

基于一类友谊距离指数偏好网络的传播动力学分析

程 钰, 严传魁*

温州大学数理学院, 浙江 温州

收稿日期: 2026年4月15日; 录用日期: 2026年5月8日; 发布日期: 2026年5月19日

摘 要

复杂网络上的传染病传播动力学是揭示病毒扩散规律、制定防控策略的重要理论基础。传统网络模型(如BA模型、经典加权网络模型)多未考虑空间位置与社交亲密度的耦合作用, 或割裂节点度与边权关联, 难以精准复现真实网络拓扑, 无法准确刻画传播行为。为此, 本文提出友谊距离指数(FDI), 量化地理邻近性与社会亲近度对节点连边的共同影响, 构建融合空间约束与社会关联的FDI网络演化模型。基于SIR传播框架, 系统分析该网络的传播动力学行为, 探究关键参数对传播阈值、感染规模的影响, 揭示空间和社会耦合下的传播机制。研究可为真实社交网络中的传染病防控提供理论支撑, 进一步完善复杂网络传播动力学研究体系。

关键词

复杂网络, 鲁棒性, SIR传播模型, 流行病阈值

Transmission Dynamics Analysis Based on a Class of Friendship Distance Index Preference Networks

Yu Cheng, Chuankui Yan*

School of Mathematics and Physics, Wenzhou University, Wenzhou Zhejiang

Received: April 15, 2026; accepted: May 8, 2026; published: May 19, 2026

Abstract

The dynamics of epidemic spreading on complex networks is an important theoretical basis for

*通讯作者。

revealing virus diffusion rules and formulating prevention and control strategies. Traditional network models, such as the BA model and classical weighted network models, mostly ignore the coupling of spatial location and social intimacy. Some even separate the correlation between node degree and edge weight. Thus, they cannot accurately reproduce real network topologies or describe spreading behaviors precisely. To solve this problem, this paper proposes the Friendship Distance Index (FDI). It quantifies the combined impact of geographical proximity and social closeness on node connections. We also construct an FDI network evolution model that integrates spatial constraints and social correlations. Based on the SIR spreading framework, we systematically analyze the spreading dynamics of this network. We explore how key parameters affect the epidemic threshold and infection scale, and reveal the spreading mechanism under the coupling of spatial and social factors. This research can provide theoretical support for epidemic prevention and control in real social networks. It also helps improve the research system of complex network spreading dynamics.

Keywords

Complex Networks, Robustness, SIR Epidemic Model, Epidemic Threshold

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

复杂网络理论为研究各类复杂系统的结构与功能提供了统一的数学建模框架,其核心研究方向之一便是网络上的传染病传播动力学。经典 SIR 等传播模型与网络拓扑的耦合分析,不仅能揭示病毒在真实系统中的扩散规律,更为传染病防控、疫情管控等实际问题[1]提供关键理论支撑,是连接网络结构与系统功能的重要桥梁。

大量真实网络(如社交网络[2]、交通网络[3])普遍呈现无标度特性,其度分布服从幂律形式,存在少量度值极高的枢纽节点,这一拓扑特征对传染病传播产生决定性影响:枢纽节点的存在可使病毒快速扩散,降低传播阈值,同时也为靶向免疫等防控策略提供了理论依据。

为解释无标度特性的涌现机制,Barabási 与 Albert 提出了经典的 BA 模型[4]。该模型采用偏好依附机制,即新增节点倾向于与已有连接更多的节点相连,这一过程会逐步形成枢纽节点并最终呈现无标度结构,通常也被称为“富者愈富”现象。BA 模型能够很好地体现真实网络中节点度的高度差异性,尽管该模型成功刻画了现实网络中广泛存在的度异质性,却难以解释网络高聚类特性的形成机理。作为无标度网络研究的基础模型,BA 网络仅依赖单一的偏好依附规则,既无法解释现实网络高聚类的成因,也未考虑节点空间位置、属性差异、连边强度等现实因素的影响,导致模型结果与真实网络存在明显偏差。例如在社交与通信网络中,个体更倾向于与地理位置邻近或特征相似的对象建立联系;在科研合作与经济网络中,共同属性与交互频次同样对连接模式起到重要作用,而这些因素均未被纳入 BA 模型的框架之中。这一缺陷直接导致基于 BA 网络的传播动力学仿真结果,与真实社交网络中的传染病传播规律存在显著脱节:真实网络中空间邻近性、社交亲密度会直接影响个体间的接触概率,进而改变传播路径与感染规模,而传统模型无法刻画这一关键影响。

现有加权网络模型[5]-[8]虽尝试通过边权描述连接强度,但大多割裂了节点度与边权的内在关联,无法体现真实网络中“边权对应接触频次、影响感染概率”的核心特征,难以精准刻画传染病传播动力学行为。更为关键的是,传统模型均忽视了空间因素与社会因素的耦合作用,而真实传染病传播本质上是

二者共同约束的过程即地理邻近性决定接触机会, 社交亲密度决定感染风险, 这一耦合机制的缺失导致传统模型的传播仿真与实际疫情数据存在明显偏差。

针对上述不足, 本文提出友谊距离指数(Friendship Distance Index, FDI), 量化地理邻近性与社会亲近度对连边形成的共同影响, 构建融合空间约束与社会关联的 FDI 网络演化模型。该模型可更精准复现真实网络的拓扑特征, 为传播动力学研究提供更贴合现实的理论基础。在此基础上, 本文以 SIR 传染病模型为框架, 系统分析 FDI 网络上的传播动力学行为, 探究网络参数与传播参数对传播阈值、感染规模的影响规律, 揭示空间-社会耦合作用下的传播机制, 为真实社交网络中的传染病防控提供理论支撑与实践指导, 进一步完善复杂网络传播动力学研究。

