Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2026, 15(5), 275-283**
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.155228

Hans汉斯

基于方差模糊与Gamma分布的期权定价研究

王晓玉

北方工业大学理学院，北京

收稿日期：2026年4月15日；录用日期：2026年5月8日；发布日期：2026年5月19日

摘 要

经典期权定价模型依赖于波动率已知的先验假定，难以刻画深度不确定性下的资产价格行为。本文将二阶方差模糊性引入离散时间一般均衡框架，考察其对期权定价的影响。模型设定宏观冲击服从条件正态分布，投资者对客观方差的主观信念则遵循Gamma分布。结合平滑模糊理论与广义递归效用框架，本文通过构造二阶效用函数，在不完备市场设定下推导出唯一的主观等效测度，并基于跨期欧拉方程给出了欧式看涨期权的半闭式解析解。比较静态分析表明，由于期权收益结构具有凸性，客观方差膨胀与主观模糊厌恶增加均会推高期权理论溢价。本文突破了传统定价框架中单一风险维度的局限，为解释期权市场中的方差风险溢价现象提供了微观理论基础。

关键词

期权定价，二阶方差模糊，平滑模糊模型，一般均衡，半闭式解析解

Option Pricing Based on Variance Ambiguity and Gamma Distribution

Xiaoyu Wang

College of Science, North China University of Technology, Beijing

Received: April 15, 2026; accepted: May 8, 2026; published: May 19, 2026

Abstract

Classical option pricing models rely on the prior assumption of known volatility, making it difficult to capture asset price dynamics under deep uncertainty. This paper introduces second-order variance ambiguity into a discrete-time general equilibrium framework to investigate its impact on option pricing. The model assumes that macroeconomic shocks follow a conditional normal distribution, while investors hold subjective prior beliefs about the objective variance that conform to Gamma distribution. By integrating smooth ambiguity preferences with recursive utility, this paper derives a

文章引用: 王晓玉. 基于方差模糊与 Gamma 分布的期权定价研究[J]. 应用数学进展, 2026, 15(5): 275-283.
DOI: 10.12677/aam.2026.155228

unique subjective equivalent measure within an incomplete market setting, and provides a semi-closed-form analytical solution for European call options based on the intertemporal Euler equation. Comparative static analysis reveals that, due to the convexity of the option payoff structure, both the expansion of objective variance and an increase in subjective ambiguity aversion will drive up the theoretical option premium. This paper moves beyond the single risk dimension of conventional pricing frameworks and provides a micro-theoretical foundation for explaining the variance risk premium observed in option markets.

Keywords

Option Pricing, Second-Order Variance Ambiguity, Smooth Ambiguity Model, General Equilibrium, Semi-Closed-Form Analytical Solution

1. 引言

在经典的金融资产定价理论中，不确定性通常被等同于风险，即假设市场参与者不知道未来状态的具体取值，但确切知道随机变量所服从的概率分布。Knight (1921) [1]率先对风险与不确定性进行了严格区分，随后 Ellsberg (1961) [2]通过著名的埃尔斯伯格悖论进一步揭示，在面临选择时，投资者总是本能地偏好那些概率分布确切已知的风险情形，而极度排斥概率结构未知的情形。自此研究者们逐渐认识到，现实中的决策者往往面临着更深层次的未知，即模糊(Ambiguity)，他们甚至无法准确预估市场变动的真实概率分布。近年来，模糊与模糊厌恶被广泛引入资产定价领域，通过考虑投资者这种规避未知的真实心理，学者们能够更合理地解释股权溢价之谜、股票波动率之谜等传统金融理论难以解答的市场现象。

在期权定价领域，Black 和 Scholes (1973) [3]首次提出了期权定价公式；随后，Merton (1973) [4]对该模型进行了严格的数学拓展与一般化证明。他们共同开创的 Black-Scholes-Merton (BSM)模型奠定了现代衍生品定价的理论基石。该模型依赖于一个核心假设：波动率是恒定不变的。然而大量实证检验表明，现实的期权市场不仅存在明显的波动率微笑，而且其隐含波动率往往系统性高于真实的已实现波动率。为了更贴近现实，后续研究相继提出了以 Heston 模型[5]为代表的随机波动率模型。尽管这类模型极大地改善了期权价格的拟合精度，但它们在本质上依然属于对已知风险的探讨。换言之，这些模型仍然默认，投资者对未来波动率变化的概率分布是完全清楚的。

