

基于卡尔曼滤波法的飞行器空间坐标修正分析

吴建平^{1*}, 肖子佩¹, 齐成媚^{2#}

¹湖南科技学院理学院, 湖南 永州

²湖南科技学院教务处, 湖南 永州

收稿日期: 2026年4月15日; 录用日期: 2026年5月8日; 发布日期: 2026年5月19日

摘要

本文针对飞行器空间坐标修正问题, 利用拟合、迭代模型等方法, 对已知飞行器数据进行预处理。在这个基础上运用了卡尔曼滤波法、累计误差修正模型, 结合Matlab R2018a软件求解, 对飞行器的空间坐标误差进行了修正。

关键词

卡尔曼滤波, 迭代模型, Matlab R2018a软件

Analysis of Space Coordinate Correction for Aircraft Based on Kalman Filter Method

Jianping Wu^{1*}, Zipei Xiao¹, Chengmei Qi^{2#}

¹College of Science, Hunan University of Science and Engineering, Yongzhou Hunan

²Academic Affairs Office, Hunan University of Science and Engineering, Yongzhou Hunan

Received: April 15, 2026; accepted: May 8, 2026; published: May 19, 2026

Abstract

This paper addresses the problem of spatial coordinate correction for aircraft. By using fitting and iterative models, the known aircraft data is preprocessed. On this basis, the Kalman filtering method and cumulative error correction model are employed, combined with the Matlab R2018a software

*第一作者。

#通讯作者。

for solution, to correct the spatial coordinate errors of the aircraft.

Keywords

Kalman Filtering, Iterative Model, Matlab R2018a Software

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 需要解决的问题

本文研究的问题来源于 2013 年第六届华中地区大学生数学建模邀请赛 A 题:

飞机导航精度是航空航天领域的一个重要问题。惯性导航系统这种不依赖于任何外部信息的自主导航系统,在航空航天领域发挥着越来越重要的作用。由于系统结构误差、惯性测量元件误差、尺度系数误差等因素的影响,惯性导航系统的累积误差随着时间的推移逐渐增大,严重影响航天技术的发展。目前对定位精度的研究成果主要是通过红外测距等物理技术来提高定位精度。近年来,关于定位坐标精度的研究正在推广,因此,进一步研究飞机空间坐标校正方法具有重要的理论意义和应用价值。

一个观测站测量飞机空间位置(假设观测站是坐标原点) $X(x, y, z)$ 、飞机飞行速度 $V(x$ 轴, y 轴, z 轴)、飞机与观测站之间的偏转角度、俯仰角度和观测数据的时间间隔 t 。给定的每个数据都包含一定的误差。其中观测站的坐标 $(0, 0, 0)$ 没有误差,飞机的坐标(观测)可能会有很大的误差。

需要解决的问题是:飞行器坐标的数据为观测值,由于电子仪器的精度和噪声干扰等,含有一定的误差波动,建立数学模型对飞行器坐标观测值的随机波动误差进行修正。部分重要参考数据如表 1:(完整数据见:第六届华中地区大学生数学建模邀请赛 A 题附件 data.xls)

Table 1. Partial data of aircraft coordinates

表 1. 飞行器坐标的部分数据

序号	t (s)	x (m)	y (m)	h (m)	alpha	theta	v_x (m/s)	v_y (m/s)	v_z (m/s)
	时间	x 方向 坐标	y 方向 坐标	高度	偏向角	俯仰角	x 方向 速度	y 方向 速度	垂直方向 (高度)速度
1	0	1360.25	1309.5	510.3520237	0.794394618	-0.249091156	65.71203004	70.73956777	-0.812188133
2	0.15	1350.5	1299	510.2121547	0.794668386	-0.250845738	65.58371832	70.893991	-0.692034667
3	0.3	1340.75	1288.5	510.2149607	0.794946202	-0.252613903	65.842584	70.85664341	-0.80888028
4	0.45	1331	1278	510.1983958	0.795228156	-0.254424141	65.44935614	70.53093559	-0.61262966
5	0.6	1321.25	1267.5	510.1080095	0.795514341	-0.256252	65.73986398	70.46827657	-0.611442845
6	0.75	1311.5	1257	510.3356322	0.795804853	-0.258103207	65.45338093	70.72687867	-0.747974657