2. 友谊距离指数偏好模型

2.1. 友谊距离指数的定义

现实场景中的复杂网络大多具有显著的空间属性, 节点间连边的形成并非仅依赖节点度等拓扑结构特征, 还会受到节点空间位置与地理相似性的共同制约。为更精准地刻画空间约束条件下的网络连接机制, 本节提出友谊距离指数(FDI), 该指标可同时反映节点的局部连接质量与全局拓扑定位, 进而更全面地衡量节点的综合重要性。节点 i 的友谊距离指数定义为

$$\eta_i = \frac{(f_i)^\beta}{(d_{iv})^\alpha} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{k_i} k_j\right)^\beta}{(d_{iv})^\alpha} \quad (1)$$

其中, $f_i = \sum_{j=1}^{k_i} k_j$ 表示节点 i 的邻里中心性指数, 即节点 i 的所有邻居度数之和。该指标是度中心性在邻域层面的延伸, 基于局部中心性思想, 通过邻居节点的整体连接强度衡量节点的局部影响力与 Granovetter 关系强度理论[9]中“个体影响力不仅取决于自身连接数, 更取决于邻居整体连接水平”的观点一致。具体而言, 为节点 i 的第 j 个最近邻的度数, k_i 则是节点 i 的邻居数目即其自身的度数。此外, d_{iv} 用于表示节点 i 和节点 v 某种属性的距离, 比如地理位置的空间距离、亲密关系距离和网络结构层面的特征距离等。在本文中对于友谊距离指数中的距离采用两点的欧氏空间距离的平方, 即节点 i 和节点 v 之间的距离 $d_{iv} = (x_i - x_v)^2 + (y_i - y_v)^2$, x_i 和 y_i 分别表示节点 i 的横坐标和纵坐标。 α 为距离因素调节参数, β 为邻里中心性指数权重参数。考虑到真实网络拟合的情况, 调节参数 α 和 β 的取值不会太大, 这里只讨论 $1 \leq \alpha, \beta \leq 4$ 的情形。

2.2. 距离衰减函数的对比与选择分析

为增强模型的合理性与普适性, 明确不同距离衰减形式对网络拓扑结构的影响, 本节在友谊距离指数(FDI)的框架下, 对比欧氏距离平方、指数衰减、幂律衰减三种典型的距离衰减函数形式对网络拓扑结构的影响。

(1) 欧氏距离平方形式

$$d_{iv} = (x_i - x_v)^2 + (y_i - y_v)^2 \quad (2)$$

(2) 指数衰减形式

$$d_{iv} = e^{-\lambda \cdot d_{Euclidean}} \quad (3)$$

其中 $\lambda \in (0, 1)$, $d_{Euclidean} = \sqrt{(x_i - x_v)^2 + (y_i - y_v)^2}$ 表示两点间欧氏空间距离。

(3) 幂律衰减形式

$$d_{iv} = d_{Euclidean}^{-\gamma} \quad (4)$$

其中 $\gamma \in (2, 3)$, $d_{Euclidean} = \sqrt{(x_i - x_v)^2 + (y_i - y_v)^2}$ 表示两点间欧氏空间距离。

为对比三种形式对网络拓扑的影响, 本文固定 FDI 模型的其他参数(如节点数 $N = 200$ 、初始节点数 $m_0 = 5$ 、连接数 $m = 5$ 和调节参数 $\alpha = \beta = 1$)不变, 仅替换距离衰减形式, 生成三组网络并对比平均聚类系数、平均路径长度和网络效率的核心拓扑指标。

Table 1. Average clustering coefficient, average path length and network efficiency of FDI networks with different distance decay functions

表 1. 不同距离衰减函数形式的 FDI 网络的平均聚类系数、平均路径长度和网络效率

距离函数形式	平均聚类系数	平均路径长度	网络效率
欧氏距离平方形式	0.407	2.799	0.397
指数衰减形式	0.109	2.494	0.435
幂律衰减形式	0.186	2.544	0.428

从表 1 可知, 欧式距离平方形式的平均聚类系数显著高于指数衰减与幂律衰减, 局部聚集特征更突出, 契合现实社交网络的空间特性。三种形式的平均路径长度与网络效率差异较小, 指数与幂律衰减虽提升了网络效率, 但过度削弱空间约束。综上, 本文所选距离形式可平衡局部聚集性与空间约束, 合理性与灵活性均得到验证。

2.3. 友谊距离指数偏好模型的算法

设网络初始含 m_0 个节点, 随机分布于单位圆内(包括边界)并节点之间进行完全连接。模型演化算法如下:

- (1) 增长: 每步在单位圆内新增一个节点 v , 并与 m 个已有节点相连, 满足 $m \leq m_0$ 。
- (2) 连接机制: 新节点 v 与已有节点 i 建立连接的概率为

$$p(i \leftarrow v) = \frac{\eta_i}{\sum_u \eta_u} \quad (5)$$

其中 η_i 为节点 i 的友谊距离指数, $\sum_u \eta_u$ 为网络所有节点友谊距离指数之和。

2.4. 数值仿真分析

为了方便观察, 在进行数值仿真实验研究网络模型的拓扑特性时, 将调节参数组合分为 $\alpha = \beta = 1$ 和 $1 < \alpha, \beta \leq 4$ 。在仿真过程中, 设定仿真参数为 $N = 10,000$ 和 $m_0 = m = 5$, 并在后续仿真实验中保持这一参数组合不变, 除非另有特殊说明。为减小随机因素对仿真结果的影响, 采用了 50 个网络的平均值进行分析, 以确保结果的稳定性和可靠性。