为了打破概率完全已知的理论局限，部分前沿文献尝试将模糊环境正式引入期权定价框架。丛明舒[6]在该领域进行了极具启发式的探索。她的研究基于消费基础的资产定价模型，探讨了市场参与者对标的资产预期收益率存在模糊时的定价逻辑。通过推导包含模糊厌恶的绝对定价核，她证明了在均值模糊的情境下，期权价格依然可以写成经典的 Black-Scholes-Merton 公式形式，但期权隐含波动率转变为包含客观风险与主观均值模糊的复合波动率。不可否认，这一发现为解释期权市场的行为特征提供了坚实的理论支撑；但同时，该研究为了推导的便利，明确假定波动率本身不存在模糊，并视其为次要的二阶影响。然而，从真实的衍生品交易直觉出发，期权作为一种非线性收益工具，其核心买卖逻辑恰恰是对未知波动的定价。在经典理论框架内，预期收益率尚可通过动态对冲予以剥离，真正令投资者感到恐慌并愿意为之支付溢价的，归根结底是未来波动率本身的变化。就此而言，直接刻画方差层面的模糊性而非局限于期望收益率层面，对于期权定价问题具有更为根本的理论意义。

本研究从消费资本资产定价模型与平滑模糊模型的基础框架出发，对传统的期权定价设定进行了拓展。具体而言，本文突破了传统模型中波动率为常数或服从已知随机过程的假设，直接将研究视角转向方差本身的模糊。现实金融市场中波动率恒大于零且频繁呈现出极端的高波动状态，本文因而设定投资者对方差的主观先验信念服从 Gamma 分布。在此基础上，本文引入 Klibanoff 等(2005) [7]的平滑模糊理论与 Ju 和 Miao (2012) [8]的广义递归效用框架，推导出了一个同时包含风险厌恶与方差模糊厌恶的定价核，并进一步利用该定价核对欧式看涨期权进行了定价。同时对于主观心理参数难以量化观测的问题，本文借用无风险零息债券的欧拉方程完成逆向求解，成功将不可观测的效用偏好转化为现实中的无风险利率，进而推导出一个仅含单重积分的半闭式期权定价解析解。

2. 经济环境与模型设定

本章旨在为后续的期权定价推导设定基础的经济环境。在离散时间的一般均衡与 CCAPM 框架下，本章引入了对标的资产方差的模糊考量。通过引入 Klibanoff 等(2005)的平滑模糊模型，并结合 Ju and Miao (2012)提出的递归模糊厌恶效用函数，本章在数学上严格区分了市场参与者所面临的一阶客观风险与二阶方差模糊性，从而为后续推导定价核，以及最终求解期权定价公式奠定理论基础。

2.1. 递归模糊厌恶效用函数与投资者偏好

为考察二阶方差模糊对资产定价的影响，本文在 Klibanoff 等(2005)与 Ju 和 Miao (2012)的平滑模糊递归效用框架下进行了理论拓展。代表性投资者在 t 时刻的递归效用 V_t 由下式给出：

$$V(C_t)=W\left(C_t,v^{-1}\left\{E_t^{\sigma^2}\left[v\circ u^{-1}\left(E_{\sigma_t}^{S}u\left(V\left(C_{t+1}\right)\right)\right)\right]\right\}\right) \tag{1}$$

进一步可以设定，$V_t=W\left(C_t,\mathcal{R}_t\right)=\left[(1-\beta)C_t^{1-\rho}+\beta\left(\mathcal{R}_t\right)^{1-\rho}\right]^{\frac{1}{1-\rho}}$。其中，参数 $\beta\in(0,1)$ 代表投资者的主观贴现因子，$\rho>0$ 且 $\rho\neq1$ 控制投资者的跨期替代弹性。$\mathcal{R}_t$ 为包含模糊厌恶的下一期效用确定性等价物。基于 KMM 模型，$\mathcal{R}_t$ 被设定为由内外两层偏好函数嵌套的结构：$\mathcal{R}_t=v^{-1}\left\{E_t^{\sigma^2}\left[v\circ u^{-1}\left(E_{\sigma_t}^{S}\left[u\left(V_{t+1}\right)\right]\right)\right]\right\}$。其中，内层函数 $u(x)$ 刻画了投资者对一阶客观风险的偏好，外层函数 $v(x)$ 刻画了投资者对二阶主观模糊性的偏好。本文遵循宏观金融文献的标准常相对风险厌恶(CRRA)形式设定：

