Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(6), 144-160
Published Online June 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.156273

Hans汉斯

三维可压缩非牛顿MHD方程组局部强解的存在唯一性

欧　鸿，徐　龙，王长佳*

长春理工大学数学与统计学院，吉林 长春

收稿日期：2026年5月11日；录用日期：2026年6月5日；发布日期：2026年6月11日

摘　要

本文研究三维可压缩非牛顿磁流体动力学(MHD)方程组局部强解的适定性。在初始数据满足自然相容性条件且允许存在初始真空的情形下，证明了该方程组局部强解的存在性与唯一性。本研究的主要困难在于处理非牛顿应力张量的高度非线性，以及由真空导致的方程退化。基于速度场算子满足$W^{2,p}$椭圆正则性的假设，本文通过建立高阶先验估计成功克服了上述困难。该结果将现有可压缩牛顿型MHD方程组的适定性理论推广至更一般的非牛顿流体情形。研究结果表明，在速度场算子满足$W^{2,p}$椭圆正则性的前提下，该非牛顿MHD系统是局部适定的。这一结论明确了非牛顿特性对应力张量正则性的具体要求。

关键词

可压缩流体，非牛顿MHD方程组，局部强解，存在唯一性，初始真空

Existence and Uniqueness of Local Strong Solutions to the 3D Compressible Non-Newtonian MHD Equations

Hong Ou, Long Xu, Changjia Wang*

School of Mathematics and Statistics, Changchun University of Science and Technology, Changchun Jilin

Received: May 11, 2026; accepted: June 5, 2026; published: June 11, 2026

Abstract

This paper investigates the well-posedness of local strong solutions to the three-dimensional (3D)

*通讯作者。

文章引用: 欧鸿, 徐龙, 王长佳. 三维可压缩非牛顿 MHD 方程组局部强解的存在唯一性[J]. 应用数学进展, 2026, 15(6): 144-160. DOI: 10.12677/aam.2026.156273

compressible non-Newtonian magnetohydrodynamic (MHD) system. Provided that the initial data satisfy natural compatibility conditions and the initial vacuum is allowed, we establish the existence and uniqueness of local strong solutions to the system. The main difficulties lie in handling the high nonlinearity of the non-Newtonian stress tensor and the degeneracy of the equations induced by the vacuum. Based on the assumption that the velocity field operator satisfies the $W^{2,p}$ elliptic regularity, we successfully overcome the aforementioned difficulties by establishing higher-order a priori estimates. This result extends the existing well-posedness theory for the compressible Newtonian MHD system to the more general non-Newtonian fluid setting. The research results demonstrate that the non-Newtonian MHD system is locally well-posed, provided that the velocity field operator satisfies the $W^{2,p}$ elliptic regularity. This conclusion clarifies the specific requirements of non-Newtonian characteristics for the regularity of the stress tensor.

Keywords

Compressible Fluids, Non-Newtonian MHD System, Local Strong Solutions, Existence and Uniqueness, Initial Vacuum

1. 引言与主要结果

磁流体动力学(MHD)是连续介质力学的一个分支，主要研究导电介质在磁场作用下的运动规律。磁流体动力学方程组由流体力学方程与麦克斯韦方程联立生成，在天体物理学、地球物理学、等离子体物理学及众多应用科学领域中发挥着基础性作用。

设 $\Omega\subset R^3$ 为三维光滑有界区域，粘性可压缩磁流体动力学(MHD)模型可由如下方程组描述[1] [2]：

$$\begin{cases}\partial_t\rho+\operatorname{div}(\rho u)=0, & (x,t)\in Q_T,\\ \partial_t(\rho u)+\operatorname{div}(\rho u\otimes u)-\operatorname{div}S+\nabla\pi=\operatorname{curl}b\times b, & (x,t)\in Q_T,\\ \partial_t b-\operatorname{curl}(u\times b)=-\operatorname{curl}(\upsilon\operatorname{curl}b), & (x,t)\in Q_T,\\ \operatorname{div}b=0, & (x,t)\in Q_T,\end{cases}\tag{1}$$

其中 $Q_T=\Omega\times(0,T)$，$T>0$。上述模型中未知函数 ρ 表示流体密度；$u=(u_1,u_2,u_3)$ 与 $b=(b_1,b_2,b_3)$ 分别表示流体速度场和磁场强度，$\pi=a\rho^\gamma$ $(a>0,\gamma>1)$ 为压力；常数 $\upsilon>0$ 为磁扩散系数。$S=S(D(u))$ 为应力张量，其中 $D(u)=\left(\nabla u+(\nabla u)^{\mathrm{T}}\right)/2$ 为应变速率张量。根据流体的不同流变特性，需设定不同的本构关系。一个常用的一般形式为

$$S(D(u))=2\mu\left(|D(u)|^2\right)D(u)+\lambda(\operatorname{div}u)\operatorname{div}uI,\tag{2}$$

其中 $\lambda(\cdot)$ 与 $\mu(\cdot)$ 为粘性系数，I 为恒等算子。

物理上，模型(1)可用于描述受控核聚变中的液态金属包层流、恒星大气中的部分电离等离子体，以及在强磁场环境下的高分子聚合物溶液。在这些场景中，流体往往表现出剪切变稀或剪切增稠等非牛顿特性，而不再遵循简单的线性应力－应变关系。

在(2)中，若 $\mu(\cdot)=\mu_0$ 与 $\lambda(\cdot)=\lambda_0$ 均为常数，即应力张量 S 是应变速率张量 $D(u)$ 的线性函数时，系统(1)便退化为经典的可压缩牛顿型 MHD 系统。目前，关于多维 MHD 方程组的适定性理论已有大量文献

进行了深入探讨。Hu 和 Wang [3]以及 Liu [4]研究了三维可压缩 MHD 方程在一般大初值下能量有限弱解的整体存在性。Zhu [5]考虑了三维可压缩等熵 MHD 方程组，在初值具有任意大小且包含真空，并满足特定相容性条件的情况下，建立了局部经典解的存在性。随后，Xu 和 Zhong [6]移除了文献[5]中对相容性条件的依赖，证明了在较低正则性初值下强解的局部适定性。Li 等[7]、Lv 等[8]以及 Hong 等[9]分别研究了具有大振荡和真空情形下，可压缩 MHD 方程组 Cauchy 问题整体强解(或经典解)的存在性。更多相关结果可参见文献[10]-[12]。

尽管牛顿型 MHD 系统的研究已取得丰硕成果，但经典的线性粘性假设难以准确刻画许多复杂的流变现象。为了更真实地描述等离子体等复杂导电流体，研究者们开始关注具有非线性应力张量的非牛顿型 MHD 模型。特别是针对可压缩非牛顿 MHD 方程，由于其强非线性的耦合结构，仍有许多关键且细致的数学问题尚待解决。目前，关于非牛顿型 MHD 方程组的研究主要聚焦于不可压流体以及应力张量具有幂律结构的情形。Samokhin [13]针对幂律指标 $q \ge 5/2$，利用 Galerkin 方法证明了方程组弱解的存在性。Gunzburger 等人[14]在有界或周期区域内建立了初边值问题的唯一可解性。针对全空间 $\mathbb{R}^3$ 情形，Kang 和 Kim [15]研究了幂律型非线性粘性流体 MHD 方程组解的存在性：他们在 $q > 8/5$ 时构造了弱解，并进一步证明了当 $q \ge 5/2$ 时强解的存在性。随后，Kim [16]探讨了无磁阻(理想情形)下 3D 幂律型非线性粘性 MHD 方程组的局部经典解，并针对小初值条件给出了全局经典解的存在性证明及其时空衰减估计。最近，Kim [17]将相关结论推广至 3D (Hall-)MHD 方程组，在无磁阻情形下建立了局部及全局经典解的存在性结果，并分析了其时空衰减特性。

本文主要探讨非牛顿系统(1) (2)的初边值问题，具体考虑

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, & (x,t) \in Q_T, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - \operatorname{div} S(D(u)) + \nabla \pi = \operatorname{curl} b \times b, & (x,t) \in Q_T, \\ S(D(u)) = 2\mu\left(|D(u)|^2\right) D(u) + \lambda(\operatorname{div} u) \operatorname{div} u\, I, & \\ \partial_t b - \operatorname{curl}(u \times b) = -\operatorname{curl}(\operatorname{curl} b), & (x,t) \in Q_T, \\ \operatorname{div} b = 0, & (x,t) \in Q_T, \end{cases} \tag{3}$$

具有初边值条件

$$\begin{cases} \rho|_{t=0} = \rho_0(x), \quad \rho u|_{t=0} = \rho_0 u_0(x), \quad b|_{t=0} = b_0(x), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad b \cdot n|_{\partial\Omega} = 0, \quad \operatorname{curl} b \times n|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

注释 1.1 关于边界条件(4)，其具有明确的物理背景。

首先，$u|_{\partial\Omega} = 0$ 是流体力学中经典的黏附边界条件，它描述了黏性流体在固体壁面上的运动状态，即流体接触壁面的速度与壁面速度(此处为静止)保持一致。

其次，磁场边界条件 $b \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$ 和 $\operatorname{curl} b \times n|_{\partial\Omega} = 0$ 共同构成了理想导体边界条件。其中：$b \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$ 表示磁感线与边界平行，磁场没有法向分量穿过边界，这说明边界是不可穿透的磁屏障；$\operatorname{curl} b \times n|_{\partial\Omega} = 0$ 则对应于电场切向分量在理想导体表面消失的物理性质。在 MHD 框架下，由于 $u = 0$，该条件确保了电流在边界处的切向分量为零。这种边界条件在受控核聚变装置(如托卡马克装置的金属壁)以及天体物理中的等离子体约束模型中被广泛采用，因为它能有效地模拟导电流体被限制在封闭且高导电容器内的情形。

本文中，我们假设初值满足

$$\begin{cases} \int_\Omega \rho_0 \mathrm{d}x =: m > 0, \quad \rho_0 \ge 0, \quad \rho_0 \in W^{1,q}(\Omega), \quad 3 < q \le 6, \\ u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad b_0 \in H^2(\Omega), \quad \operatorname{div} b_0 = 0, \quad b_0 \cdot n|_{\partial\Omega} = 0, \quad \operatorname{curl} b_0 \times n|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{5}$$