度分布和聚类系数

图 1 展示的是 $\alpha = \beta = 1$ 时 FDI 模型的度分布和聚类系数, 以及 BA 模型的度分布和聚类系数。从仿真结果可以看出, FDI 模型的度分布情况与 BA 网络模型相同, 在双对数坐标下都表现为斜率为 -3 的直线, 符合幂律分布的图像特征。在相同网络规模的条件下友谊距离指数偏好网络模型的聚类系数远远大于 BA 网络的聚类系数。因此, 相较于经典的 BA 无标度网络模型, 该网络模型在网络聚类性能上表现更出色, 也就是说, 这种友谊距离指数偏好的连接机制有效地提高了网络模型的聚类系数。

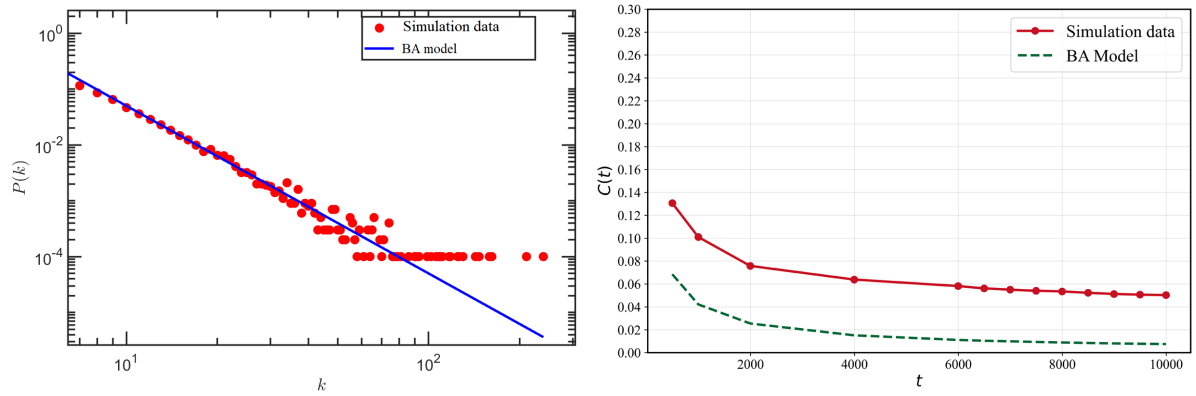


Figure 1. Degree distribution (left) and clustering coefficient (right) of the friendship distance index preference model when $\alpha = \beta = 1$

图 1. 当 $\alpha = \beta = 1$ 时友谊距离指数偏好模型的度分布(左)和聚类系数(右)

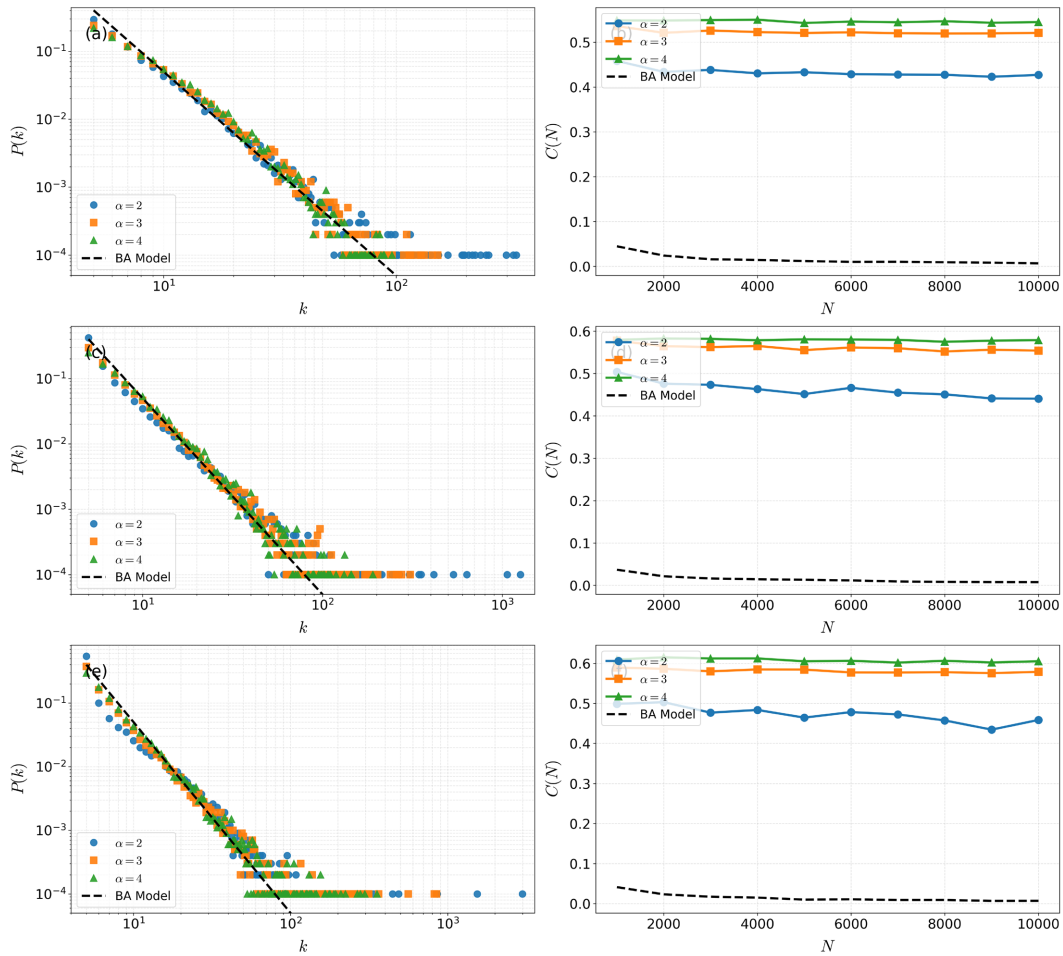


Figure 2. Node degree distribution (left) and clustering coefficient (right) of the friendship distance index preferential network model with different parameter combinations ($\beta = 2, 3, 4; \alpha = 2, 3, 4$)