$$u(x)=\frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma},\gamma>0\text{ 且 }\gamma\neq1,$$

$$v(x)=\frac{x^{1-\eta}}{1-\eta},\eta>0\text{ 且 }\eta\neq1。$$

在此设定下，相对风险厌恶系数 γ 衡量了投资者在给定客观方差 σ^2 下对收益率波动的厌恶程度，相对模糊厌恶系数 η 衡量了投资者对未知方差 σ^2 先验分布的厌恶程度。将 $u(x)$ 与 $v(x)$ 及其反函数代入 $\mathcal{R}_t$ 的一般表达式中，得到 $\mathcal{R}_t=\left\{E_t^{\sigma^2}\left[\left(E_{\sigma_t}^{S}\left[V_{t+1}^{1-\gamma}\right]\right)^{\frac{1-\eta}{1-\gamma}}\right]\right\}^{\frac{1}{1-\eta}}$。当 $\eta>\gamma$ 时，代表市场参与者表现出显著的模糊厌恶，即投资者对未知分布的恐惧大于对已知风险的恐惧。若 $\eta=\gamma$，投资者退化为模糊中性，模型即回退至标准 Epstein-Zin 效用[9]下的方差模型。

由于一般的递归效用在动态资产定价中难以求得解析解，本文遵循已有研究的处理方法，假定代表性投资者的跨期替代弹性趋近于 1。在此极值条件下，投资者的最优化问题可转化为如下对数形式的 Bellman 方程：

$$U_t=(1-\beta)\ln C_t+\frac{\beta}{1-\eta}\ln\left\{E_t^{\sigma^2}\exp\left(\frac{1-\eta}{1-\gamma}\ln\left(E_{\sigma_t}^{S}\exp(1-\gamma)(U_{t+1}+A)\right)\right)\right\} \tag{2}$$

其中，$U_t=\ln V_t$ 为价值函数的对数。

(该 Bellman 方程的详细推导过程见附录)。

设定跨期替代弹性为 1 具有明确的经济学含义。在这种情形下，投资者在面对宏观风险时，其产生的收入效应与替代效应会相互抵消，使得一般均衡下的财富消费比保持为一个常数。这一处理大幅降低了模型求解的复杂度，更重要的是，它排除了跨期折现率变动带来的复杂干扰，使我们能够将研究聚焦在方差模糊对期权定价的直接影响上。

2.2. 宏观经济环境与 CCAPM 基本假设

基于上述递归模糊厌恶效用函数与一般均衡下的资产定价基准，本文确立以下宏观金融学假设：

假设 1：基于标准的 Lucas (1978)纯交换经济[10]设定，经济体中存在唯一一种不可跨期物理储存的消费品，其各期的随机禀赋 X_t 是外生给定的，因此模型中不涉及实际生产与资本积累环节。市场参与者是同质的，可以将其简化为一个无限期生存的代表性投资者。该代表性投资者在期初被赋予了代表宏观经济总量的一单位完全索取权(即基础资产)，并在后续各期选择持续持有该资产。由于消费品无法进行物理储存，且在代表性主体框架下金融市场的净借贷交易恒为零，一般均衡状态下的市场出清条件严格要求该代表性投资者的当期最优消费量恰好等于当期外生禀赋，也就是满足 $C_t=X_t$。

假设 2：假定存在一个没有微观摩擦成本的金融市场。针对那些净供给为零的衍生金融工具，由于投资者的同质性，其均衡需求量恒为零。需要特别指出的是，由于本文引入了不可交易的二阶方差模糊性，该市场在宏观风险跨度上是不完备的。在此环境下，传统的无套利动态复制策略失效，状态价格的自发调节与市场出清将完全依赖于代表性投资者的主观跨期效用偏好。针对不完备市场下定价核的唯一性问题，本文采用 KMM 模型通过构造严格凹的二阶效用函数对多重先验分布进行积分与非线性加权，将不确定性分布等效转化为唯一的主观概率测度，从而在数学上成功保证了一般均衡定价核的唯一性。

