Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2026, 15(5), 612-617**
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.155255

Hans汉斯

留数的应用

刘　佳*，**徐　慧**

空军工程大学基础部，陕西　西安

收稿日期：2026年4月27日；录用日期：2026年5月22日；发布日期：2026年5月29日

摘　要

本文总结了留数定理的应用，主要从三个方面进行了阐述。针对复积分的计算问题，借助留数定理将其转化为留数的求解，简化运算过程；针对几类典型实函数积分，利用留数定理将实积分转化为复积分，实现化繁为简、化难为易的目的；在运用拉普拉斯变换解决问题时，通过留数求解像原函数，使求解过程更加简洁直观。

关键词

留数，留数定理，复积分，实积分

Application of Residue

Jia Liu*, **Hui Xu**

Department of Basic Courses, Air Force Engineering University, Xi'an Shaanxi

Received: April 27, 2026; accepted: May 22, 2026; published: May 29, 2026

Abstract

This paper summarizes the applications of the residue theorem and mainly elaborates on them from three aspects. For complex integral calculation, the theorem converts integral problems into residue evaluation to simplify operations. For several typical real integrals, it transforms real integration into complex integration, which greatly reduces computational difficulty. Furthermore, in Laplace transform problems, residues are applied to solve inverse transformation functions, rendering the solution process more concise and intuitive.

Keywords

Residue, Residue Theorem, Complex Integral, Real Integral

*通讯作者。

文章引用: 刘佳, 徐慧. 留数的应用[J]. 应用数学进展, 2026, 15(5): 612-617.
DOI: 10.12677/aam.2026.155255

1. 引言

复变函数论中，留数是支撑理论体系的核心概念之一，其相关理论与解析函数在孤立奇点的洛朗展开式、柯西复合闭路定理等基础内容深度耦合，是复变函数分析领域的重要研究方向[1]。留数定理突破了传统积分计算的局限：针对复积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$，它实现了闭合路径积分到内部孤立奇点留数和的等价转化；针对实变函数积分，而应用留数定理求解实变函数积分的方法被称为围道积分法。围道积分法以留数定理为核心，通过构造复变函数将实积分映射为复围线积分，从而完成求解，为传统解析方法无法处理的实积分问题提供了可行方案。

2. 借助留数求解复积分

留数定理[2]：对于复变函数 $f(z)$ 在区域 D 内仅存在有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$，其余点均解析，同时在 D 内取一条正向简单闭曲线 C，且该曲线包围所有上述全部奇点，则有

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[f(z), z_k\right].$$

例题 1. 计算 $I = \oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{z(z-1)^2}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z| = 2$。

解被积函数 $f(z)$ 在 $|z| < 2$ 内有两个奇点：1 阶极点 $z = 0$，2 阶极点 $z = 1$，

$$\operatorname{Res}\left[f(z), 0\right] = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{e}^z}{(z-1)^2} = 1$$

$$\operatorname{Res}\left[f(z), 1\right] = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\mathrm{e}^z}{z}\right) = \lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{e}^z(z-1)}{z^2} = 0$$

所以，$I = 2\pi i\left(\operatorname{Res}\left[f(z), 0\right] + \operatorname{Res}\left[f(z), 1\right]\right) = 2\pi i$。

3. 利用留数计算实积分

应用留数定理计算实变函数积分的方法称为围道积分法[3] [4]，就是把求实变函数的积分，转化为复变函数沿围线的积分，借助留数定理得以求解。要使用留数计算，需要两个条件：一是被积函数与某个解析函数有关；其次，定积分可化为某个沿闭路的积分[3]。

例题 2. 计算 $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$ 的值。

解决此题的思路，思考如何得到 $\frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}$ 的原函数，进而求出定积分。另一种思路，这里积分的被积函数只有三角函数，同时，积分的上下限刚好是正余弦函数的一个周期，这时，采用新的代换：$z = \mathrm{e}^{i\theta}$，转化为复变函数沿围线的积分来求解。

解题方法一 $\int\frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\int\left(1-\frac{5}{5+4\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\theta}{4}-\frac{5}{4}\int\frac{1}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$

对积分 $\int \frac{1}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$ 而言，

令 $\tan\frac{\theta}{2}=t$，则 $\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$， $\mathrm{d}\theta=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$，于是，

$$\int \frac{1}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta=2\int \frac{1}{9+t^2}\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\arctan\frac{t}{3}+C=\frac{2}{3}\arctan\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{3}+C。$$

所以，$\int \frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{\theta}{4}-\frac{5}{6}\arctan\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{3}+C$。

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta=2\int_{0}^{\pi}\frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta=2\left(\frac{\theta}{4}-\frac{5}{6}\arctan\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{3}\right)\Bigg|_{0}^{\pi}$$

$$=\lim_{\theta\to\pi}2\left(\frac{\theta}{4}-\frac{5}{6}\arctan\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{3}\right)=2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5}{6}\times\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}.$$

解题方法二令 $z=\mathrm{e}^{i\theta}$，则 $\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{iz},\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}$，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1}\frac{z+z^{-1}}{2}\cdot\frac{1}{5+4\cdot\frac{z+z^{-1}}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{iz}=\oint_{|z|=1}\frac{1+z^2}{4iz\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+2)}\mathrm{d}z=\oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z。$$

其中 $\frac{1+z^2}{4iz\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+2)}=f(z)$， $f(z)$ 为 z 的有理函数，且在圆周 $|z|=1$ 上分母不为零。因此，可以得到