2. 修正飞行器空间坐标的方法

由于电子设备的精度存在误差与噪声干扰等问题,所以飞行器空间坐标数据含有一定的误差波动。本文在解决问题时,首先,通过 Matlab R2018a 软件已知数据进行线性拟合,其次,对各个方向的位置坐标、速度坐标和偏转角度、俯仰角度坐标进行线性分析,然后对存在波动的数据进行迭代处理,消除影

响较大的其他因素的原因,减少除了电子设备的精度存在误差与噪声干扰之外的影响,找到合适的值,作为卡尔曼滤波器的起始值,对建立卡尔曼滤波器处理的数据进一步修正电子设备精度和噪声干扰引起的随机波动误差,并利用 Matlab R2018a 软件求解出修正后的飞行轨迹,验证误差模型的准确性。

卡尔曼滤波

卡尔曼滤波法是卡尔曼等人提出了一种基于维纳滤波的迭代滤波方法[1],是利用目标的动态信息去消除噪声所造成的影响,来得到一个良好的目标位置估计。卡尔曼滤波技术早期在惯性导航中奠定了理论基石,提出了开环补偿、闭环反馈及创新的“混合式”结构,实现了从理论到工程的关键跨越。随后,技术与多源信息融合结合,通过“卡尔曼滤波 + 数据融合”框架(如融合 GPS 数据)显著提升了系统精度与鲁棒性[2]。近年来,卡尔曼滤波进一步与现代控制策略深度协同,例如在“KF-ADRC”架构中同时作为高精度观测器和状态滤波器,以应对高性能伺服驱动中的非线性与强扰动挑战。当前,该技术已成为支撑高精度、长航时自主导航系统的核心[3],广泛应用于系统级误差标定、高精度初始对准及高可靠性容错设计中。其发展轨迹清晰显示,卡尔曼滤波已从经典的独立估计算法,演变为一个开放、模块化的核心信息处理引擎,持续与数据融合、先进控制等系统级技术耦合,未来将继续深化非线性估计能力,并与人工智能等多学科交叉融合,开拓更广阔的应用疆域。

卡尔曼滤波法是一种基于软件的滤波方法,它的基本思想是:以最小二乘误差为最佳估计准则,使用信号和噪声状态的空间模型,通过上一次时间的估计值和当前时间的观测值去更新状态变量的估计值,计算当前时间的估计值,并且建立算法。

卡尔曼滤波算法的原理基于贝叶斯推断和最优估计的理论,其核心思想是在测量数据和系统模型之间建立一个最优估计,通过不断迭代和更新状态来逼近真实的系统状态。该算法包含以下几个关键概念:

1. 系统状态:描述系统当前的状态,通常用状态向量表示。状态向量可以包括位置、速度、加速度等状态变量。
2. 观测模型:将系统的状态映射到观测空间,描述观测数据与系统状态之间的关系。观测模型通常用线性函数表示。
3. 动力学模型:描述系统状态的演化规律,通常用线性状态转移方程表示。
4. 误差模型:描述系统的噪声特性,包括过程噪声和观测噪声。通常假设为零均值的高斯噪声。
5. 卡尔曼增益:用于根据观测数据对状态进行修正的权重。

其包含的两个主要步骤:预测步骤和更新步骤。在预测步骤中,利用动力学模型进行状态预测,通过状态转移方程和控制输入来估计下一个时刻的状态。在更新步骤中,利用观测数据对预测状态进行修正,得到更准确的状态估计。这两个步骤循环迭代,随着时间的推移,卡尔曼滤波算法能够逐步逼近真实的系统状态,并提供准确的状态估计。

因为卡尔曼滤波易于计算机编程,能够实时更新和处理采集到的数据[4]。所以它作为一种最优状态的估计方法被广泛的使用在通信、导航、制导和控制等诸多领域。

卡尔曼滤波流程图如图 1:

其中, \hat{X}_{k-1} 为 $k-1$ 时刻状态估计值, P_{k-1} 为 $k-1$ 时刻时间更新过程的估计协方差矩阵, A 表示 $n \times n$ 阶的状态转移系数矩阵, B 表示可选的控制输入的 $n \times n$ 阶增益矩阵, U_{k-1} 为 $k-1$ 时刻的系统输入, H 是状态向量到测量向量的转换矩阵, Z_k 为 k 时刻的测量值, K_k 为 k 时刻的卡尔曼增益矩阵, R 为测量更新过程的协方差矩阵, I 为单位矩阵。

根据图 1,卡尔曼滤波算法由时间更新和测量更新两步组成。时间更新过程是根据上一时刻($k-1$ 时刻)的后验估计,估计当前时刻(k 时刻)的状态,得到 k 时刻的先验估计;状态更新过程是通过当前时间的