假设 3：本文在离散时间框架下设定宏观禀赋的演化过程。假定外生宏观禀赋的对数增长率在条件物理测度下服从独立同分布的正态过程。然而，该过程的条件方差对投资者而言是不可观测的隐变量，由此构成模型中的二阶方差模糊性。我们把基础资产在 t 时刻到 $t+1$ 时刻的对数总收益率记作 $\tilde{x}_{t+1}$。在一般均衡环境下，为保证包含二阶方差模糊性的资产市场实现出清，该对数收益率的预期均值 μ 由宏观无风险利率 r_f 与内生的方差风险溢价共同决定，满足欧拉方程出清条件。假定各期方差模糊性独立更新，从而剥离了期限结构波动对无风险利率的干扰。在此框架下，衍生金融资产的当期价格均由代表性投资者的跨期欧拉方程 $E[M_{t+1}P_{t+1}]=P_t$ 来决定。

2.3. 方差模糊性

准确刻画不确定性的结构是本章理论建模的核心。现有关于模糊期权定价的文献通常假设客观波动率为已知常数，仅探讨标的资产预期收益率的模糊性，并设定其主观先验服从正态分布。

然而，正如前文所述，期权作为一种非线性支付的衍生工具，其核心交易逻辑本质上是对波动率的定价。在真实的金融交易中，投资者面临的波动率不确定性往往比均值不确定性更为剧烈。为更贴近真实市场的二阶不确定性，本章将理论焦点正式转向方差模糊，并确立以下关于不确定性的双重结构假设：

假设 4：为在理论上严格剥离风险与模糊性，本章首先界定模型中的一阶客观风险。如果我们能确切知晓方差 σ^2 的真实取值，那么基础资产的对数收益率 $\tilde{x}_{t+1}$ 将仅面临常规的市场风险，并服从均值为 μ，方差为 σ^2 的正态分布。此时，其条件概率分布可表示为：$\tilde{x}_{t+1}\mid\sigma^2\sim N(\mu,\sigma^2)$。这一设定将波动率暂时视

为已知常数，从而使得模型在内层风险的刻画上，能够完美兼容经典 Black-Scholes 期权定价框架的基础数学假设。

假设 5：在真实的金融环境中，客观方差 σ^2 并非已知常数，而是一个对市场参与者而言存在模糊的未知参数。考虑到方差在数学上具有严格非负的属性，现有文献中刻画均值模糊性所采用的正态分布显然不再适用。同时，大量实证金融研究发现，市场波动率有明显的右偏特征，即发生极端剧烈波动的概率比正态分布预测的要高得多。

基于上述特征，区别于传统研究的常规设定，本文假定代表性投资者对未知方差 σ^2 具有一个服从 Gamma 分布的主观先验信念。假定在物理测度下，该分布的形状参数为 $k(k>0)$、尺度参数为 $s(s>0)$，其主观先验概率密度函数可表示为：$g\left(\sigma^2\right)=\frac{1}{\Gamma(k)s^k}\left(\sigma^2\right)^{k-1}\exp\left(-\frac{\sigma^2}{s}\right)$。在该先验信念下，投资者对客观方差的数学预期值为 $k\cdot s$。采用 Gamma 分布的合理性在于，它不仅契合于方差大于零的代数约束，而且通过调整形状与尺度参数，能够极其灵活且精确地拟合投资者对未来极端波动风险的主观信念。

3. 方差模糊下的均衡定价核推导

3.1. 均衡价值函数与收敛约束

为了求解代表性投资者的跨期最优化问题，本章利用 CCAPM 框架下的市场出清条件进行推导。由于递归效用函数具有关于消费的一阶齐次性，且外生禀赋的对数增长率呈现独立同分布特性，这意味着基础资产的对数总收益率 $\tilde{x}_{t+1}$ 也继承了独立同分布特性，这表明代表性投资者面临的未来相对风险与收益分布，不会随着当期消费基数的放大而改变。基于此，本文采用猜想验证法，设定一般均衡下的价值函数 V_t 与当期消费 C_t 呈严格的线性正比例关系，即等价于其对数价值函数 U_t 是对数消费的线性仿射函数。

引理 1：在本文设定的经济环境中，代表性投资者的价值函数 V_t 与对数价值函数 U_t 存在如下形式的显式解析解：$V_t=\alpha C_t \Leftrightarrow U_t=\ln C_t+a$。

其中，常数 α 与 a 满足 $\alpha=\exp(a)$，且常数 a 的解析表达式为：

$$a=\frac{\beta}{1-\beta}\left\{A+\mu-\ln(1/\beta)+\frac{1}{1-\eta}\ln\left[1-\frac{s}{2}(1-\eta)(1-\gamma)\right]^{-k}\right\}。$$