图 2. 不同参数 ($\beta = 2, 3, 4; \alpha = 2, 3, 4$) 组合下友谊距离指数偏好网络模型的节点度分布(左列)和聚类系数(右列)

图 2 为多组参数 α 和 β 组合下 FDI 网络的度分布与聚类系数模拟结果。度分布层面，其分布形态与

BA 网络理想幂律分布 $P(k) = 2m^2k^{-3}$ 存在拟合偏差, 但均具备显著长尾特征: 低度节点占主体, 少量枢纽节点稳定存在, 整体异质性明显区别于随机网络。随着 β 增大, 度分布长尾效应增强, 高度节点占比上升, 节点度差异扩大, 无标度特性加剧; 随着 α 增大则会加快速度分布衰减, 抑制枢纽节点生成, 使度分布趋于均匀, 弱化无标度特征。当参数取特定组合时(如 $\alpha = 4, \beta = 2$)网络度分布脱离幂律形式, 转为负指数分布(见图 3)。



Figure 3. Node degree distribution of the friendship distance index preferential network model when $\alpha = 4, \beta = 2$

图 3. 当 $\alpha = 4, \beta = 2$ 时友谊距离指数偏好网络模型的节点度分布

FDI 模型部分参数下的负指数分布, 并不会降低模型的应用价值与现实解释力, 反而更契合真实网络的复杂拓扑特征, 弥补了 BA 模型过度理想化的局限。现实社交、信息及技术网络普遍受空间距离、社交圈层、连接成本等因素制约, 抑制了优先连接机制, 弱化了马太效应, 使多数真实网络仅表现为弱无标度特性, 而非严格幂律分布。已有相关研究文献[10]证实, 现实中严格理想无标度网络占比极低, 大量真实网络更符合截断幂律或负指数分布, 且负指数分布的拟合效果与精度并不弱于传统幂律分布。因此, FDI 模型的负指数分布特征具备充分现实依据, 可有效刻画一类广泛存在的实际网络结构。

聚类系数层面, 所有参数 α 和 β 组合下, FDI 模型的聚类系数均显著高于经典 BA 模型, 凸显其在刻画网络聚集性上的优势。BA 模型仅考虑偏好连接、缺乏局部连接约束, 聚类系数极低, 难以贴合真实网络; 而 FDI 模型通过空间约束与社交偏好连接的协同作用, 有效提升了网络局部聚集能力, 更契合真实复杂网络拓扑特性。进一步分析可知, 两个调节参数均对网络聚集性呈正向调控作用: 在保持 β 参数取值不变的前提下, 随着 α 的逐渐增大, FDI 模型的聚类系数呈现出稳步上升的趋势; 与之对应, 在固定 α 参数取值的情况下, 随着 β 的不断增大, FDI 模型的聚类系数同样呈现出明显的递增特征。这一实验结果充分表明, 调节参数 α 和 β 的增大, 均能有效提高网络中节点与局部邻居节点建立连接的概率, 进而推动网络局部连接密度的提升, 使网络呈现出更强的聚集性。

综上所述, FDI 网络模型具备灵活的拓扑表达能力, 既可以通过调节参数重现典型无标度网络的核心特征, 也能够空间约束增强时生成近似负指数分布的网络结构, 同时具备远优于 BA 模型的高聚类特性, 突破了单一模型只能描述某一类度分布特征的局限, 在刻画复杂网络多样性与真实性方面展现出更强的适应性与实用价值。

3. FDI 网络的鲁棒性与脆弱性

网络拓扑稳定性是复杂网络可靠运行的基础, 鲁棒性与脆弱性可量化网络在外部干扰下的结构与功能维持能力。FDI 网络融合社交偏好与空间约束双重演化机制, 拓扑异质性显著区别于经典模型, 亟需探究其节点失效下的结构响应特征。本节首先界定核心拓扑指标, 围绕随机故障与蓄意攻击两类场景, 系统评估 FDI 网络的鲁棒性与脆弱性, 剖析参数对网络抗干扰能力的调控规律, 为后续传播动力学研究提供支撑。

最大连通子图(Largest Connected Component, LCC)是网络中规模最大的连通分量, 其相对大小是衡量网络连通性与鲁棒性的核心直观指标。网络效率 $E(G)$ 通过评估节点间信息传输效率, 反映网络的运行效能与连通状况, 其数学表达式为:

$$E(G) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} \frac{1}{d_{ij}} \quad (6)$$

其中 N 是网络的节点数, d_{ij} 为节点 i 和节点 j 之间的平均最短路径长度。

复杂网络的鲁棒性与脆弱性, 是衡量网络受干扰时维持正常运转的核心指标。从连通性角度, 鲁棒性指节点或连边失效后, 网络仍能保留大规模连通分量、维持高效传输的能力; 脆弱性则表现为少量关键节点移除即导致网络连通性急剧下降。现有研究多通过主动移除节点, 观测网络连通性衰减特征, 量化其抗干扰水平与传播调控潜力。为探究 FDI 网络在结构扰动下的演化规律, 本节分析其在不同节点移除策略下的鲁棒性差异: 随机故障模拟无差别节点失效, 蓄意攻击按节点度降序移除核心节点。在统一参数设置下, 以 LCC 占比和网络效率为指标, 分析距离系数 α 与邻里中心性权重参数 β 对网络稳定性的影响。