以及相容性条件

$$-\operatorname{div}S\left(D\left(u_0\right)\right)+\nabla\pi_0-\operatorname{curl}b_0\times b_0=\rho_0^{1/2}g, \tag{6}$$

其中 $\pi_0=a\rho_0^\gamma$， $g\in L^2(\Omega)$ 为一给定的已知函数。

令 $\varepsilon_\mu>0,\varepsilon_\lambda\in R$ 为常数，且满足 $2\varepsilon_\mu+3\varepsilon_\lambda>0$。本文假设粘性系数 $\mu(\cdot),\lambda(\cdot)$ 连续可微，且对所有 $s\ge0$ 满足：

假设 1.1 (1) $\mu(s)\ge\varepsilon_\mu$， $\mu(s)+2s\mu'(s)\ge\varepsilon_\mu$；(2) $\lambda(r)\ge\varepsilon_\lambda$， $\lambda(r)+r\lambda'(r)\ge\varepsilon_\lambda$。

事实上，由假设 1.1 及正则性 $\mu,\lambda\in C^1$ 可知，张量 S 在空间 $W^{1,p}(\Omega)$ 中为严格单调算子。

针对问题(3) (4)，本文旨在将文献[18]处理牛顿流体的方法推广至非牛顿 MHD 情形，在适当的假设下证明其局部强解的存在唯一性。由于允许初始密度出现真空状态，这给数学分析带来了显著的困难。证明强解存在性的核心难点在于建立速度场 u 的高阶范数估计，为此必须深入分析与系统(3)关联的椭圆系统结构。从形式上看，该系统由密度 ρ 的双曲输运方程与速度 u 的抛物型扩散方程耦合而成；但在真空区域，动量方程会退化为混合椭圆－抛物型。为了处理具有高度非线性的椭圆主部，我们需要更精细的正则性估计。对于牛顿流体，线性椭圆正则性理论[19] [20]起到了关键作用；然而，对于非线性系统，一般性的 $W^{2,p}$ 正则性并不总是成立。因此我们引入如下假设作为理论前提，并在此基础上推导出证明局部适定性所需的先验估计。

假设 1.2 ($W^{2,p}$-正则性)令 $p\in(1,\infty)$， $f\in L^p(\Omega)$，则 Dirichlet 边值问题 $\begin{cases}-\operatorname{div}S\left(D(u)\right)=f\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$ 具有唯一解 $u\in W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega)$，且存在常数 $C>0$，使得 $\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}\le C\|f\|_{L^p(\Omega)}$。

注释 1.2 若 $\mu(\cdot)$ 与 $\lambda(\cdot)$ 均为常数，则假设 1.2 中的 Dirichlet 边值问题简化为经典的线性 Lamé 系统。在此情形下，若椭圆性条件(假设 1.1)成立，其解的 $W^{2,p}$ 估计是标准且已知的。针对一般情形(2)，Al Baba 等人在文献[21]中通过借鉴 Beirão da Veiga 的方法，证明了二阶 L^p 估计。该证明除了要求满足椭圆性外，还需对函数 $\mu(\cdot)$ 与 $\lambda(\cdot)$ 施加某种小量限制，包括要求其在常数附近波动以及具备某种 $(p-\delta)$-结构。此外，他们还证明了在任意空间维数下，仅凭椭圆性条件即可推导出 L^2 框架下的二阶先验估计。

本文的主要定理如下：

定理 1.1 假设初值 (ρ_0,b_0,u_0) 满足(5)及相容性条件(6)，则存在时间 $\tilde T>0$，使得在 $\left[0,\tilde T\right]$ 上问题(3) (4)存在唯一强解 (ρ,b,u) 满足

$$\begin{aligned}&\rho\in C\left(\left[0,\tilde T\right];W^{1,q}(\Omega)\right),\quad \rho_t\in C\left(\left[0,\tilde T\right];L^q(\Omega)\right),\\&b,\,u\in C\left(\left[0,\tilde T\right];H^2(\Omega)\right)\cap L^2\left(0,\tilde T;W^{2,q}(\Omega)\right),\\&b_t,\,u_t\in L^2\left(0,\tilde T;H^1(\Omega)\right),\quad b_t,\,\sqrt{\rho}u_t\in L^\infty\left(0,\tilde T;L^2(\Omega)\right),\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $\tilde T=T_*\wedge T_{**}:=\min\{T_*,T_{**}\}$， T_* 与 T_{**} 的定义见下文。

注释 1.3 本文所采用的强解定义与文献[18]一致。具体而言，问题(3)~(4)的强解是指一个在 $\left[0,\tilde T\right]\times\Omega$ 内几乎处处满足(3)且具备正则性(7)的弱解。

记号说明：本文用 $L^q(\Omega)(1\le q\le\infty)$ 表示标准的 Lebesgue 空间，其范数记为 $\|\cdot\|_{q,\Omega}$；用 $W^{m,q}(\Omega)$ 表示标准的 Sobolev 空间，其范数记为 $\|\cdot\|_{m,q,\Omega}$。在不引起混淆的情形下，我们将省略范数和空间记号中的 Ω，例如：将 $\|\cdot\|_{q,\Omega}$ 简记为 $\|\cdot\|_q$。用 $W_0^{m,q}(\Omega)$ 表示 $C_0^\infty(\Omega)$ 在范数 $\|\cdot\|_{m,q}$ 意义下的闭包。

2. 线性化问题的一致性先验估计

设 $v(x,t)$ 为一给定函数，满足 $v(0)=u_0$， $v|_{\partial\Omega}=0$，并且对某固定常数 c_1,β 和时间 T^* 满足

$$\sup_{0\le t\le T^*}\left(\|v(t)\|_{1,2}+\beta^{-1}\|v(t)\|_{2,2}\right)+\int_0^{T^*}\|v_t(t)\|_{1,2}^2+\|v(t)\|_{2,q}^2\,\mathrm{d}t\le c_1,$$

其中 $c_0:=2+\|\rho_0\|_{1,q}+\|b_0\|_{2,2}+\|u_0\|_{2,2}+\|g\|_2$， $1<c_0<c_1<c_2:=\beta c_1$， $0<T^*\le T$。

考虑线性化问题

$$\begin{cases}\partial_t\rho+\operatorname{div}(\rho v)=0,\\ \partial_t(\rho u)+\operatorname{div}(\rho u\otimes v)-\operatorname{div}S(D(u))+\nabla p=\operatorname{curl}b\times b,\\ S(D(u))=2\mu\left(|D(u)|^2\right)D(u)+\lambda(\operatorname{div}u)\operatorname{div}uI,\\ \partial_t b-\operatorname{curl}(v\times b)=-\operatorname{curl}(\operatorname{curl}b),\\ \operatorname{div}b=0,\\ \rho|_{t=0}=\rho_0(x),\quad \rho u|_{t=0}=\rho_0u_0(x),\quad b|_{t=0}=b_0(x),\\ u|_{\partial\Omega}=0,\quad b\cdot n|_{\partial\Omega}=0,\quad \operatorname{curl}b\times n|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}\tag{8}$$

其中初值 (ρ_0,b_0,u_0) 满足(5)及相容性条件(6)。

本节的主要目的是给出线性化问题(8)解的适定性，并推导解的一致性先验估计。

首先，关于密度 $\rho(x,t)$ 及磁场 $b(x,t)$ 有如下结果成立。

引理 2.1 [22]线性化问题$(8)_1$，$(8)_6$，$(8)_7$ 存在唯一解 $\rho(x,t)$，满足

$$\|\rho(t)\|_{1,q}\le Cc_0,\quad \|\rho_t(t)\|_q\le Cc_2^2,$$

其中 $0\le t\le T^*\wedge T_1$， $T_1=c_2^{-1}<1$。

引理 2.2 [23]抛物问题$(8)_4$~$(8)_7$ 存在唯一解 $b(x,t)$，满足

$$\|b(t)\|_{1,2}^2+\int_0^t\|b_t(\tau)\|_2^2+\|b(\tau)\|_{2,2}^2\,\mathrm{d}\tau\le Cc_0^2,$$

$$\|b(t)\|_{2,2}\le Cc_0^2c_1^4,$$

$$\|b_t(t)\|_2^2+\int_0^t\|b_t(\tau)\|_{1,2}^2+\|b(\tau)\|_{2,q}^2\,\mathrm{d}\tau\le Cc_0^2c_1,$$

其中 $0\le t\le T^*\wedge T_3$， $T_3=T_2\wedge c_1^{1-2/\alpha}$， $T_2=c_2^{-2}<T_1$， $\alpha=(2q-6)/(5q-6)\in(0,1)$。

关于速度 $u(x,t)$ 有如下结果成立。

引理 2.3 假设 $\rho_0\ge\delta>0$，则问题$(8)_2$，$(8)_3$，$(8)_6$，$(8)_7$ 存在唯一强解 $u(x,t)$，满足

$$\|u(t)\|_{1,2}^2+\left\|\sqrt{\rho}u_t(t)\right\|_2^2+\int_0^t\|u_t(s)\|_{1,2}^2\,\mathrm{d}s\le Cc_0^5,$$

$$\|\nabla u(t)\|_{1,2}\le Cc_2^{9+\gamma},$$

$$\int_0^t\|u(s)\|_{2,q}^2\,\mathrm{d}s\le Cc_0^5,$$

其中 $0\le t\le T^*\wedge T_4$， $T_4:=Cc_2^{-2(\gamma+11)}$。

证明： 对$(8)_2$ 两边关于 t 求导，得

$$\begin{aligned}&\partial_t(\rho u_t)+\partial_t(\rho v\cdot\nabla u)-2\operatorname{div}\left[\mu\left(|D(u)|^2\right)D(u_t)\right]-4\operatorname{div}\left[\mu'\left(|D(u)|^2\right)(D(u):D(u_t))D(u)\right]\\&-\nabla(\lambda(\operatorname{div}u)\operatorname{div}u_t)-\nabla\left[\lambda(\operatorname{div}u)\operatorname{div}u_t\operatorname{div}u\right]+\nabla\pi_t=\partial_t[\operatorname{curl}b\times b].\end{aligned}$$