证明：详见本文附录。

需要特别指出的是，由于外层期望涉及对 Gamma 分布求矩母函数，引理 1 中解析解的成立在数学上严格依赖于该积分的收敛条件。因此，本文必须在参数空间上施加如下自然的收敛约束：$1-\frac{s}{2}(1-\eta)(1-\gamma)>0$。这一约束不仅是代数求解的前提，更具有直观的经济学含义：在一般均衡框架下，市场体系能够消化和定价的未知恐慌是有理论上限的。当投资者对模糊极度厌恶，或者市场面临的方差不确定性极其剧烈，上述积分将无法收敛。从经济学直觉来看，这意味着投资者会因为极度的恐慌而对资产索取无限高的风险补偿，导致市场根本无法出清，均衡的资产价格也就无法形成。

3.2. 包含方差模糊性的定价核解析求解

在求得代表性投资者的均衡价值函数后，通过求解跨期最优化问题的一阶条件，即可提取出用于对未来任意资产支付进行折现的随机折现因子，即模型中的定价核。结合前文引理 1 求得的价值函数解析解，本文进一步推导出包含二阶方差模糊的具体定价核形式。

定理 1：在本文设定的经济环境中，t 时刻到 $t+1$ 时刻的定价核 M_{t+1} 存在如下解析形式：

$$M_{t+1}=\frac{1}{E_t^{\sigma^2}\left[\exp\left(\frac{1}{2}(1-\eta)(1-\gamma)\sigma^2\right)\right]}\cdot\exp\left(-\gamma\tilde{x}_{t+1}+\mu(\gamma-1)-\frac{1}{2}(1-\gamma)(\eta-\gamma)\sigma^2\right) \tag{3}$$

将外层期望中 Gamma 分布的矩母函数显式结果代入上式分母，该定价核可等价表述为：

$$M_{t+1}=\frac{1}{\left[1-\frac{s}{2}(1-\eta)(1-\gamma)\right]^{-k}}\cdot\exp\left(-\gamma\tilde{x}_{t+1}+\mu(\gamma-1)-\frac{1}{2}(1-\gamma)(\eta-\gamma)\sigma^2\right) \tag{4}$$

证明：详见本文附录。

在确立了 M_{t+1} 的解析表达式后，本文进一步对该定价核进行分析，发现有以下性质：

性质 1：基于投资者在现实中普遍表现出的行为偏好(即相对风险厌恶系数 $\gamma>1$ 且模糊厌恶系数 $\eta>\gamma$)，在给定某一特定的收益率实现水平 $\tilde{x}_{t+1}$ 时，定价核 M_{t+1} 是关于方差 σ^2 的严格单调递增函数，即 $\frac{\partial M_{t+1}}{\partial\sigma^2}>0$。

在现代资产定价理论中，定价核的大小直接反映了投资者不同状态下的边际效用。该性质表明，在包含二阶模糊性的框架下，即便两期的绝对收益率 $\tilde{x}_{t+1}$ 完全相同，只要市场处于高波动率状态，极度模糊厌恶的投资者就会将其视为极其恶劣的坏状态。在这种恐慌状态下，投资者的边际效用急剧攀升即 M_{t+1} 增大。这意味着市场将对高波动状态下具有正向收益的资产赋予更高的折现权重与价格溢价。从一般均衡的微观基础看，这就解释了方差风险溢价的形成逻辑。

性质 2：当代表性投资者退化为模糊中性，即其对未知分布的恐惧等同于对已知风险的厌恶时，定价核中的方差模糊厌恶惩罚项 $\exp\left(-\frac{1}{2}(1-\gamma)(\eta-\gamma)\sigma^2\right)$ 退化为 1。同时常数项 $\left[1-\frac{s}{2}(1-\eta)(1-\gamma)\right]^{-k}$ 将退化为仅包含风险厌恶的常数调整项 $\left[1-\frac{s}{2}(1-\gamma)^2\right]^{-k}$。

这一数学退化剥离了模糊性与风险。当 $\eta=\gamma$ 时，含有随机变量 σ^2 的状态惩罚项消失，意味着模型不再对高波动率状态施加额外的折现权重，资产的相对定价完全回归经典模型。而全局常数项之所以被保留，是因为在跨期替代弹性趋近于 1 且存在客观基础风险的环境下，投资者的纯粹风险厌恶($\gamma>1$)依然会催生预防性储蓄动机，从而系统性地改变全局的无风险利率基准。性质 2 严格证明了：本文模型中针对波动率测度的非线性调整，唯一且纯粹地来源于投资者的二阶模糊厌恶。