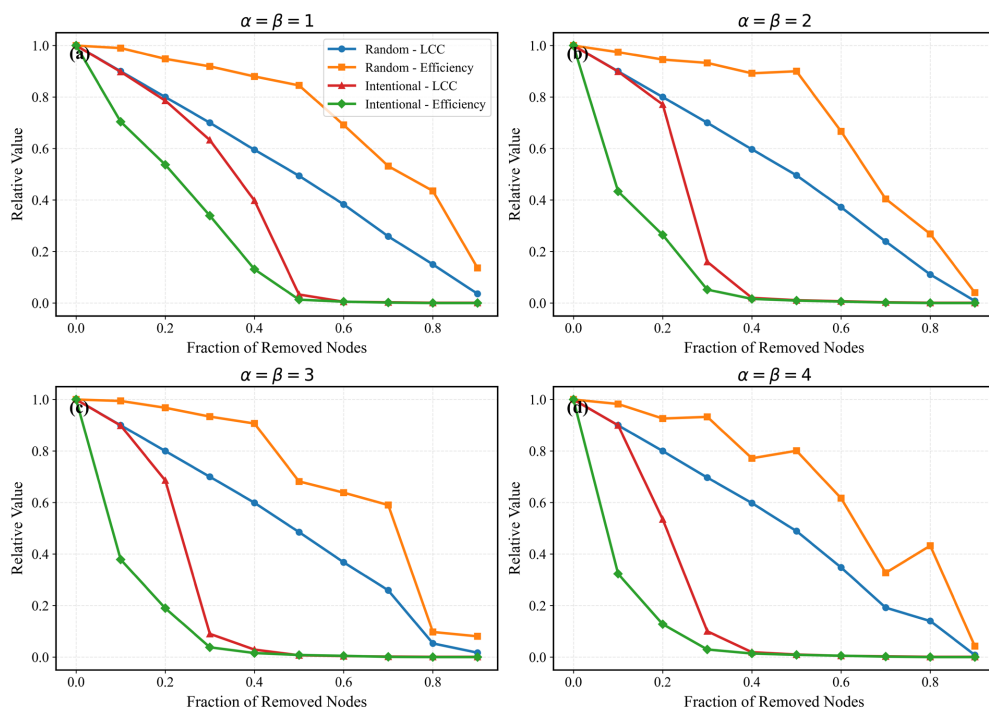


Figure 4. Node removal strategies of FDI networks under different parameter combinations: (a) $\alpha = \beta = 1$; (b) $\alpha = \beta = 2$; (c) $\alpha = \beta = 3$; (d) $\alpha = \beta = 4$

图 4. 不同参数组合下 FDI 网络的节点去除策略: (a) $\alpha = \beta = 1$; (b) $\alpha = \beta = 2$; (c) $\alpha = \beta = 3$; (d) $\alpha = \beta = 4$

图4为四组参数下FDI网络在不同攻击模式下的鲁棒性仿真结果。随机故障下,网络LCC比例与效率随节点失效比例提升平缓衰减,失效比例达80%时仍能维持基本连通性,鲁棒性较强;蓄意攻击下,两项指标均急剧下降,移除比例约40%时即趋于零,网络快速瓦解,呈现典型的“鲁棒但脆弱”特征。值得注意的是,部分参数下网络度分布趋近负指数分布,但其对蓄意攻击的高度脆弱性仍一致存在,说明该脆弱性并非仅由无标度特性决定,而是连接偏好与拓扑演化机制共同驱动的结果。

4. FDI网络下SIR传播模型的数值仿真与分析

上一节的研究表明,FDI网络具有“鲁棒但脆弱”的典型特征。为进一步探究拓扑结构对传染病传播过程的影响,本节基于SIR传播模型,在不同参数组合的FDI网络上开展传播动力学仿真,分析 α 与 β 对传播阈值、感染峰值及最终感染规模的调控规律,揭示社交聚集效应与空间约束在疫情传播中的作用机制,为传染病防控策略优化提供理论依据。

4.1. FDI网络下SIR模型传播临界值分析

由于参数 α 和 β 会改变网络拓扑,本节选取特定参数 $\alpha = \beta = 1$ 下的FDI网络展开研究。复杂网络可为传染病动力学提供多维度分析框架,实现个体接触机制、群体扩散行为与拓扑特征的有机结合。其中平均场理论与异质平均场(Heterogeneous Mean-Field)理论[11]将群体传播动力学与网络拓扑特征相结合,构成了复杂网络上传染病动力学建模的理论基础。这两个理论应用范围不同,前者适合均匀的网络,后者则适合非均匀的网络。前文表明,当 $\alpha = \beta = 1$ 时FDI网络具备无标度特征,因此选用异质平均场理论求解SIR模型传播阈值。异质平均场理论在经典平均场近似之上,纳入网络异质性的传播影响,将同度节点划为同一类,并假定同类节点动力学演化规律一致。结合SIR模型,按节点度 k 对网络分层,记 $S_k(t)$, $I_k(t)$, $R_k(t)$ 分别是度为 k 的节点在 t 时刻处于易感、感染、康复状态的密度。显然对于任意的 k ,都有

$$S_k(t) + I_k(t) + R_k(t) = 1 \quad (7)$$

应用异质平均场理论,相应的SIR模型的微分方程为

$$\begin{cases} \frac{dS_k(t)}{dt} = -\mu k \Theta(t) \cdot S_k(t) \\ \frac{dI_k(t)}{dt} = \mu k \Theta(t) \cdot S_k(t) - \gamma \cdot I_k(t) \\ \frac{dR_k(t)}{dt} = \gamma \cdot I_k(t) \end{cases} \quad (8)$$

其中 μ 为传播率, γ 为恢复率, $\Theta(t)$ 为任意一条边指向一个感染节点的概率,即由度为 k 的节点连接到度为 k' 的节点概率 $P(k'|k)$ 和当前度为 k' 的节点处于感染状态的数量 $I_{k'}(t)$ 组成,具体表示为:

$$\Theta(t) = \sum_{k'} P(k'|k) I_{k'}(t) \quad (9)$$

当网络不具有度相关性时, $P(k'|k)$ 的定义为:

$$P(k'|k) = \frac{k'P(k')}{\sum_k kP(k)} = \frac{k'P(k')}{\langle k \rangle} \quad (10)$$