对上式两边乘以 u_t，在 Ω 上积分得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \partial_t(\rho u_t)\cdot u_t\,\mathrm{d}x+\int_\Omega \partial_t(\rho v\cdot\nabla u)\cdot u_t\,\mathrm{d}x\\&+\int_\Omega\left\{-2\operatorname{div}\left[\mu\left(|D(u)|^2\right)D(u_t)\right]\cdot u_t-4\operatorname{div}\left[\mu'\left(|D(u)|^2\right)\left(D(u):D(u_t)\right)D(u)\right]\cdot u_t\right\}\mathrm{d}x\\&+\int_\Omega\left\{-\nabla\left(\lambda(\operatorname{div}u)\operatorname{div}u_t\right)-\nabla\left[\lambda(\operatorname{div}u)\operatorname{div}u_t\operatorname{div}u\right]\right\}\cdot u_t\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega\left\{-\nabla\pi_t+\partial_t\left[\operatorname{curl}b\times b\right]\right\}\cdot u_t\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{9}$$

利用假设 1.1，对(9)式左端第三个积分可估计如下

$$\begin{aligned}&-2\int_\Omega\operatorname{div}\left[\mu\left(|D(u)|^2\right)D(u_t)\right]\cdot u_t\,\mathrm{d}x-4\int_\Omega\operatorname{div}\left[\mu'\left(|D(u)|^2\right)\left(D(u):D(u_t)\right)D(u)\right]\cdot u_t\,\mathrm{d}x\\&=2\int_\Omega\mu\left(|D(u)|^2\right)|D(u_t)|^2\,\mathrm{d}x+4\int_\Omega\mu'\left(|D(u)|^2\right)|D(u):D(u_t)|^2\,\mathrm{d}x\\&\ge\begin{cases}2\int_\Omega\mu\left(|D(u)|^2\right)|D(u_t)|^2\,\mathrm{d}x, & \text{若 } \mu'\left(|D(u)|^2\right)\ge 0\\ 2\int_\Omega\left[\mu\left(|D(u)|^2\right)+2|D(u)|^2\mu'\left(|D(u)|^2\right)\right]|D(u_t)|^2\,\mathrm{d}x, & \text{若 } \mu'\left(|D(u)|^2\right)<0\end{cases}\\&\ge 2\varepsilon_\mu\int_\Omega|D(u_t)|^2\,\mathrm{d}x=\varepsilon_\mu\int_\Omega\left[|\nabla u_t|^2+|\operatorname{div}u_t|^2\right]\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{10}$$

同样地，利用假设 1.1，对(9)式左端第四个积分有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\left\{-\nabla\left(\lambda(\operatorname{div}u)\operatorname{div}u_t\right)-\nabla\left[\lambda(\operatorname{div}u)\operatorname{div}u_t\operatorname{div}u\right]\right\}\cdot u_t\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega\left(\lambda(\operatorname{div}u)+\operatorname{div}u^k\lambda'(\operatorname{div}u)\right)|\operatorname{div}u_t|^2\,\mathrm{d}x\ge\varepsilon_\lambda\int_\Omega|\operatorname{div}u_t|^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{11}$$

由于 $\partial_t(\rho u_t)\cdot u_t=\rho u_{tt}\cdot u_t+\rho_t u_t^2$ 以及 $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\rho u_t^2=\int_\Omega\left[\rho u_t u_{tt}+\frac{1}{2}\rho_t u_t^2\right]\mathrm{d}x$ 可得

$$\int_\Omega\partial_t(\rho u_t)\cdot u_t\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\rho u_t^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega\rho_t u_t^2\,\mathrm{d}x.$$

利用密度方程可得

$$\frac{1}{2}\int_\Omega\rho_t u_t^2=-\frac{1}{2}\int_\Omega\operatorname{div}(\rho v)u_t^2=\int_\Omega\rho v\cdot\nabla u_t\cdot u_t.$$

将这一项与随体导数项合并即得

$$\begin{aligned}\int_\Omega\left\{\partial_t(\rho v\cdot u)+\rho v\cdot\nabla u_t\right\}\cdot u_t\,\mathrm{d}x&=\int_\Omega\left\{\rho_t v\cdot\nabla u+\rho v_t\cdot\nabla u+\rho v\cdot\nabla u_t+\rho v\cdot\nabla u_t\right\}\cdot u_t\,\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega\left\{\rho_t v\cdot\nabla u+\rho v_t\cdot\nabla u+2\rho v\cdot\nabla u_t\right\}\cdot u_t\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

另一方面，由于

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x=\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla u_t\mathrm{d}x,$$

将上述各式代入(9)并整理可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\rho u_t^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\varepsilon_\mu\int_\Omega|\nabla u_t|^2\,\mathrm{d}x+\left(\varepsilon_\lambda+\varepsilon_\mu\right)\int_\Omega|\operatorname{div}u_t|^2\,\mathrm{d}x\\&\le\int_\Omega\left[-\nabla\pi_t-\rho_t v\cdot\nabla u-\rho v_t\cdot\nabla u-2\rho v\cdot\nabla u_t+\operatorname{div}\left(bb_tI-2b\otimes b_t\right)\right]\cdot u_t\,\mathrm{d}x+\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla u_t\mathrm{d}x\\&:=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6.\end{aligned}\tag{12}$$

下面利用 Holder 不等式，Young 不等式以及引理 2.1，引理 2.2 的结果逐个对 $I_i\,(i=1,2,\cdots,6)$ 做估计。

对 I_1：

$$I_1=\int_\Omega(-\nabla\pi_t)u_t\,\mathrm{d}x\le\left|\int_\Omega\pi_t\cdot\mathrm{div}u_t\,\mathrm{d}x\right|\le\|\pi_t\|_2\cdot\|\nabla u_t\|_2\le C_\varepsilon\|\pi_t\|_2^2+\varepsilon\|\nabla u_t\|_2^2$$

由 $\pi=a\rho^\gamma$，则 $\pi_t=a\gamma\rho^{\gamma-1}\rho_t$，故

$$\|\pi_t\|_2=\left\|a\gamma\rho^{\gamma-1}\rho_t\right\|_2\le C\|\rho\|_\infty^{\gamma-1}\|\rho_t\|_2\le C\cdot c_0^{\gamma-1}c_2^2,$$

从而有

$$I_1\le C_\varepsilon\|\pi_t\|_2^2+\varepsilon\|\nabla u_t\|_2^2\le C_\varepsilon\cdot c_0^{2(\gamma-1)}\cdot c_2^2+\varepsilon\|\nabla u_t\|_2^2.$$

对 I_2：

$$\begin{aligned}I_2&\le\left|\int_\Omega-\rho_t v\cdot\nabla u u_t\,\mathrm{d}x\right|\le\|\rho_t\|_3\cdot\|v\|_\infty\cdot\|\nabla u\|_2\cdot\|u_t\|_6\\&\le\|\rho_t\|_3\cdot\|v\|_{2,2}\cdot\|\nabla u\|_2\cdot\|\nabla u_t\|_2\\&\le C_\varepsilon\|\rho_t\|_3^2\cdot\|v\|_{2,2}^2\cdot\|\nabla u\|_2^2+\varepsilon\|\nabla u_t\|_2^2\\&\le C_\varepsilon\cdot c_2^4\cdot c_2^2\cdot\|\nabla u\|_2^2+\varepsilon\|\nabla u_t\|_2^2.\end{aligned}$$

对 I_3：

$$\begin{aligned}I_3&\le\left|\int_\Omega-\rho v_t\cdot\nabla u u_t\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_\Omega\sqrt{\rho}\cdot\sqrt{\rho}u_t\cdot(v_t\cdot\nabla)u\,\mathrm{d}x\right|\\&\le\|\rho\|_\infty^{\frac12}\cdot\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2\cdot\|v_t\|_6\cdot\|\nabla u\|_3\\&\le\|\rho\|_\infty^{\frac12}\cdot\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2\cdot\|\nabla v_t\|_2\cdot\|\nabla u\|_{1,2}^{\frac12}\cdot\|\nabla u\|_2^{\frac12}\\&\le C_\eta\cdot\|\rho\|_\infty\cdot\|\nabla u\|_2\cdot\|\nabla u\|_{1,2}+\eta\|\nabla v_t\|_2^2\cdot\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2^2\\&\le C_\eta\cdot c_0\cdot\|\nabla u\|_2\cdot\|\nabla u\|_{1,2}+\eta\|\nabla v_t\|_2^2\cdot\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2^2.\end{aligned}\tag{13}$$

又由假设 1.2 可知

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{1,2}&\le C\left\{\|\rho u_t\|_2+\|\rho v\cdot\nabla u\|_2+\|\nabla\pi\|_2+\|b\|_{2,2}\cdot\|\mathrm{curl}b\|_2\right\}\\&\le C\left[\|\rho\|_\infty^{\frac12}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2+\|\rho\|_\infty\cdot\|v\|_\infty\cdot\|\nabla u\|_2+\left\|a\gamma\rho^{\gamma-1}\nabla\rho\right\|_2+\|b\|_{2,2}\|\mathrm{curl}b\|_2\right]\\&\le C\left[c_0^{\frac12}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2+c_0c_2\cdot\|\nabla u\|_2+\|\rho\|_\infty^{\gamma-1}\cdot\|\nabla\rho\|_2+\|b\|_{2,2}\cdot\|\mathrm{curl}b\|_2\right]\\&\le C\left[c_0^{\frac12}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2+c_0c_2\cdot\|\nabla u\|_2+c_0^{\gamma-1}\cdot c_0+c_0^2c_1^4c_0^2\right]\\&=C\left[c_0^{\frac12}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2+c_0c_2\cdot\|\nabla u\|_2+c_0^\gamma+c_0^4\cdot c_1^4\right],\end{aligned}$$

将上式代入(13)得

$$I_3\le C_\eta\cdot c_0\|\nabla u\|_2\left[c_0^{\frac12}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2+c_0c_2\|\nabla u\|_2+c_0^\gamma+c_0^4\cdot c_0^4\right]+\eta\|\nabla v_t\|_2^2\cdot\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2^2.$$