测量值对预测阶段的估计值进行修正，得到当前时间的后验估计值。导入原题给出的附件 data.xls 中的数据，通过卡尔曼滤波算法对飞行器空间坐标数据进行修正。

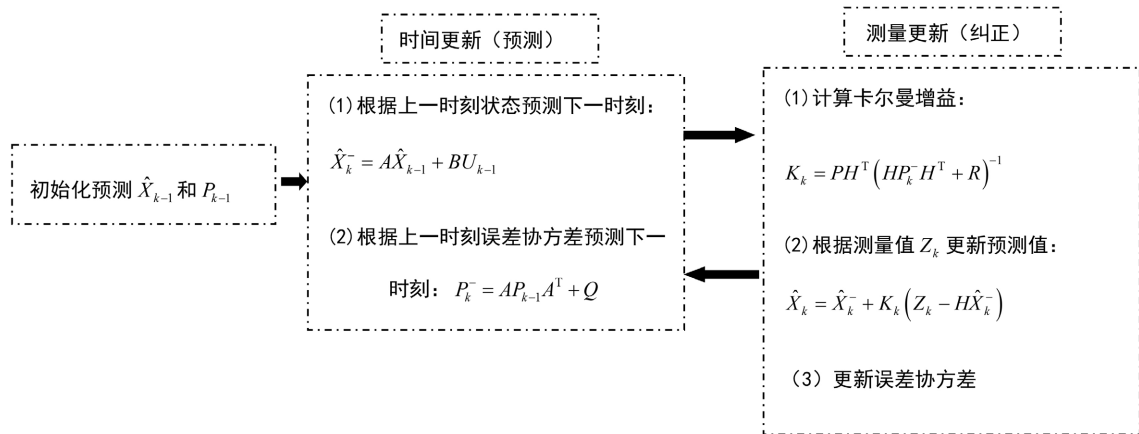


Figure 1. Flowchart of Kalman filtering
图 1. 卡尔曼滤波流程图

3. 卡尔曼滤波模型

3.1. 具体操作步骤

将其算法引用到在本题数据中，具体操作步骤如下：

- ① 使用迭代模型对原始飞行器空间坐标数据进行三次迭代，作为卡尔曼滤波模型的输入值；
- ② 通过卡尔曼滤波器的时间更新模型和状态更新模型对飞行器随机波动误差进行修正；
- ③ 将原始的飞行器空间坐标数据与修正后的飞行器空间坐标数据进行对比；
- ④ 将修正后的数据进行残差分析。

3.2. 模型建立

通过前期的准备工作，已经通过迭代模型，尽可能地消除了影响较大的其他因素，找出了不符合实际飞机飞行的坐标数据，通过卡尔曼滤波模型，进行进一步的修正飞行器空间坐标。

卡尔曼滤波是一种线性系统状态方程，通过系统输入/输出观测数据来估计系统状态的最佳算法。由于观测数据包含了系统噪声和干扰的影响，因此最佳估计也可以看作是一个滤波过程。

目标函数要求通过系统输入/输出观测数据来估计系统的最佳状态[5]:

$$\begin{cases} x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1} \\ z_k = Hx_k + v_k \end{cases};$$

约束条件：其中 k 取 $1, 2, \dots, 41$ 。

其中符号所表示含义如下：

序号	符号	符号说明
1	x_k	k 时刻的状态向量
2	u_{k-1}	$k-1$ 时刻的输入
3	w_{k-1}	$k-1$ 时刻的归一化过程噪声
4	A	$n \times n$ 阶的状态转移系数矩阵

续表

5	B	$n \times n$ 阶增益矩阵
6	H	单位矩阵
7	v_k	测量噪声
8	z_k	k 时刻的测量值

卡尔曼滤波器时间更新模型如下：

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} \quad (2.1)$$

$$P_k = AP_{k-1}A^T + Q \quad (2.2)$$

上(2.1)式左边 x_k 是在时刻 k 的状态预估计值。 x_{k-1} 表示 $k-1$ 时刻的状态估计值。 u_{k-1} 为 k 时刻的系统输入。 B 是将输入转换为状态的矩阵。(2.2)式左边 P_k 是 k 时刻的预估计误差协方差(度量状态估计值和真实值之间的误差)， P_{k-1} 表示的是 $k-1$ 时刻的估计误差协方差。 w_k 符合均值为零，协方差矩阵为 Q 的多元正态分布。