基于平均场近似,当 $\alpha = \beta = 1$ 时FDI网络可以几乎当作成不具有度相关性的网络。为验证这一理论假设的有效性,通过数值模拟计算了FDI网络的度相关系数,定量评估其度-度关联水平,为后续理论分析提供依据。

Table 2. Pearson correlation coefficients and p -values of FDI networks under different network sizes and connection numbers
表 2. 不同网络规模与连接数下 FDI 网络的皮尔逊相关系数及 p 值

网络规模	连接数	皮尔逊相关系数	p 值
1000	3	0.747006	<0.05
1000	5	0.816437	<0.05
5000	3	0.818331	<0.05
5000	5	0.840152	<0.05
10,000	3	0.773798	<0.05
10,000	5	0.822262	<0.05

由表 2 可知, 在所有测试的网络规模 ($N = 1000, 5000, 10,000$) 和连接数 ($m = 3, 5$) 组合下, 相关性均保持在较高水平且所有 p 值均小于 0.05, 表明结果具有统计学意义。这一结果支持原假设, 即当 $\alpha = \beta = 1$ 时 FDI 网络可以几乎当作成不具有度相关性的网络。

对方程(8)积分求解得到:

$$S_k(t) = e^{-\mu k \int_0^t \Theta(t') dt'} = e^{-\mu k \Phi(t)} \quad (11)$$

其中, 辅助函数 $\Phi(t) = \int_0^t \Theta(t') dt' = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k kP(k) \int_0^t I_{k'}(t') dt' = \frac{1}{\gamma \langle k \rangle} \sum_k kP(k) R_k(t)$ 。

根据方程(8)对辅助函数 $\Phi(t)$ 求导得到

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(t)}{dt} &= \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k kP(k) I_k(t) \\ &= \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k kP(k) (1 - R_k(t) - S_k(t)) \\ &= 1 - \gamma \cdot \Phi(t) - \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k kP(k) e^{-\mu k \Phi(t)} \end{aligned} \quad (12)$$

令 Φ_∞ 为 $t \rightarrow \infty$ 时 $\Phi(t)$ 的值, 则 $f(\Phi_\infty) = 1 - \gamma \cdot \Phi(t) - \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k kP(k) e^{-\mu k \Phi(t)}$ 。于是当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\frac{d\Phi_\infty}{dt} \rightarrow 0$

即

$$f(\Phi_\infty) = 1 - \gamma \cdot \Phi(t) - \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k kP(k) e^{-\mu k \Phi(t)} = 0 \quad (13)$$

从方程(13)可知 $\Phi_\infty = 0$ 是它的一个平凡解。由于 $f(1) < 0$, 当且仅当 $\left. \frac{df(\Phi_\infty)}{d\Phi_\infty} \right|_{\Phi_\infty} > 0$, 即 $\mu > \frac{\gamma \langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle}$ 时, Φ_∞ 存在非零解, 表明流行病会爆发。因此, SIR 模型在 FDI 网络上的爆发阈值为:

$$\mu_c = \frac{\gamma \langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle} \quad (14)$$

为验证该理论公式的准确性与稳健性, 我们开展了多组模拟实验: 设定网络规模为 $N = 200$ 个节点, 初始网络包含 $m_0 = 5$ 个节点, 且每个新增节点与 $m = 3$ 个现有节点相连, 固定恢复率 $\gamma = 0.1$ 进行 SIR 模拟仿真, 结果如下。

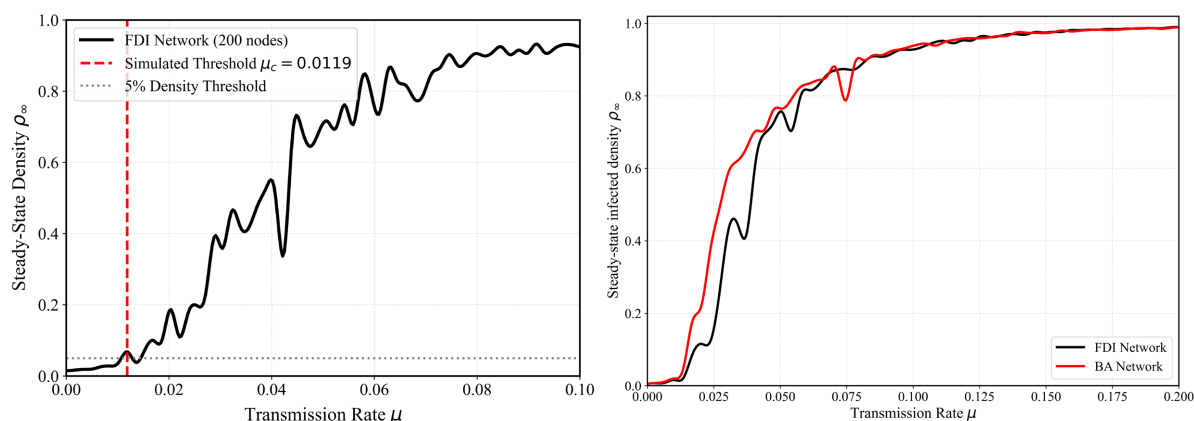


Figure 5. SIR model simulation on the FDI network when $\alpha = \beta = 1$: (left) epidemic threshold and (right) steady-state density as a function of transmission rate

图 5. 当 $\alpha = \beta = 1$ 时 FDI 网络下 SIR 模型模拟传播阈值(左)与稳态密度随传播率的变化曲线(右)