对 I_4：

$$
\begin{aligned}
I_4 &\le \left|\int_\Omega -2\rho v\cdot\nabla u_t u_t\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_\Omega 2\sqrt{\rho}\cdot\sqrt{\rho}u_t\cdot v\cdot\nabla u_t\,\mathrm{d}x\right| \\
&\le 2\|\rho\|_\infty^{\frac{1}{2}}\cdot\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2\cdot\|v\|_\infty\cdot\|\nabla u_t\|_2 \le 2\|\rho\|_\infty^{\frac{1}{2}}\cdot\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2\cdot\|v\|_{2,2}\cdot\|\nabla u_t\|_2 \\
&\le C_\varepsilon\cdot\|\rho\|_\infty\cdot\|v\|_{2,2}^2\cdot\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2^2+\varepsilon\|\nabla u_t\|_2^2 \le C_\varepsilon\cdot c_0\cdot c_2\cdot\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2^2+\varepsilon\|\nabla u_t\|_2^2.
\end{aligned}
$$

对 I_5：

$$
\begin{aligned}
I_5 &\le \left|\int_\Omega \operatorname{div}\left(bb_tI-2b\otimes b_t\right)\cdot u_t\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_\Omega \left(bb_tI-2b\otimes b_t\right)\cdot\nabla u_t\,\mathrm{d}x\right| \\
&\le \|b\|_\infty\cdot\|b_t\|_2\cdot\|\nabla u_t\|_2+2\|b\|_\infty\cdot\|b_t\|_2\cdot\|\nabla u_t\|_2 = 3\|b\|_\infty\cdot\|b_t\|_2\cdot\|\nabla u_t\|_2 \\
&\le C_\varepsilon\cdot\|b\|_\infty^2\cdot\|b_t\|_2^2+\varepsilon\|\nabla u_t\|_2^2 \le C_\varepsilon\cdot c_0^4c_1^8\cdot c_0^2c_1+\varepsilon\|\nabla u_t\|_2^2.
\end{aligned}
$$

对 I_6：

$$
I_6 \le \left|\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla u_t\mathrm{d}x\right| \le \varepsilon\|\nabla u_t\|_2^2+C_\varepsilon\|\nabla u\|_2^2.
$$

取 $\varepsilon=\varepsilon_\mu/10$，将上述各估计代入(12)整理得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left(\rho u_t^2+|\nabla u|^2\right)\mathrm{d}x+\varepsilon_\mu\int_\Omega|\nabla u_t|^2\,\mathrm{d}x+\left(\varepsilon_\lambda+\varepsilon_\mu\right)\int_\Omega|\operatorname{div}u_t|^2\,\mathrm{d}x \\
&\le C\left[c_0^{2(\gamma-1)}c_2^4+c_\eta c_0^2\left(c_0^{2\gamma}+c_0^8c_1^8\right)+c_0^6c_1^9\right]+C\left(c_2^6+c_0^3+c_0^2c_2+1+c_0c_2\right)\cdot\left(\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2^2+\|\nabla u\|_2^2\right) \\
&\quad+\eta\|\nabla v_t\|_2^2\cdot\left(\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2^2+\|\nabla u\|_2^2\right) \\
&\le Cc_2^{2(\gamma+10)}+Cc_2^6\cdot\left(\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2^2+\|\nabla u\|_2^2\right)+\eta\|\nabla v_t\|_2^2\cdot\left(\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2^2+\|\nabla u\|_2^2\right).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

记 $X(t)=\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2^2+\|\nabla u\|_2^2$，取 $\eta=c_1^{-1}$， $t\le T_4:=Cc_2^{-2(\gamma+11)}$，注意到

$$
X(0)=\lim_{t\to0^+}\left\{\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2^2+\|\nabla u\|_2^2\right\}=\lim_{t\to0^+}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2^2+\lim_{t\to0^+}\|\nabla u\|_2^2\le Cc_0^5+C\le Cc_0^5.
$$

由(14)利用 Gronwall 不等式得

$$
\begin{aligned}
X(t) &\le \exp\left\{\int_0^t\left(Cc_2^6+\eta\|\nabla v\|_2^2\right)\mathrm{d}s\right\}\cdot\left\{X(0)+\int_0^tCc_2^{2(\gamma+10)}\mathrm{d}s\right\} \\
&\le \exp\left\{Cc_2^6\cdot t+\eta c_1\right\}\cdot\left\{X(0)+Cc_2^{2(\gamma+10)}\cdot t\right\} \\
&\le Ce^C\left(1+c_0^5\right)\le Cc_0^5.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

回到积分不等式得

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_\mu\int_0^{T_4}\|\nabla u_t\|_2^2\,\mathrm{d}t &\le X(0)-X(t)+\int_0^{T_4}\left\{Cc_2^{2(\gamma+10)}+Cc_2^6\cdot X(t)+c_1^{-1}\|\nabla v_t\|_2^2\cdot X(t)\right\}\mathrm{d}t \\
&\le Cc_0^5+Cc_0^5+Cc_2^{2(\gamma+10)}\cdot T_4+Cc_2^6c_0^5\cdot T_4+Cc_0^5\le Cc_0^5.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

综合(15) (16)最终可得

$$
\sup_{0\le t\le T_4}\left\{\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2^2+\|\nabla u\|_2^2\right\}+\int_0^{T_4}\|\nabla u_t\|_2^2\,\mathrm{d}t\le Cc_0^5.
\tag{17}
$$

利用假设 1.2 得

$$
\begin{aligned}
\|\nabla u\|_{1,2} &\le C\left\{\|\rho u_t\|_2+\|\rho v\cdot\nabla u\|_2+\|\nabla\pi\|_2+\|b\|_2\cdot\|\mathrm{curl}b\|_2\right\}\\
&\le C\left(\|\rho\|_\infty^{\frac{1}{2}}\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2+\|\rho\|_\infty\cdot\|v\|_6\cdot\|\nabla u\|_3+\|\rho\|_\infty^{\gamma-1}\cdot\|\nabla\rho\|_2+\|b\|_2\cdot\|\mathrm{curl}b\|_2\right)\\
&\le C\left(c_0^{\frac{1}{2}}\cdot c_0^{\frac{5}{2}}+c_0\cdot c_2\cdot\|\nabla u\|_3+c_0^{\gamma-1}\cdot c_0+c_0\cdot c_0\right)\\
&\le C\left\{c_0^3+c_0\cdot c_2\cdot\|\nabla u\|_2^{\frac{1}{2}}\cdot\|\nabla u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}+c_2^{\gamma}+c_0^2\right\}\\
&\le Cc_2^{3+\gamma}+C\cdot c_2^4\cdot\|\nabla u\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|_{H^1},
\end{aligned}
$$

移项即得

$$
\|\nabla u\|_{1,2}\le Cc_2^{9+\gamma}. \tag{18}
$$

同样地，再次利用假设 1.2 得

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{2,q} &\le C\left\{\|\rho u_t\|_q+\|\rho v\cdot\nabla u\|_q+\|\nabla\pi\|_q+\|\mathrm{curl}b\times b\|_q\right\}\\
&\le C\left\{\|\rho\|_\infty\cdot\|\nabla u_t\|_2+\|\rho\|_\infty\cdot\|v\|_\infty\cdot\|\nabla u\|_q+a\gamma\|\rho\|_\infty^{\gamma-1}\cdot\|\nabla\rho\|_q+\|b\|_\infty\cdot\|\mathrm{curl}b\|_q\right\}\\
&\le C\left\{c\cdot\|\nabla u_t\|_2+c_0\cdot c_2\cdot c_1^{9+\gamma}+c_0^{\gamma-1}\cdot c_0+c_0^2c_1^4\cdot c_0^2c_1^4\right\}\\
&\le C\left\{c_0\cdot\|\nabla u_t\|_2+c_2^{11+\gamma}\right\},
\end{aligned} \tag{19}
$$

从而有

$$
\int_0^t\|u(s)\|_{2,q}^2\,\mathrm{d}s\le Cc_0\int_0^t\|\nabla u_t\|_2^2\,\mathrm{d}s+C\cdot c_2^{2(11+\gamma)}\cdot t\le Cc_0^5. \tag{20}
$$

综合上述，引理 2.3 得证。

取 $c_1=Cc_0^5$， $c_2=Cc_0^{10}$， $\beta=C\cdot c_0^{85+10\gamma}$，综合引理 2.1 至引理 2.3 最后可得

$$
\|\rho(t)\|_{1,q}+\|\rho_t\|_q+\|b_t(t)\|_{2,2}\le Cc_0+Cc_2^2+Cc_0^2c_1^4\le C\cdot c_1^6, \tag{21}
$$

$$
\left\|\sqrt{\rho}u_t\right\|_2+\|b_t\|_2+\int_0^t\left[\|b(s)\|_{1,2}^2+\|b(s)\|_{2,q}^2\right]\mathrm{d}s\le Cc_0^5+Cc_0^2c_1\le Cc_1^5, \tag{22}
$$

以及

$$
\|u(t)\|_{1,2}+\beta^{-1}\|u(t)\|_{2,2}+\int_0^t\left[\|u_t(s)\|_{1,2}^2+\|u(s)\|_{2,q}^2\right]\mathrm{d}s\le c_1, \tag{23}
$$

其中 $0\le t\le T^*\wedge T_4$。

有了上述估计，类似于文献[21]的讨论过程，即可得如下结果。

引理 2.4 问题(8)于 $(0,T_*)$ 存在唯一强解 (ρ,b,u)，且满足估计(21)~(23)以及正则性

$$
\begin{aligned}
&\rho\in C\left([0,T_*];W^{1,q}(\Omega)\right),\quad \rho_t\in C\left([0,T_*];L^q(\Omega)\right),\\
&b,\ u\in C\left([0,T_*];H^2(\Omega)\right)\cap L^2\left(0,T_*;W^{2,q}(\Omega)\right),\\
&b_t,\ u_t\in L^2\left(0,T_*;H^1(\Omega)\right),\quad b_t,\ \sqrt{\rho}u_t\in L^\infty\left(0,T_*;L^2(\Omega)\right).
\end{aligned}
$$