在 $|z|<1$ 内， $f(z)$ 有两个一阶极点： $z_1=0,z_2=-\frac{1}{2}$。

$$\mathrm{Re}\,s\left[f(z),0\right]=\lim_{z\to0}zf(z)=\frac{1+z^2}{4i\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+2)}\Bigg|_{z=0}=\frac{1}{4i},$$

$$\mathrm{Re}\,s\left[f(z),-\frac{1}{2}\right]=\lim_{z\to-\frac{1}{2}}zf(z)=\frac{1+z^2}{4iz(z+2)}\Bigg|_{z=-\frac{1}{2}}=-\frac{5}{12i}。$$

所以，$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\left(\mathrm{Re}\,s\left[f(z),0\right]+\mathrm{Re}\,s\left[f(z),-\frac{1}{2}\right]\right)=-\frac{\pi}{3}$。

例题 3. 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x$。

分析思路一，利用高等数学的知识，设法求出被积函数的原函数，进而求出定积分。思路二，借助 $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\mathrm{d}x=2\pi i\sum_k \mathrm{Re}\,s\left[R(z),z_k\right]$ 来解决问题，这里 z_k 为有理函数 $R(z)$ 位于上半复平面区域中存在的所有孤立奇点。

解题方法一

$$\int \frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\mathrm{d}x + \int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x + \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} + \int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right]+C.$$

进而得，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right]\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right]$$

$$-\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

解题方法二取 $R(z)=\dfrac{z^2}{z^4+1}$。

当 $R\to+\infty$ 时，$\int_{C_R}\dfrac{z^2}{z^4+1}\mathrm{d}z\to 0$，可以得到：

在上半复平面区域内，$R(z)$ 存在 1 阶极点：$z_1=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}, z_2=\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}i}$。

$$\mathrm{Res}\left[R(z),z_1\right] = \frac{z^2}{\left(z^4+1\right)'}\Bigg|_{z=z_1} = \frac{1}{4z}\Bigg|_{z=z_1} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}i},$$

$$\mathrm{Res}\left[R(z),z_2\right] = \frac{z^2}{\left(z^4+1\right)'}\Bigg|_{z=z_2} = \frac{1}{4z}\Bigg|_{z=z_2} = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i},$$

可以得到，$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x=2\pi i\left(\mathrm{Res}\left[R(z),z_1\right]+\mathrm{Res}\left[R(z),z_2\right]\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$。

例题 4. 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ix}}{x^2+a^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$。

分析：利用例 3 的解法二进行求解。

解取 $R(z)=\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z^2+a^2}$，由此可得

在上半复平面区域中，$R(z)$ 只有唯一的 1 阶极点：$z_0=ai$。

$$\mathrm{Res}\left[R(z),z_0\right]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)R(z)=\lim_{z\to ai}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z+ai}=\frac{1}{2a\mathrm{e}^{a}i},$$

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ix}}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left[R(z),z_0\right]=\frac{\pi}{a\mathrm{e}^{a}}$。

4. 利用留数求解拉普拉斯逆变换

运用拉普拉斯变换求解问题时，常常需要由像函数求像原函数，我们可以利用拉氏变换的性质并根据一些已知的变换来求像原函数[2]，但其使用范围毕竟是有限的，而利用留数求解拉普拉斯逆变换是一种更具一般性的方法，它直接用像函数表示出像原函数，即所谓的反演积分[4]，再利用留数求出像原函数。

定理[4]若函数 $F(s)$ 在复平面内，除半平面 $\mathrm{Re}\,s\le c$ 内的有限个孤立奇点 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 外处处解析，同时满足 $s\to\infty$ 时，$F(s)\to 0$，可得

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[F(s)\mathrm{e}^{st},s_k\right],$$

即 $f(t)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[F(s)\mathrm{e}^{st},s_k\right]\ (t>0)$。

例 5. 已知 $F(s)=\frac{1}{(s-2)(s-1)^2}$，求 $f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]$。

解利用留数进行求解。

像函数 $F(s)$ 的奇点为 $s_1=2,s_2=1$，且分别为 1 阶极点和 2 阶极点，则

$$\mathrm{Res}\left[F(s)\mathrm{e}^{st},2\right]=\left.\frac{\mathrm{e}^{st}}{(s-1)^2}\right|_{s=2}=\mathrm{e}^{2t},$$

$$\mathrm{Res}\left[F(s)\mathrm{e}^{st},1\right]=\left.\left(\frac{\mathrm{e}^{st}}{s-2}\right)'\right|_{s=1}=-t\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{t}。$$

所以 $f(t)=\mathrm{Res}\left[F(s)\mathrm{e}^{st},2\right]+\mathrm{Res}\left[F(s)\mathrm{e}^{st},1\right]=\mathrm{e}^{2t}-t\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{t}$。

留数理论作为复变函数论的核心理论之一，由上述例题可见，利用该理论可求解复积分及多种实变函数积分问题。其解题逻辑清晰、易于理解与掌握，为特定类型的积分运算提供了极具实用性的工具。同时也拓展了积分计算的思路与方法。并为求解拉普拉斯变换中的像原函数，提供了更为一般的方法。希望在今后的教学中能够指导学生灵活运用这些计算方法。

参考文献

[1] 钟玉泉. 复变函数学习指导书[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[2] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.

[3] 沈进东. 采用比较教学法讲解“用留数定理计算实积分” [J]. 教法研究, 2012(31): 94-96.

[4] 李红, 谢松法. 复变函数与积分变换[M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.