性质 3：代表市场波动不确定性的参数 s，仅存在于全局常数项 $\frac{1}{\left[1-\frac{s}{2}(1-\eta)(1-\gamma)\right]^{-k}}$ 中，这意味着 s 的大小不会改变投资者对不同市场状态的相对折现比例。

从经济学的角度分析，参数 s 刻画了市场对未来爆发极端波动的担忧程度。公式的这种结构表明，当这种潜在的不确定性加剧时，投资者的第一反应就是整体增加预防性储蓄来防范未来风险。

4. 方差模糊下的欧式期权定价与半闭式解析解

在确立了基于一般均衡的定价核 M_{t+1} 后，本章将利用该随机贴现因子对标准欧式看涨期权进行定价。区别于传统的风险中性定价，本章直接立足于资产定价的跨期欧拉方程，在客观物理测度下进行双重期

望积分。通过依次对已知方差下的条件风险与未知方差的先验分布进行积分求解，本章最终推导出了一个形式清晰、包含方差模糊的欧式看涨期权定价半闭式解析解。

4.1. 欧式看涨期权定价公式的推导

设当前时刻为 t，基础资产当前价格为 S_t，期权的执行价格为 K ,且该期权于 $t+1$ 时刻到期。根据一般均衡理论，利用代表性投资者跨期最优化所导出的欧拉方程，该欧式看涨期权的当前价格 C_t 等于其未来支付在物理测度下的折现期望：

$$C_t = E_t^P\left[M_{t+1}\left(\tilde{x}_{t+1},\sigma^2\right)\cdot\max\left(S_t e^{\tilde{x}_{t+1}}-K,0\right)\right] \tag{5}$$

为简化积分表达式的代数结构，本文将定理 1 中定价核 M_{t+1} 中与随机变量无关的常数项统一打包定义为 ψ，结合 2.2 节中确立的双重概率分布假设，上述期望可严格展开为如下形式的二重积分：

$$C_t = \int_0^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\psi\cdot e^{-\gamma\tilde{x}}\cdot e^{-\frac{1}{2}(1-\gamma)(\eta-\gamma)\sigma^2}\right]\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(\tilde{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right]\cdot\max\left(S_t e^{\tilde{x}}-K,0\right)\right\}d\tilde{x}\cdot\left[\frac{\left(\sigma^2\right)^{k-1}\cdot e^{-\frac{\sigma^2}{s}}}{\Gamma(k)s^k}\right]d\sigma^2 \tag{6}$$

通过代数合并与配方化简，本文得出如下定理：

定理 2：在本文包含二阶不确定性的均衡框架下，单期欧式看涨期权的价格 C_t 可由以下积分形式的半闭式解析解刻画：

$$C_t = e^{-r_f}\int_0^{\infty}\left[S_t e^{\hat{\mu}+\frac{1}{2}\sigma^2}N(d_1)-KN(d_2)\right]\cdot\hat{g}\left(\sigma^2;k,s^*\right)d\sigma^2 \tag{7}$$

上式中，$N(\cdot)$ 表示标准正态分布的累积函数，

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\hat{\mu}+\sigma^2}{\sigma} \tag{8}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\hat{\mu}}{\sigma} \tag{9}$$

且 $\hat{g}\left(\sigma^2;k,s^*\right)=\frac{\left(\sigma^2\right)^{k-1}}{\Gamma(k)\left(s^*\right)^k}e^{-\frac{\sigma^2}{s^*}}$，$\frac{1}{s^*}=\frac{1}{s}+\frac{1}{2}(1-\gamma)(\eta-\gamma)-\frac{1}{2}\gamma^2$，其中 $\hat{\mu}=\mu-\gamma\sigma^2$ 代表经过投资者风险厌恶调整后的基础资产主观预期收益率。