图 5 展示的是在 FDI 网络下 SIR 模型的传播阈值仿真图(左)和 FDI 网络与 BA 网络在相同规模和平均度下的稳态感染密度随传播率的变化曲线对比图(右)。左图的仿真结果显示传播阈值为 0.0119, 网络的平均度 $\langle k \rangle = 5.95$, 度平方均值 $\langle k^2 \rangle = 50.76$ 。根据阈值公式 (14) 计算出模型的理论阈值 $\mu_c = \gamma \langle k \rangle / \langle k^2 \rangle \approx 0.0117$, 几乎是一致的, 这说明理论推导的公式是可行的。

在此基础上, 为进一步对比 FDI 网络与经典无标度网络的传播动力学特征, 将 FDI 网络与 BA 网络在相同规模和平均度下进行对比。结果表明, 两类网络的整体传播趋势一致, 均呈现随传播率上升而饱和的规律, 且在高传播率阶段曲线趋于重合, 符合无标度网络的普遍传播特性。但在低传播率区间, BA 网络的感染密度略高于 FDI 网络, 这一差异主要源于 FDI 网络更高的聚类系数, 反映了网络拓扑结构对传播过程的调控作用。

4.2. FDI 网络下 SIR 模型参数敏感性分析

上一节已理论分析了 SIR 模型在特定参数 $\alpha = \beta = 1$ 下 FDI 网络中的传播阈值。为进一步探究传播率 μ 与恢复率 γ 对传播过程、传播规模及演化特征的影响, 本节开展仿真实验。实验设置: FDI 网络参数固定为 $\alpha = \beta = 1$, 节点总数 $N = 1000$ 、初始种子节点数 $m_0 = 5$ 及每步新增连边数 $m = 3$ 。传播参数选取不同梯度的传播率 μ 与恢复率 γ , 以模拟不同传播强度与康复速度。为降低随机误差, 每组参数组合重复 5 次实验, 统计并记录感染峰值占比与最终感染占比的均值(见), 定量分析参数调控机制。

图 6 为不同传播率与恢复率组合下, FDI 网络中 SIR 模型的感染峰值(左)占比与最终感染占比(右)热力图。两图均直观呈现了传播率与恢复率对疫情传播规模的协同调控效应: 从感染峰值占比来看, 恢复率 γ 固定时, 传播率 μ 增大将显著推高峰值占比, 符合病毒传播效率越高、疫情爆发强度越大的基本规律; 而传播率 μ 固定时, 恢复率 γ 提升则会降低峰值占比, 反映出康复速度对疫情扩散的抑制作用。从最终感染占比来看, 任意恢复率 γ 下, 传播率 μ 提升均会使最终感染规模显著上升, 且在中低传播率阶段增幅更明显; 当传播率超过一定阈值后, 即使恢复率在合理范围内波动, 最终感染占比仍趋近于 1, 恢复率的调控效应趋于消失, 这与无标度网络中传播阈值消失的理论预期一致。

综上, 传播率 μ 和恢复率 γ 的参数敏感性分析表明: 传播率是决定疫情传播强度与最终规模的核心因素, 数值增大将显著推高感染峰值与最终感染占比, 超过临界值后易引发全域传播; 恢复率则是疫情防控的关键调节手段, 尤其在低传播率场景下, 提升恢复率可有效抑制疫情扩散。进一步来看, 在当

$\alpha = \beta = 1$ 时 FDI 网络中, SIR 模型的传播动力学特征对 μ 和 γ 的变化规律, 既符合无标度网络“传播阈值消失、核心节点主导传播”的普遍规律, 又体现了 FDI 网络融合社交关联与空间分布的独特结构特征。这种结构使得病毒传播既具备无标度网络的快速扩散特性, 又受到节点空间分布和关联强度的影响, 进而形成了上述参数调控规律。

