 侯致武, 乔克林, 高磊. 带线性红利和干扰的复合 Poisson-Geometric 风险模型的破产问题[J]. 贵州大学学报(自然科学版), 2024, 41(6): 8-13.

[19] 许灏, 魏芝雅, 彭旭辉. 具有随机投资组合的双复合 Poisson-Geometric 过程保险风险模型的研究[J]. 工程数学学报, 2022, 39(6): 875-885.

[20] 覃利华, 黄鸿君. 复合 Poisson-Geometric 风险下带投资和混合保费收取的生存概率[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版), 2025, 43(5): 115-121.

[21] Li, S. (2006) The Distribution of the Dividend Payments in the Compound Poisson Risk Model Perturbed by Diffusion. *Scandinavian Actuarial Journal*, **2006**, 73-85. https://doi.org/10.1080/03461230600589237

[22] Slater, L.J. (1960) Confluent Hypergeometric Functions. Cambridge University Press.

[23] Abramowitz, M. and Stegun, I. (1972) Handbook of Mathematical Function: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. U.S. Government Printing Office.