证明：详见本文附录。

4.2. 基础资产的均衡收益率结构

从一般均衡的视角看，预期收益率 μ 的取值必须与市场整体出清状态相契合，不能将其视作一个脱离模型的外部常数。考虑到本文在 $\text{IES}=1$ 的设定下。资产自身的欧拉方程会出现抵消退化，无法直接锁定均值参数，因而我们利用无风险利率的定价逻辑 $e^{-r_f}=E_t\left[M_{t+1}e^{\tilde{x}_{t+1}}\right]$ 来反向推导 μ 的结构。将(4)式代入并化简，可解得基础资产的客观预期收益率 μ 满足如下均衡条件：

$$\mu = r_f + k\ln\left[1+(\gamma-0.5)s^*\right] \tag{10}$$

该公式直观展示了风险溢价在模糊环境下的形成机理。在均衡状态下，收益率 μ 表现为无风险利率

与方差风险补偿的叠加。随着投资者主观模糊厌恶η的提升，后验尺度参数s^*的膨胀会进一步推高预期回报，这本质上是市场为了补偿投资者的模糊焦虑而产生的内生调节。这种处理方式不仅保证了数理逻辑的严密，也为期权的非线性定价提供了稳固的物理测度基础。

4.3. 模糊厌恶与宏观波动的比较静态分析

在平滑模糊的一般均衡框架下，期权溢价并非风险或模糊因素的简单叠加，而是风险厌恶系数γ与模糊厌恶系数η共同作用的结果。

以后验尺度参数的解析式$\frac{1}{s^*}=\frac{1}{s}+\frac{1}{2}(1-\gamma)(\eta-\gamma)-\frac{1}{2}\gamma^2$为例，交叉惩罚项$\frac{1}{2}(1-\gamma)(\eta-\gamma)$是驱动主观信念扭曲的关键。在标准的宏观金融设定($\gamma>1$)下，这两类偏好参数的相对大小直接决定了尺度参数的演化路径。当投资者表现为模糊中性即$\eta=\gamma$时，交叉项消退，后验分布不包含额外的模糊惩罚，定价核退化为经典的风险厌恶形式。然而，当投资者表现出模糊厌恶$\eta>\gamma$，即对分布未知的规避程度超过对风险的规避时，交叉项转为负值，即$\frac{1}{2}(1-\gamma)(\eta-\gamma)<0$。这一代数特征使得$\frac{1}{s^*}<\frac{1}{s}$，直接引发主观后验尺度参数$s^*$的非线性膨胀。

上述参数的扭曲具有清晰的经济学含义：在给定的客观基础不确定性s下，只要存在模糊厌恶，投资者就会内生地放大尾部极端波动出现的概率。更为重要的是，客观环境的不确定性越高，投资者因$\eta>\gamma$催生的恐慌就越严重。这种主观信念的扭曲最终映射到资产，表现为期权理论价格中非线性递增的模糊溢价。

本节将通过理论层面的比较静态分析，深入剖析二阶方差模糊厌恶参数η与客观物理方差尺度参数s对期权价格的影响。

首先考察模糊厌恶参数η的作用路径。根据模型设定，η仅通过改变后验尺度参数s^*来影响期权定价系统。由s^*的定义式$\frac{1}{s^*}=\frac{1}{s}+\frac{1}{2}(1-\gamma)(\eta-\gamma)-\frac{1}{2}\gamma^2$可得其关于$\eta$的偏导关系：

$$-\frac{1}{\left(s^*\right)^2}\cdot\frac{\partial s^*}{\partial\eta}=\frac{1}{2}(1-\gamma) \tag{11}$$

$$\frac{\partial s^*}{\partial\eta}=\frac{1}{2}\left(s^*\right)^2\cdot(\gamma-1) \tag{12}$$

遵循宏观金融文献的标准校准设定，代表性投资者的风险厌恶系数通常满足$\gamma>1$，由此推知$\frac{\partial s^*}{\partial\eta}>0$，即后验尺度参数$s^*$是关于模糊厌恶系数$\eta$的严格单调递增函数。当投资者对未知的方差波动表现出更强的模糊恐惧时，s^*随之膨胀。这意味着在投资者的主观预期中，市场的整体波动水平被放大了，出于对未知的担忧，他们在心理上会认为发生极端剧烈波动的可能性变高了。

进一步，为明确尺度参数s^*的变化对期权总体价格C_t的影响，本文对定价积分施加变量代换，令$y=\frac{\sigma^2}{s^*}$，从而$C_t=\mathrm{e}^{-r_f}\int_0^\infty C_{BS}\left(s^*\cdot y\right)\frac{y^{k-1}}{\Gamma(k)}\cdot\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y$，根据莱布尼茨积分法则对等式两边同时对$s^*$求偏导：$\frac{\partial C_t}{\partial s^*}=\mathrm{e}^{-r_f}\int_0^\infty\left[\frac{\partial C_{BS}}{\partial\left(s^*\cdot y\right)}\cdot y\right]\cdot\frac{y^{k-1}}{\Gamma(k)}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y$。由于期权作为凸性收益资产，$\frac{\partial C_{BS}}{\partial\sigma^2}>0$，且积分域内$y>0$，因此上述积分恒正，即$\frac{\partial C_t}{\partial s^*}>0$。结合前文$\frac{\partial s^*}{\partial\eta}>0$，由链式法则可得$\frac{\partial C_t}{\partial\eta}>0$。这一比较静态分析严格证明了：