其中 $T_*=T^*\wedge T_4$。

3. 定理 1.1 的证明

3.1. 近似解的构造与一致性先验估计

令 $\omega \in C\left(\left[0,\infty\right];H^2\left(\Omega\right)\cap H_0^1\left(\Omega\right)\right)\cap L^2\left(0,\infty;H^3\left(\Omega\right)\right)$ 为如下抛物方程的解

$$\begin{cases} \omega_t - \Delta\omega = 0, & (x,t)\in Q_T, \\ \omega(0) = u_0(x), & x\in \Omega. \end{cases}$$

则由抛物方程理论知

$$\sup_{0\le t\le T_*}\left(\left\|\omega(t)\right\|_{H_0^1} + \beta^{-1}\left\|\omega(t)\right\|_{H^2}\right) + \int_0^{T_*}\left\|\omega_t(t)\right\|_{H_0^1}^2 + \left\|\omega\right\|_{W^{2,q}}^2 \,\mathrm{d}t \le c_1.$$

下面利用迭代法构造问题(3) (4)的近似问题及近似解序列。

(1) 首先，定义 $u^0 = \omega$；

(2) 假设对 $k\ge 1$， u^{k-1} 已经定义，由上节引理 2.4 知，初边值问题

$$\begin{cases} \partial_t\rho^k + \operatorname{div}\left(\rho u^{k-1}\right) = 0, \\ \partial_t\left(\rho^k u^k\right) + \operatorname{div}\left(\rho^k u^k \otimes u^{k-1}\right) - \operatorname{div} S\left(D\left(u^k\right)\right) + \nabla p = \operatorname{curl} b^k \times b^k, \\ S\left(D\left(u^k\right)\right) = 2\mu\left(\left|D\left(u^k\right)\right|^2\right)D\left(u^k\right) + \lambda\left(\operatorname{div} u^k\right)\operatorname{div} u I, \\ \partial_t b^k - \operatorname{curl}\left(u^{k-1}\times b^k\right) = -\operatorname{curl}\left(\operatorname{curl} b^k\right), \\ \operatorname{div} b^k = 0, \\ \rho^k\big|_{t=0} = \rho_0(x), \quad \rho^k u^k\big|_{t=0} = \rho_0 u_0(x), \quad b^k\big|_{t=0} = b_0(x), \\ u^k\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad b^k\cdot n\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \operatorname{curl} b^k \times n\big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{24}$$

存在唯一强解 $\left(\rho^k,u^k,b^k\right)$，且存在常数 $\tilde{C}$ 使得对一切 $k\ge 1$ 有

$$\begin{aligned} &\sup_{0\le t\le T_*}\left(\left\|\rho^k(t)\right\|_{1,q} + \left\|\rho_t^k(t)\right\|_q\right) + \sup_{0\le t\le T_*}\left(\left\|b^k(t)\right\|_{2,2} + \left\|u^k(t)\right\|_{2,2}\right) + \sup_{0\le t\le T_*}\left(\left\|b_t^k(t)\right\|_2 + \left\|\sqrt{\rho^k}u_t^k(t)\right\|_2\right) \\ &+ \int_0^{T_*}\left(\left\|b_t^k(t)\right\|_{1,2}^2 + \left\|u_t^k(t)\right\|_{1,2}^2 + \left\|b^k(t)\right\|_{2,q}^2 + \left\|u^k(t)\right\|_{2,q}^2\right) \le \tilde{C}. \end{aligned} \tag{25}$$

3.2. 近似解的收敛性

定义 $\bar{\rho}^{k+1} := \rho^{k+1} - \rho^k$， $\bar{b}^{k+1} := b^{k+1} - b^k$， $\bar{u}^{k+1} := u^{k+1} - u^k$， 则由(24)知 $\bar{\rho}^{k+1},\bar{b}^{k+1},\bar{u}^{k+1}$ 满足

$$\bar{\rho}_t^{k+1} + \operatorname{div}\left(\bar{\rho}^{k+1}u^k\right) + \operatorname{div}\left(\rho^k\bar{u}^k\right) = 0, \tag{26}$$

$$\bar{b}_t^{k+1} + \operatorname{curl}\left(\bar{b}^{k+1}\times u^k + b^k\times\bar{u}^k\right) + \operatorname{curl}^2\bar{b}^{k+1} = 0, \tag{27}$$

$$\operatorname{div}\bar{b}^{k+1} = 0, \tag{28}$$

$$\begin{aligned} &\rho^{k+1}\bar{u}_t^{k+1} + \rho^{k+1}u^k\cdot\nabla\bar{u}^{k+1} - \left[\operatorname{div} S\left(u^{k+1}\right) - \operatorname{div} S\left(u^k\right)\right] + \nabla\left(\pi^{k+1} - \pi^k\right) \\ &= \bar{\rho}^{k+1}\left(-u_t^k - u^{k-1}\nabla u^k\right) - \rho^{k+1}\bar{u}^k\cdot\nabla u^k + \operatorname{div}\left[b^{k+1}\otimes b^{k+1} - b^k\otimes b^k - \frac{1}{2}\bar{b}^{k+1}\cdot\left(b^k + b^{k+1}\right)I\right]. \end{aligned} \tag{29}$$

下面推导关于 $\bar{\rho}^{k+1},\bar{b}^{k+1},\bar{u}^{k+1}$ 的先验估计。这里指出，按照惯例，后文中我们用 $\tilde{C}$ 表示一不依赖于参数 k 的一般常数，其在不同行中的值可能不同，不再重新标记。

对(26)两边乘以 $\bar{\rho}^{k+1}$，在 Ω 上积分，并利用 Holder 不等式，Young 不等式得

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left|\bar{\rho}^{k+1}\right|^2\mathrm{d}x &\le C\int_\Omega\left(\left|\nabla u^k\right|\left|\bar{\rho}^{k+1}\right|^2+\left|\nabla\rho^k\right|\left|\bar{u}^k\right|\left|\bar{\rho}^{k+1}\right|+\left|\rho^k\right|\left|\nabla\bar{u}^k\right|\left|\bar{\rho}^{k+1}\right|\right)\mathrm{d}x\\
&\le C\left[\left\|\nabla u^k\right\|_{W^{1,q}}\left\|\bar{\rho}^{k+1}\right\|_2^2+\left\|\nabla\rho^k\right\|_3\left\|\bar{u}^k\right\|_6\left\|\bar{\rho}^{k+1}\right\|_2+\left\|\rho^k\right\|_\infty\left\|\nabla\bar{u}^k\right\|_2\left\|\bar{\rho}^{k+1}\right\|_2\right]\\
&= C\left[\left\|\nabla u^k\right\|_{W^{1,q}}\left\|\bar{\rho}^{k+1}\right\|_2^2+\left(\left\|\nabla\rho^k\right\|_3+\left\|\rho^k\right\|_\infty\right)\left\|\nabla\bar{u}^k\right\|_2\left\|\bar{\rho}^{k+1}\right\|_2\right]\\
&\le C\cdot\left\|\nabla u^k\right\|_{W^{1,q}}\left\|\bar{\rho}^{k+1}\right\|_2^2+\eta\left\|\nabla\bar{u}^k\right\|_2^2+C\cdot\frac{1}{\eta}\left(\left\|\nabla\rho^k\right\|_3+\left\|\rho^k\right\|_\infty\right)^2\left\|\bar{\rho}^{k+1}\right\|_2^2\\
&\le A_\eta^k(t)\cdot\left\|\bar{\rho}^{k+1}\right\|_2^2+\eta\left\|\nabla\bar{u}^k\right\|_2^2,
\end{aligned}\tag{30}$$

其中 $A_\eta^k(t)=\tilde{C}\left\|\nabla u^k\right\|_{W^{1,q}}+\tilde{C}\cdot\frac{1}{\eta}\left(\left\|\nabla\rho^k\right\|_3+\left\|\rho^k\right\|_\infty\right)^2$。

对(27)两边乘以 $\bar{b}^{k+1}$，在 Ω 上积分得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left|\bar{b}^{k+1}\right|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega\left|\operatorname{curl}\bar{b}^{k+1}\right|^2\mathrm{d}x=\int_\Omega\operatorname{curl}\left(u^k\times\bar{b}^{k+1}\right)\cdot\bar{b}^{k+1}\mathrm{d}x+\int_\Omega\operatorname{curl}\left(\bar{u}^k\times b^k\right)\cdot\bar{b}^{k+1}\mathrm{d}x.\tag{31}$$