卡尔曼滤波器状态更新模型如下：

$$K_k = \frac{P_k H^T}{HP_k H^T + R} \quad (2.3)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H\hat{x}_k^-) \quad (2.4)$$

$$P_k = (I - K_k H)P_k^- \quad (2.5)$$

上面三个方程计算的分别是 k 时刻的卡尔曼增益 K_k ， k 时刻的状态估计值 \hat{x}_k ， k 时刻的估计误差协方差 P_k 。 z_k 即 k 时刻的测量值。 H 是状态向量到测量向量的转换矩阵。 v_k 符合均值为零，协方差矩阵为 R 的多元正态分布。 I 为单位矩阵。

3.3. 模型求解结果

经以上卡尔曼滤波器的时间更新模型和状态更新模型，结合表 1 数据，用 Matlab R2018a 软件修正后飞行器坐标部分累积误差修正值如下表，各坐标变化如下：

Table 2. Cumulative error correction values

表 2. 累积误差修正值

序号	t (s)	h (m)	v_x (m/s)	v_y (m/s)	v_z (m/s)
	时间	高度	x 方向速度	y 方向速度	垂直方向(高度)速度
1	0	510.3520237	65.71203004	70.73956777	-0.812188133
2	0.15	510.2121547	65.58371832	70.893991	-0.692034667
3	0.3	510.2149607	65.842584	70.85664341	-0.80888028
4	0.45	510.1983958	65.44935614	70.53093559	-0.61262966
5	0.6	510.1080095	65.73986398	70.46827657	-0.611442845
6	0.75	510.3356322	65.45338093	70.72687867	-0.747974657

通过表 2 数据来看，飞行器高度 h ，在 0 到 6 秒内变化很小，在 2.4 秒，3.6 秒，4.8 秒之间变化都在

0.01 之内。由数据可以直观看出卡尔曼滤波法对飞行器空间坐标的随机波动误差有着一个修正效果。用 Matlab R2018a 画出累积误差修正前后飞行器轨迹如下：

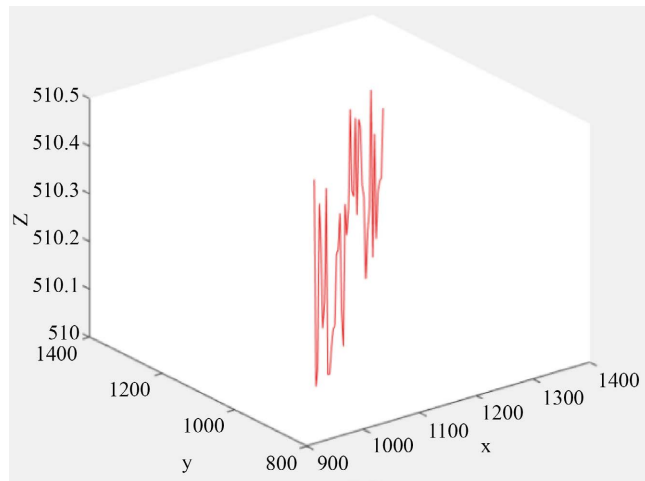


Figure 2. Unadjusted spatial coordinate fitting graph
图 2. 未修正的空间坐标拟合图

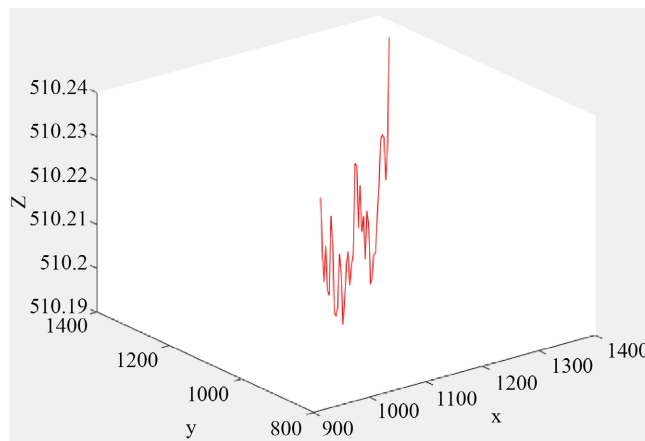


Figure 3. Spatial coordinate fitting graph after Kalman filtering correction
图 3. 卡尔曼滤波修正后的空间坐标拟合图