在一般均衡框架下，投资者对波动的未知恐惧内生地放大了期权的理论价值。

最后，在明确了主观情绪带来的溢价效应后，本文进一步考察物理测度下宏观方差尺度参数 s 的作用。由链式法则 $\frac{\partial s^*}{\partial s}=\left(\frac{s^*}{s}\right)^2>0$，则 $\frac{\partial C_t}{\partial s}=\frac{\partial C_t}{\partial s^*}\cdot\frac{\partial s^*}{\partial s}>0$。这表明，客观市场的真实波动越大，期权定价必然越高。这一结论证明了即使在引入复杂二阶不确定性的一般均衡模型中，经典的波动率推升期权价值的理论直觉依然得到了严格的保留与自洽。

5. 结论

本文的核心贡献在于，从投资者规避不确定性的微观心理偏好出发，为期权市场中广泛存在的方差溢价现象提供了一种理论解释。区别于传统文献对常数波动率或预期收益率模糊的讨论，本文将理论焦点集中于二阶的方差模糊性。通过一般均衡下的数学推导与比较静态分析，本文发现：在不完备的宏观金融市场中，期权的理论溢价并非仅源于客观市场中发生极端波动的可能性，更深层次地取决于投资者主观信念的等效转化过程。由于期权具有非线性的凸性收益特征，当市场面临剧烈的方差不确定性时，模糊厌恶的投资者出于对未知环境的规避，会在估值中对高波动状态要求额外的风险补偿。这种恐慌情绪通过定价核中边际效用的权重调整，最终体现为资产价格中显著的溢价抬升。本文在理论层面上证明了，即使不引入复杂的时变随机过程，仅依靠引入二阶模糊厌恶，也足以在数学上自洽地复现期权价值产生显著溢价的市场直觉。

尽管本文在方差模糊的解析定价上实现了理论逻辑的闭环，但作为一项基础性定价研究，模型仍留有进一步拓展的空间。首先，在理论建模方面，本文通过静态更新假设排除了跨期因素的干扰，后续研究可尝试将时变的贝叶斯学习机制引入递归效用框架，以探讨动态模糊信念对期权隐含波动率期限结构的影响；其次，在实证应用方面，本文侧重微观理论推导，尚未直接对标真实的金融面板数据。未来研究可引入股指期权等实际交易数据，借助计量方法对模型中的主观偏好参数进行校准与反演，从而进一步检验本模型在拟合真实“波动率微笑”曲面时的解释能力。

参考文献

[1] Knight, F.H. (1921) Risk, Uncertainty and Profit. Houghton Mifflin.

[2] Ellsberg, D. (1961) Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms. *The Quarterly Journal of Economics*, **75**, 643-669. https://doi.org/10.2307/1884324

[3] Black, F. and Scholes, M. (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**, 637-654. https://doi.org/10.1086/260062

[4] Merton, R.C. (1973) Theory of Rational Option Pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, **4**, 141-183.

[5] Heston, S.L. (1993) A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *Review of Financial Studies*, **6**, 327-343. https://doi.org/10.1093/rfs/6.2.327

[6] 丛明舒. 模糊性、模糊厌恶与期权定价[J]. 金融学季刊, 2017, 11(1): 46-72.

[7] Klibanoff, P., Marinacci, M. and Mukerji, S. (2005) A Smooth Model of Decision Making under Ambiguity. *Econometrica*, **73**, 1849-1892. https://doi.org/10.1111/j.1468-0262.2005.00640.x

[8] Ju, N. and Miao, J. (2012) Ambiguity, Learning, and Asset Returns. *Econometrica*, **80**, 559-591.

[9] Epstein, L.G. and Ji, S. (2013) Ambiguous Volatility and Asset Pricing in Continuous Time. *Review of Financial Studies*, **26**, 1740-1786. https://doi.org/10.1093/rfs/hht018

[10] Lucas, R.E. (1978) Asset Prices in an Exchange Economy. *Econometrica*, **46**, 1429-1445. https://doi.org/10.2307/1913837