利用 Holder 不等式有

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\operatorname{curl}\left(u^k\times\bar{b}^{k+1}\right)\cdot\bar{b}^{k+1}\mathrm{d}x &= \int_\Omega\left(\bar{b}^{k+1}\cdot\nabla\right)u^k\cdot\bar{b}^{k+1}\mathrm{d}x-\int_\Omega\left(u^k\cdot\nabla\right)\bar{b}^{k+1}\cdot\bar{b}^{k+1}\mathrm{d}x-\int_\Omega\bar{b}^{k+1}\operatorname{div}u^k\cdot\bar{b}^{k+1}\mathrm{d}x\\
&\le\left\|\nabla u^k\right\|_\infty\left\|\bar{b}^{k+1}\right\|_2^2-\frac{1}{2}\int_\Omega u^k\cdot\nabla\left(\left|\bar{b}^{k+1}\right|^2\right)\mathrm{d}x-\int_\Omega\operatorname{div}u^k\cdot\left|\bar{b}^{k+1}\right|^2\mathrm{d}x\\
&=\left\|\nabla u^k\right\|_\infty\left\|\bar{b}^{k+1}\right\|_2^2+\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\operatorname{div}u^k\right)\left|\bar{b}^{k+1}\right|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega\operatorname{div}u^k\cdot\left|\bar{b}^{k+1}\right|^2\mathrm{d}x\\
&=\left\|\nabla u^k\right\|_\infty\left\|\bar{b}^{k+1}\right\|_2^2-\frac{1}{2}\int_\Omega\operatorname{div}u^k\cdot\left|\bar{b}^{k+1}\right|^2\mathrm{d}x\\
&\le\left\|\nabla u^k\right\|_\infty\left\|\bar{b}^{k+1}\right\|_2^2+\frac{1}{2}\left\|\nabla u^k\right\|_\infty\left\|\bar{b}^{k+1}\right\|_2^2\le C\left\|\nabla u^k\right\|_\infty\left\|\bar{b}^{k+1}\right\|_2^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\operatorname{curl}\left(\bar{u}^k\times b^k\right)\cdot\bar{b}^{k+1}\mathrm{d}x &= \int_\Omega\left[\left(b^k\cdot\nabla\right)\bar{u}^k-\left(\bar{u}^k\cdot\nabla\right)b^k-b^k\operatorname{div}\bar{u}^k\right]\cdot\bar{b}^{k+1}\mathrm{d}x\\
&\le\left\|b^k\right\|_\infty\left\|\nabla\bar{u}^k\right\|_2\left\|\bar{b}^{k+1}\right\|_2+\left\|\bar{u}^k\right\|_6\left\|\nabla b^k\right\|_3\left\|\bar{b}^{k+1}\right\|_2+\left\|b^k\right\|_\infty\left\|\nabla\bar{u}^k\right\|_2\left\|\bar{b}^{k+1}\right\|_2\\
&=\left\|b^k\right\|_\infty\left\|\nabla\bar{u}^k\right\|_2\cdot\left\|\bar{b}^{k+1}\right\|_2+\left\|\nabla\bar{u}^k\right\|_2\cdot\left\|\nabla b^k\right\|_3\cdot\left\|\bar{b}^{k+1}\right\|_2+\left\|b^k\right\|_\infty\cdot\left\|\nabla\bar{u}^k\right\|_2\cdot\left\|\bar{b}^{k+1}\right\|_2\\
&\le C\left(\left\|b^k\right\|_\infty+\left\|\nabla b^k\right\|_3\right)\cdot\left\|\nabla\bar{u}^k\right\|_2\cdot\left\|\bar{b}^{k+1}\right\|_2\\
&\le\eta\left\|\nabla\bar{u}^k\right\|_2^2+C\cdot\frac{1}{\eta}\cdot\left(\left\|b^k\right\|_\infty+\left\|\nabla b^k\right\|_3\right)^2\cdot\left\|\bar{b}^{k+1}\right\|_2^2.
\end{aligned}$$

将上述代入(31)得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\bar{b}^{k+1}\right\|_2^2+\left\|\operatorname{curl}\bar{b}^{k+1}\right\|_2^2\le B_\eta^k(t)\cdot\left\|\bar{b}^{k+1}\right\|_2^2+\eta\left\|\nabla\bar{u}^k\right\|_2^2,\tag{32}$$

其中 $B_\eta^k(t)=\tilde{C}\left\|\nabla u^k\right\|_\infty+\tilde{C}\cdot\frac{1}{\eta}\left(\left\|b^k\right\|_\infty+\left\|\nabla b^k\right\|_3\right)^2$。

对(29)两边乘以 $\bar{u}^{k+1}$，在 Ω 上积分得

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \rho^{k+1}\bar{u}_t^{k+1}\cdot\bar{u}^{k+1}\mathrm{d}x+\int_\Omega \rho^{k+1}u^k\cdot\nabla\bar{u}^{k+1}\cdot\bar{u}^{k+1}\mathrm{d}x-\int_\Omega\left(\operatorname{div}S\left(u^{k+1}\right)-\operatorname{div}S\left(u^k\right)\right)\cdot\bar{u}^{k+1}\mathrm{d}x\\
&=-\int_\Omega\nabla\left(\pi^{k+1}-\pi^k\right)\cdot\bar{u}^{k+1}\mathrm{d}x+\int_\Omega\bar{\rho}^{k+1}\left(-u_t^k-u^{k-1}\cdot\nabla u^k\right)\cdot\bar{u}^{k+1}\mathrm{d}x-\int_\Omega\rho^{k+1}\bar{u}^k\cdot\nabla u^k\cdot\bar{u}^{k+1}\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_\Omega\operatorname{div}\left[b^{k+1}\otimes b^{k+1}-b^k\otimes b^k-\frac{1}{2}\bar{b}^{k+1}\cdot\left(b^k+b^{k+1}\right)I\right]\cdot\bar{u}^{k+1}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

对(33)左边第一、二项：

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega\left(\rho^{k+1}\bar{u}_t^{k+1}+\rho^{k+1}u^k\cdot\nabla\bar{u}^{k+1}\right)\cdot\bar{u}^{k+1}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\rho^{k+1}\left|\bar{u}^{k+1}\right|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega\left[\rho_t^{k+1}+\operatorname{div}\left(\rho^{k+1}u^k\right)\right]\left|\bar{u}^{k+1}\right|^2\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\rho^{k+1}\left|\bar{u}^{k+1}\right|^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

对(33)左边第三项：

$$
\begin{aligned}
&-\int_\Omega\left(\operatorname{div}\mathbf{S}\left(u^{k+1}\right)-\operatorname{div}\mathbf{S}\left(u^k\right)\right)\cdot\bar{u}^{k+1}\mathrm{d}x\\
&=2\int_\Omega\left(\mu\left(\left|D\left(u^{k+1}\right)\right|^2\right)D\left(u^{k+1}\right)-\mu\left(\left|D\left(u^k\right)\right|^2\right)D\left(u^k\right)\right):\nabla\bar{u}^{k+1}\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_\Omega\left(\lambda\left(\operatorname{div}u^{k+1}\right)\operatorname{div}u^{k+1}-\lambda\left(\operatorname{div}u^k\right)\operatorname{div}u^k\right)\operatorname{div}\bar{u}^{k+1}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
&\mu\left(\left|D\left(u^{k+1}\right)\right|^2\right)D\left(u^{k+1}\right)-\mu\left(\left|D\left(u^k\right)\right|^2\right)D\left(u^k\right)\\
&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\mu\left(\left|sD\left(u^{k+1}\right)+(1-s)D\left(u^k\right)\right|^2\right)\left(sD\left(u^{k+1}\right)+(1-s)D\left(u^k\right)\right)\right)\mathrm{d}s\\
&=\int_0^1\left(\mu\left(\left|sD\left(u^{k+1}\right)+(1-s)D\left(u^k\right)\right|^2\right)\left(D\left(u^{k+1}\right)-D\left(u^k\right)\right)\right.\\
&\quad+2\mu'\left(\left|sD\left(u^{k+1}\right)+(1-s)D\left(u^k\right)\right|^2\right)\left(\left(sD\left(u^{k+1}\right)+(1-s)D\left(u^k\right)\right):\left(D\left(u^{k+1}\right)-D\left(u^k\right)\right)\right)\\
&\quad\left.\cdot\left(sD\left(u^{k+1}\right)+(1-s)D\left(u^k\right)\right)\right)\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

从而当 $\mu'(\cdot)\geq 0$ 时有

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega\left(2\mu\left(\left|D\left(u^{k+1}\right)\right|^2\right)D\left(u^{k+1}\right)-2\mu\left(\left|D\left(u^k\right)\right|^2\right)D\left(u^k\right)\right):\nabla\bar{u}^{k+1}\mathrm{d}x\\
&\geq\int_\Omega\int_0^1 2\mu\left(\left|sD\left(u^{k+1}\right)+(1-s)D\left(u^k\right)\right|^2\right)\left|D\left(\bar{u}^{k+1}\right)\right|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}x\\
&\geq 2\varepsilon_\mu\int_\Omega\left|D\left(\bar{u}^{k+1}\right)\right|^2\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

当 $\mu'(\cdot)<0$ 时有

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega\left(2\mu\left(\left|D\left(u^{k+1}\right)\right|^2\right)D\left(u^{k+1}\right)-2\mu\left(\left|D\left(u^k\right)\right|^2\right)D\left(u^k\right)\right):\nabla\bar{u}^{k+1}\mathrm{d}x\\
&\geq\int_\Omega\int_0^1\left(2\mu\left(\left|sD\left(u^{k+1}\right)+(1-s)D\left(u^k\right)\right|^2\right)\right.\\
&\quad\left.+2\left|sD\left(u^{k+1}\right)+(1-s)D\left(u^k\right)\right|^2\mu'\left(\left|sD\left(u^{k+1}\right)+(1-s)D\left(u^k\right)\right|^2\right)\right)\left|D\left(\bar{u}^{k+1}\right)\right|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}x,\\
&\geq 2\varepsilon_\mu\int_\Omega\left|D\left(\bar{u}^{k+1}\right)\right|^2\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

类似地，由于

$$
\begin{aligned}
&\lambda\left(\operatorname{div}u^{k+1}\right)\operatorname{div}u^{k+1}-\lambda\left(\operatorname{div}u^{k}\right)\operatorname{div}u^{k}\\
&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\lambda\left(s\operatorname{div}u^{k+1}+(1-s)\operatorname{div}u^{k}\right)\left(s\operatorname{div}u^{k+1}+(1-s)\operatorname{div}u^{k}\right)\right)\mathrm{d}s\\
&=\int_0^1\Big[\lambda\left(s\operatorname{div}u^{k+1}+(1-s)\operatorname{div}u^{k}\right)\left(\operatorname{div}u^{k+1}-\operatorname{div}u^{k}\right)n\\
&\quad+\lambda'\left(s\operatorname{div}u^{k+1}+(1-s)\operatorname{div}u^{k}\right)\left(\operatorname{div}u^{k+1}-\operatorname{div}u^{k}\right)\left(s\operatorname{div}u^{k+1}+(1-s)\operatorname{div}u^{k}\right)\Big]\mathrm{d}s\\
&=\int_0^1\Big[\lambda\left(s\operatorname{div}u^{k+1}+(1-s)\operatorname{div}u^{k}\right)+\left(s\operatorname{div}u^{k+1}+(1-s)\operatorname{div}u^{k}\right)\lambda'\left(s\operatorname{div}u^{k+1}+(1-s)\operatorname{div}u^{k}\right)\Big]\\
&\quad\cdot\left(\operatorname{div}u^{k+1}-\operatorname{div}u^{k}\right)\mathrm{d}s\\
&\geq\varepsilon_\lambda\int_\Omega\left|\operatorname{div}\bar{u}^{k+1}\right|^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