由图 2 可清楚地看出在飞行器空间坐标未修正时，飞行轨迹是毫无章法的，不符合实际飞行器的飞行轨迹。由图 3 可知道修正后轨迹比较接近实际，较大地消除了电子设备的精度和噪声干扰，但是仍然存在误差，可能是累计误差，所以还需要继续修改。

通过 Matlab R2018a 软件，为进一步验证滤波后轨迹的平滑性与一致性，对滤波后状态序列与原始观测序列进行回归拟合与残差分析[6]得到如下所示：

从图 4 中可以看出，除了少部分的点外，所有的标准化残差都在-1 到 1 之间，所以误差项服从正态分布，并且得到用于检验回归模型的统计量，其中复相关系数 R^2 为 0.8951，统计量 F 为 76.7823，显著性概率 P 为 0.0000，模型误差的方差为 0.3764，因为复相关系数越接近 1，回归方程越显著；统计量 F 对应的显著性概率 P 小于模型误差的方差，回归模型成立，此时所做的检验以及估计和预测成立，说明所建立的卡尔曼滤波模型对飞行器的随机波动误差修正效果很好。该分析主要说明滤波后的轨迹本身具

有高度的平滑性和内在一致性。然而，评估滤波精度的更直接方法是如下所述的新息序列检验。



Figure 4. Residual analysis chart
图 4. 残差分析图

为科学评估卡尔曼滤波器的性能，对滤波过程中的新息序列 $r_k = z_k - H\hat{x}_k$ 进行统计分析。理论上，一个理想且一致的卡尔曼滤波器，其新息序列应为零均值的白噪声序列。根据模型已知附件数据计算得到新息序列的样本均值接近于零，且其归一化自相关函数在非零滞后处迅速落入置信区间内，表明显著性较低。这表明滤波器对观测信息的利用充分，未包含未被模型解释的系统性偏差，验证了所设计滤波器模型参数(Q, R)的合理性和滤波器的一致性。

4. 小结

本文主要的目的是对飞行器的空间坐标进行修正分析，通过题目已给的飞行器的空间坐标数据，对飞行器的空间坐标进行修正。首先对数据进行线性拟合，找到不符合实际飞行器飞行轨迹的数据，然后进行迭代处理，降低其他因素的影响，最后建立卡尔曼滤波模型，对飞行器的随机波动误差进行修正，对由于电子仪器的精度和噪声干扰所造成的误差波动有着很好的修正效果，以及对飞行器惯性导航系统，航空航天中有一定价值的参考意义[7]。

本文利用新息序列的白噪声特性验证了滤波器在实际数据应用中的一致性。若需进行更彻底的定量精度评估，可在后续研究中构建仿真场景：首先设定一个已知的真实飞行轨迹与运动模型，然后叠加符合假设的特定噪声生成仿真观测数据，再应用本文的卡尔曼滤波模型进行估计。最后，通过计算估计轨迹与设定真实轨迹之间的均方根误差(RMSE)，可以客观、定量地衡量滤波器在不同噪声水平下的绝对估计精度。

基金项目

永州市 2022 科技指导性科技计划项目；湖南科技学院科研项目(湘科院校发〔2022〕108 号)；
2023 年度湖南省大学生创新创业训练计划一般项目(湘教发〔2023〕237 号)；
湖南科技学院 2023 年大学生创新创业训练计划项目；

湖南科技学院 2025 年科研创新平台(智能建模与数据科学)。

参考文献

- [1] Matsinos, E. (2016) The Kalman Filter: A Didactical Overview. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1607.05590>
- [2] 朱德明, 张军, 白晨光. 基于卡尔曼滤波器的永磁同步电机自抗扰控制[J]. 驱动与控制, 2022, 50(5): 63-67.
- [3] 李鼎, 于旭东, 等. 长航时激光陀螺惯性导航系统技术发展现状及趋势[J]. 光学学报, 2023, 43(17): 1-15.
- [4] 吴捷, 李树英, 钟汉枢. 卡尔曼滤波器的设计(一)——在惯性导航系统中的应用[J]. 华南工学院学报, 1980(4): 32-39.
- [5] 刘红良. 数学建模与建模算法[M]. 北京: 科学出版社, 2016.
- [6] 胡永红, 史忠科. 小型飞行器定位的数据融合误差修正方法[J]. 西北工业大学学报, 2001, 19(2): 279-283.
- [7] Nair, V.G. (2012) Aircraft Yaw Control System Using LQR and Fuzzy Logic Controller. Institute of Technology.