将上述代入(34)可知对第三项有

$$
-\int_\Omega\left(\operatorname{div}\mathbf{S}\left(u^{k+1}\right)-\operatorname{div}\mathbf{S}\left(u^{k}\right)\right)\cdot\bar{u}^{k+1}\mathrm{d}x\geq\varepsilon_\mu\int_\Omega\left|\nabla\bar{u}^{k+1}\right|^2\mathrm{d}x+\left(\varepsilon_\mu+\varepsilon_\lambda\right)\int_\Omega\left|\operatorname{div}\bar{u}^{k+1}\right|^2\mathrm{d}x.
$$

对(33)右边第一项

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega\nabla\left(\pi^{k+1}-\pi^{k}\right)\cdot\bar{u}^{k+1}\mathrm{d}x&=\int_\Omega\left(\pi^{k+1}-\pi^{k}\right)\cdot\operatorname{div}\bar{u}^{k+1}\mathrm{d}x\\
&=\int_\Omega a\cdot\gamma\cdot\left[\rho^{k}+\theta\left(\rho^{k+1}-\rho^{k}\right)\right]^{\gamma-1}\cdot\left(\rho^{k+1}-\rho^{k}\right)\operatorname{div}\bar{u}^{k+1}\mathrm{d}x\\
&\leq C\left(\left\|\rho^{k}\right\|_\infty+\left\|\rho^{k+1}\right\|_\infty+\left\|\rho^{k}\right\|_\infty\right)\cdot\left\|\bar{\rho}^{k+1}\right\|_2\cdot\left\|\nabla\bar{u}^{k+1}\right\|_2\\
&\leq C_\varepsilon\left\|\bar{\rho}^{k+1}\right\|_2^2+\varepsilon\left\|\nabla\bar{u}^{k+1}\right\|_2^2.
\end{aligned}
$$

对(33)右边第二项

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega\bar{\rho}^{k+1}\left(-u_t^{k}-u^{k-1}\cdot\nabla u^{k}\right)\cdot\bar{u}^{k+1}\mathrm{d}x&\leq\left\|\bar{\rho}^{k+1}\right\|_2\cdot\left(\left\|u_t^{k}\right\|_3+\left\|u^{k-1}\right\|_\infty\left\|\nabla u^{k}\right\|_3\right)\cdot\left\|\bar{u}^{k+1}\right\|_6\\
&\leq C\left(\left\|u_t^{k}\right\|_3+1\right)\left\|\bar{\rho}^{k+1}\right\|_2\left\|\nabla\bar{u}^{k+1}\right\|_2\\
&\leq C_\varepsilon\left(1+\left\|\nabla u_t^{k}\right\|_3\right)^2\left\|\bar{\rho}^{k+1}\right\|_2^2+\varepsilon\left\|\nabla\bar{u}^{k+1}\right\|_2^2.
\end{aligned}
$$

对(33)右边第三项

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega\rho^{k+1}\bar{u}^{k}\cdot\nabla u^{k}\cdot\bar{u}^{k+1}\mathrm{d}x&\leq\left\|\rho^{k+1}\right\|_\infty^{\frac{1}{2}}\cdot\left\|\bar{u}^{k}\right\|_6\cdot\left\|\nabla u^{k}\right\|_3\cdot\left\|\sqrt{\rho^{k+1}}\bar{u}^{k+1}\right\|_2\\
&\leq\tilde{C}\left\|\nabla\bar{u}^{k}\right\|_2\cdot\left\|\sqrt{\rho^{k+1}}\bar{u}^{k+1}\right\|_2\\
&\leq\tilde{C}\cdot\frac{1}{\eta}\left\|\sqrt{\rho^{k+1}}\bar{u}^{k+1}\right\|_2^2+\eta\left\|\nabla\bar{u}^{k}\right\|_2^2.
\end{aligned}
$$

对(33)右边第四项

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega\operatorname{div}\left[b^{k+1}\otimes b^{k+1}-b^{k}\otimes b^{k}-\frac{1}{2}\bar{b}^{k+1}\cdot\left(b^{k}+b^{k+1}\right)I\right]\cdot\bar{u}^{k+1}\mathrm{d}x\\
&=-\int_\Omega\left[b^{k+1}\otimes b^{k+1}-b^{k}\otimes b^{k}-\frac{1}{2}\bar{b}^{k+1}\cdot\left(b^{k}+b^{k+1}\right)I\right]:\nabla\bar{u}^{k+1}\mathrm{d}x\\
&=-\frac{1}{2}\int_\Omega\left[\bar{b}^{k+1}\otimes b^{k+1}+b^{k}\otimes\bar{b}^{k+1}-\bar{b}^{k+1}\cdot\left(b^{k}+b^{k+1}\right)I\right]:\nabla\bar{u}^{k+1}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le C\Big[\|b^{k+1}\|_\infty\cdot\|\bar{b}^{k+1}\|_2\cdot\|\nabla\bar{u}^{k+1}\|_2+\|b^{k}\|_\infty\cdot\|\bar{b}^{k+1}\|_2\cdot\|\nabla\bar{u}^{k+1}\|_2\\
&\quad+\|b^{k}\|_\infty\cdot\|\bar{b}^{k+1}\|_2\cdot\|\nabla\bar{u}^{k+1}\|_2+\|b^{k+1}\|_\infty\cdot\|\bar{b}^{k+1}\|_2\cdot\|\nabla\bar{u}^{k+1}\|_2\Big]\\
&\le\tilde{C}\|\bar{b}^{k+1}\|_2\cdot\|\nabla\bar{u}^{k+1}\|_2\le C_\varepsilon\|\bar{b}^{k+1}\|_2^2+\varepsilon\|\nabla\bar{u}^{k+1}\|_2^2.
\end{aligned}
$$

综合上述并取ε适当小，最终由(33)可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\sqrt{\rho^{k+1}}\bar{u}^{k+1}\right\|_2^2+\varepsilon_\mu\|\nabla\bar{u}^{k+1}\|_2^2+(\varepsilon_\mu+\varepsilon_\lambda)\|\mathrm{div}\,\bar{u}^{k+1}\|_2^2\\
&\le E_\eta^k(t)\left(\|\bar{\rho}^{k+1}\|_2^2+\left\|\sqrt{\rho^{k+1}}\bar{u}^{k+1}\right\|_2^2\right)+\tilde{C}\|\bar{b}^{k+1}\|_2^2+\eta\|\nabla\bar{u}^{k}\|_2^2,
\end{aligned}
\tag{35}
$$

其中 $E_\eta^k(t)=\tilde{C}\left(1+\|\nabla u_t^k\|_3^2+\dfrac{1}{\eta}\right)$。

记

$$
\psi^{k+1}(t)=\|\bar{\rho}^{k+1}\|_2^2+\|\bar{b}^{k+1}\|_2^2+\left\|\sqrt{\rho^{k+1}}\bar{u}^{k+1}\right\|_2^2,
$$

$$
G^{k+1}(t)=\|\mathrm{curl}\,\bar{b}^{k+1}\|_2^2+\varepsilon_\mu\|\nabla\bar{u}^{k+1}\|_2^2+(\varepsilon_\mu+\varepsilon_\lambda)\|\mathrm{div}\,\bar{u}^{k+1}\|_2^2,
$$

$$
F_\eta^k(t)=\tilde{C}+A_\eta^k(t)+B_\eta^k(t)+E_\eta^k(t),
$$

综合(30) (32) (35)可得

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi^{k+1}(t)+G^{k+1}(t)\le F_\eta^k(t)\cdot\psi^{k+1}(t)+3\eta\|\nabla\bar{u}^{k}\|_{L^2}^2. \tag{36}
$$

对(36)在$[0,t]$上积分，并注意到$\psi^{k+1}(0)=0$，得

$$
\psi^{k+1}(t)+\int_0^t G^{k+1}(s)\mathrm{d}s\le\int_0^t F_\eta^k(s)\cdot\psi^{k+1}(s)\mathrm{d}s+3\eta\int_0^t\|\nabla\bar{u}^{k}(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s, \tag{37}
$$

利用 Gronwall 不等式得

$$
\psi^{k+1}(t)\le 3\eta\int_0^t\|\nabla\bar{u}^{k}(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\cdot\exp\left(\int_0^t F_\eta^k(s)\mathrm{d}s\right)
$$

代回式(37)，并注意到$\int_0^t\|\nabla\bar{u}^{k}(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s$关于$t$为非减函数，可得

$$
\psi^{k+1}(t)+\int_0^t\left(\|\mathrm{curl}\,\bar{b}^{k+1}\|_2^2+\varepsilon_\mu\|\nabla\bar{u}^{k+1}\|_2^2\right)\mathrm{d}s\le 3\eta\left[1+\int_0^t F_\eta^k(s)\mathrm{d}s\cdot\exp\left(\int_0^t F_\eta^k(s)\mathrm{d}s\right)\right]\int_0^t\|\nabla\bar{u}^{k}\|_{L^2}^2\mathrm{d}s. \tag{38}
$$

由$F_\eta^k(t)$的定义以及先验估计(25)，取$0<t\le T_{**}\le\eta<1$，得到

$$
\int_0^t F_k^k(s)\mathrm{d}s\le\tilde{C}t+\tilde{C}\sqrt{t}+\tilde{C}\cdot\frac{1}{\eta}\cdot t+\tilde{C}\le\tilde{C}.
$$

将其代回(38)得

$$
\psi^{k+1}(t)+\int_0^t\left[\|\mathrm{curl}\bar{u}^{k+1}\|_{L^2}^2+\varepsilon_\mu\|\nabla\bar{u}^{k+1}\|_{L^2}^2\right]\mathrm{d}s\le\eta\cdot\left[1+\tilde{C}\cdot\mathrm{e}^{\tilde{C}}\right]\cdot\int_0^t\|\nabla\bar{u}^{k}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s\le\eta\cdot\mathrm{e}^{\tilde{C}}\cdot\int_0^t\|\nabla\bar{u}^{k}\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}s, \tag{39}
$$

其中$0\le t\le\tilde{T}:=T_*\wedge T_{**}$。

记$E_{k+1}(t)=\psi^{k+1}(t)+\int_0^t\left[\|\mathrm{curl}\bar{u}^{k+1}\|_{L^2}^2+\varepsilon_\mu\|\nabla\bar{u}^{k+1}\|_{L^2}^2\right]\mathrm{d}s$，取$\eta$足够小，使得$\eta\cdot\dfrac{1}{\varepsilon_\mu}\cdot\mathrm{e}^{\tilde{C}}\le\dfrac{1}{2}$，则由(39)可得

如下递推关系

$$E_{k+1}(t) \le E_k(t) \le \cdots \le \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot E_1(t).$$

由于 $E_1(t)$ 有界，最终可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{0\le t\le \tilde{T}} \psi^{k+1}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \left(\left\| \mathrm{curl}\bar{b}^{k+1} \right\|_{L^2}^2 + \varepsilon_\mu \left\| \nabla \bar{u}^{k+1} \right\|_{L^2}^2 \right) \mathrm{d}s \le \tilde{C} < +\infty. \tag{40}$$

有了一致估计(40)可以得到如下收敛性

$$\begin{aligned} &\rho^k \to \rho \quad \text{强收敛于} \quad L^\infty\left(0,T;L^1(\Omega)\right); \\ &b^k \to b \quad \text{强收敛于} \quad L^2\left(0,T;W^{1,2}(\Omega)\right); \\ &u^k \to u \quad \text{强收敛于} \quad L^2\left(0,T;W^{1,2}(\Omega)\right). \end{aligned}$$

利用上述收敛性，容易证明 (ρ,b,u) 为原问题(3) (4)的弱解，且由弱下半连续性结果知 (ρ,b,u) 满足估计式

$$\begin{aligned} &\sup_{0\le t\le \tilde{T}} \left(\|\rho(t)\|_{1,q} + \|\rho_t(t)\|_q \right) + \sup_{0\le t\le \tilde{T}} \left(\|b(t)\|_{2,2} + \|u(t)\|_{2,2} \right) + \sup_{0\le t\le \tilde{T}} \left(\|b_t(t)\|_2 + \left\|\sqrt{\rho} u_t(t)\right\|_2 \right) \\ &+ \int_0^{\tilde{T}} \left(\|b_t(t)\|_2^2 + \|u_t(t)\|_2^2 + \|b(t)\|_{2,q}^2 + \|u(t)\|_{2,q}^2 \right) \mathrm{d}t \le \tilde{C}. \end{aligned} \tag{41}$$

这说明 (ρ,b,u) 为原问题的强解。完全类似于文献[18] [21]的讨论过程，可以证明 (ρ,b,u) 关于时间的连续性质。至此，定理 1.1 的存在性部分证毕。

唯一性的证明。

设 $(\rho_1,b_1,u_1),(\rho_2,b_2,u_2)$ 为问题(3)(4)的两强解，记

$$\bar{\rho} = \rho_1 - \rho_2, \quad \bar{u} = u_1 - u_2, \quad \bar{b} = b_1 - b_2.$$

类似于(30) (32) (35)的推导，并利用先验估计(41)，最终可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\bar{\rho}\|_{L^2}^2 + \|\bar{b}\|_{L^2}^2 + \left\|\sqrt{\rho_1}\bar{u}\right\|_{L^2}^2 \right) + \left\|\mathrm{curl}\bar{b}\right\|_{L^2}^2 + \varepsilon_\mu \|\nabla \bar{u}\|_{L^2}^2 \le G(t)\left(\|\bar{\rho}\|_{L^2}^2 + \|\bar{b}\|_{L^2}^2 + \left\|\sqrt{\rho_1}\bar{u}\right\|_{L^2}^2 \right),$$

其中 $G(t) \in L^1(0,\tilde{T})$。利用 Gronwall 不等式，可得 $\bar{\rho} = \bar{b} = \bar{u} = 0$。唯一性得证。

定理 1.1 得证。

4. 总结

本文在三维区域 Ω 中研究了具有初始真空状态的可压缩非牛顿 MHD 系统局部强解的适定性。研究表明，在满足特定的相容性条件以及非线性椭圆系统的 $W^{2,p}$ 正则性假设下，该系统在局部时间内存在唯一的强解。本文的核心贡献在于成功将处理牛顿流体真空问题的分析框架迁移至非牛顿流体领域，通过构造近似解序列并建立一致的高阶先验估计，克服了动量方程在真空区域的退化难题。此外，本研究可从以下两个方向进行进一步拓展：一是深化对非线性椭圆系统正则性的理论研究，尝试在不依赖 $W^{2,p}$ 假设的前提下证明该类系统的适定性，以增强结论的普遍性；二是探讨在大初始数据条件下整体强解的存在性。

基金项目

吉林省科技发展计划项目(吉林省自然科学基金：No. 20240101289JC)。

参考文献

[1] Cabannes, H. (1970) Theoretical Magnetofluiddynamics. Academic Press.

[2] 李大潜, 秦铁虎. 物理学与偏微分方程[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2005.

[3] Hu, X. and Wang, D. (2010) Global Existence and Large-Time Behavior of Solutions to the Three-Dimensional Equations of Compressible Magnetohydrodynamic Flows. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **197**, 203-238. https://doi.org/10.1007/s00205-010-0295-9

[4] Liu, S., Yu, H. and Zhang, J. (2013) Global Weak Solutions of 3D Compressible MHD with Discontinuous Initial Data and Vacuum. *Journal of Differential Equations*, **254**, 229-255. https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.08.006

[5] Zhu, S. (2015) On Classical Solutions of the Compressible Magnetohydrodynamic Equations with Vacuum. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **47**, 2722-2753. https://doi.org/10.1137/14095265x

[6] Xu, Q. and Zhong, X. (2021) Local Well-Posedness to the Three-Dimensional Barotropic Compressible Magnetohydrodynamic Equations with Vacuum. *Journal of Mathematical Physics*, **62**, Article ID: 031501. https://doi.org/10.1063/5.0039481

[7] Li, H., Xu, X. and Zhang, J. (2013) Global Classical Solutions to 3D Compressible Magnetohydrodynamic Equations with Large Oscillations and Vacuum. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **45**, 1356-1387. https://doi.org/10.1137/120893355

[8] Lv, B., Shi, X. and Xu, X. (2016) Global Existence and Large Time Asymptotic Behavior of Strong Solutions to the 2-D Compressible Magnetohydrodynamic Equations with Vacuum. *Indiana University Mathematics Journal*, **65**, 925-975. https://doi.org/10.1512/iumj.2016.65.5813

[9] Hong, G., Hou, X., Peng, H. and Zhu, C. (2017) Global Existence for a Class of Large Solutions to Three-Dimensional Compressible Magnetohydrodynamic Equations with Vacuum. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **49**, 2409-2441. https://doi.org/10.1137/16m1100447

[10] Chen, Y., Huang, B., Peng, Y. and Shi, X. (2023) Global Strong Solutions to the Compressible Magnetohydrodynamic Equations with Slip Boundary Conditions in 3D Bounded Domains. *Journal of Differential Equations*, **365**, 274-325. https://doi.org/10.1016/j.jde.2023.04.031

[11] Chen, Y., Huang, B. and Shi, X. (2022) Global Strong and Weak Solutions to the Initial-Boundary-Value Problem of Two-Dimensional Compressible MHD System with Large Initial Data and Vacuum. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **54**, 3817-3847. https://doi.org/10.1137/21m1453438

[12] Feireisl, E. and Li, Y. (2020) On Global-in-Time Weak Solutions to the Magnetohydrodynamic System of Compressible Inviscid Fluids. *Nonlinearity*, **33**, 139-155. https://doi.org/10.1088/1361-6544/ab4c8e

[13] Samokhin, V. A. (1991) On a System of Equations in the Magnetohydrodynamics of Nonlinearly Viscous Media. *Differentsial'nye Uravneniya*, **27**, 886-896.

[14] Gunzburger, M.D., Ladyzhenskaya, O.A. and Peterson, J.S. (2004) On the Global Unique Solvability of Initial-Boundary Value Problems for the Coupled Modified Navier? Stokes and Maxwell Equations. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, **6**, 462-482. https://doi.org/10.1007/s00021-004-0107-9

[15] Kang, K. and Kim, J. (2019) Existence of Solutions for the Magnetohydrodynamics with Power-Law Type Nonlinear Viscous Fluid. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, **26**, Article No. 11. https://doi.org/10.1007/s00030-019-0557-7

[16] Kim, J. (2023) Local Existence of Solutions to the Non-Resistive 3D MHD Equations with Power-Law Type. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, **25**, Article No. 31. https://doi.org/10.1007/s00021-023-00772-0

[17] Kim, J. M. (2024) Existence, Uniqueness and Decay Rates of a Certain Type of 3D Hall-MHD Equations with Power-Law Type. *Analysis and Mathematical Physics*, **14**, Article No. 22. https://doi.org/10.1007/s13324-024-00882-6

[18] Cho, Y., Choe, H.J. and Kim, H. (2004) Unique Solvability of the Initial Boundary Value Problems for Compressible Viscous Fluids. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **83**, 243-275. https://doi.org/10.1016/j.matpur.2003.11.004

[19] Agmon, S., Douglis, A. and Nirenberg, L. (1959) Estimates near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions. I. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **12**, 623-727. https://doi.org/10.1002/cpa.3160120405

[20] Agmon, S., Douglis, A. and Nirenberg, L. (1964) Estimates near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions II. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **17**, 35-92. https://doi.org/10.1002/cpa.3160170104

[21] Al Baba, H., Al Taki, B. and Hussein, A. (2024) Remark on the Local Well-Posedness of Compressible Non-Newtonian Fluids with Initial Vacuum. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, **26**, Article No. 68.

https://doi.org/10.1007/s00021-024-00901-3

[22] Cho, Y. and Kim, H. (2006) Existence Results for Viscous Polytropic Fluids with Vacuum. *Journal of Differential Equations*, **228**, 377-411. https://doi.org/10.1016/j.jde.2006.05.001

[23] Fan, J. and Yu, W. (2009) Strong Solution to the Compressible Magnetohydrodynamic Equations with Vacuum. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **10**, 392-409. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2007.10.001