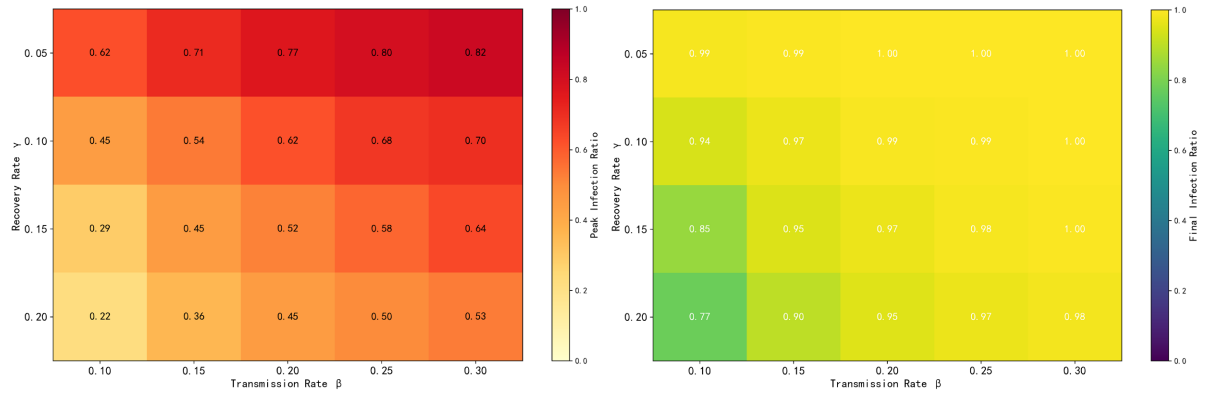


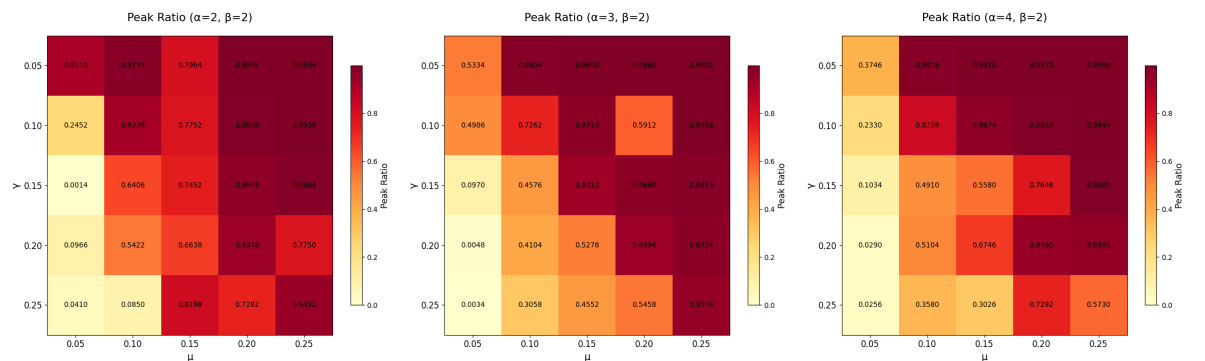
Figure 6. Heatmaps of the peak infection proportion (left) and final infection proportion (right) in FDI networks under different transmission and recovery rates

图 6. 不同传播率与恢复率下 FDI 网络的感染峰值占比(左)与最终感染占比(右)热力图

4.3. FDI 网络下 SIR 模型模拟仿真

前文表明, FDI 网络的度分布由调节参数 α 和 β 共同决定, 不同参数组合会产生差异化拓扑结构, 网络并非严格服从幂律分布。受结构异质性限制, 难以通过解析推导求解传播阈值, 无法定量刻画网络结构与传播效率的关联。为此, 本节采用控制变量法开展仿真实验: 统一设定网络规模 $N = 1000$ 、初始感染节点数 $m_0 = 5$ 、新增连边数 $m = 3$, 在固定参数 β (消除社交因素干扰), 通过调节参数 α , 记录不同参数组合下的感染峰值占比(见图 7)与最终感染占比(见图 8), 量化空间距离对传播过程的影响。

热力图结果显示, 感染规模随传播率的变化呈现非单调特征: 以 $\beta = 4, \alpha = 2, \gamma = 0.15$ 为例, 当传播率 $\mu = 0.15$ 时感染规模为 0.9282, 而 $\mu = 0.2$ 时反而降至 0.7746。该现象的成因在于: 当 α 过大时, 节点间距离约束过强, 网络易形成强空间聚类结构, 跨社区连接稀疏, 疾病传播受限于局部社区, 需更高传播率才能突破社区壁垒。这表明空间距离对传播动力学具有显著调控作用, 也为疫情防控提供了理论支撑: 对强空间聚类网络, 限制长距离人员流动、实施跨区域旅行限制, 可有效阻断跨区域传播链, 遏制疫情扩散。



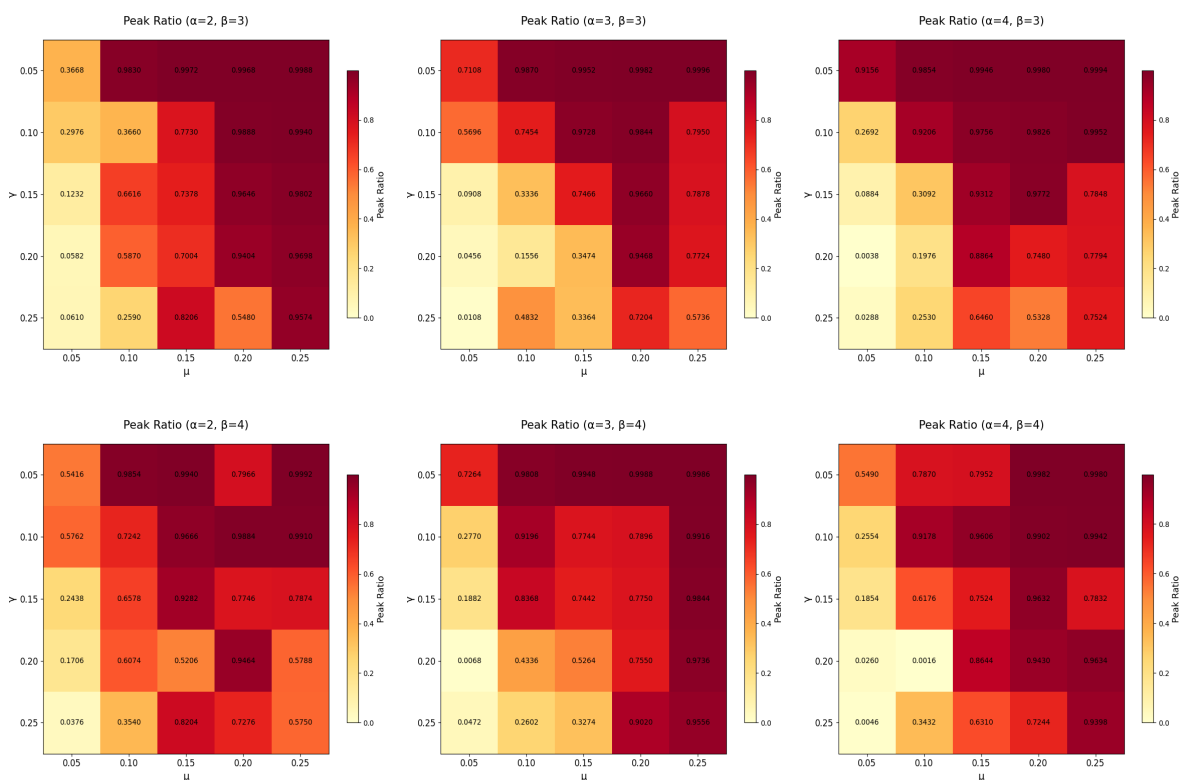
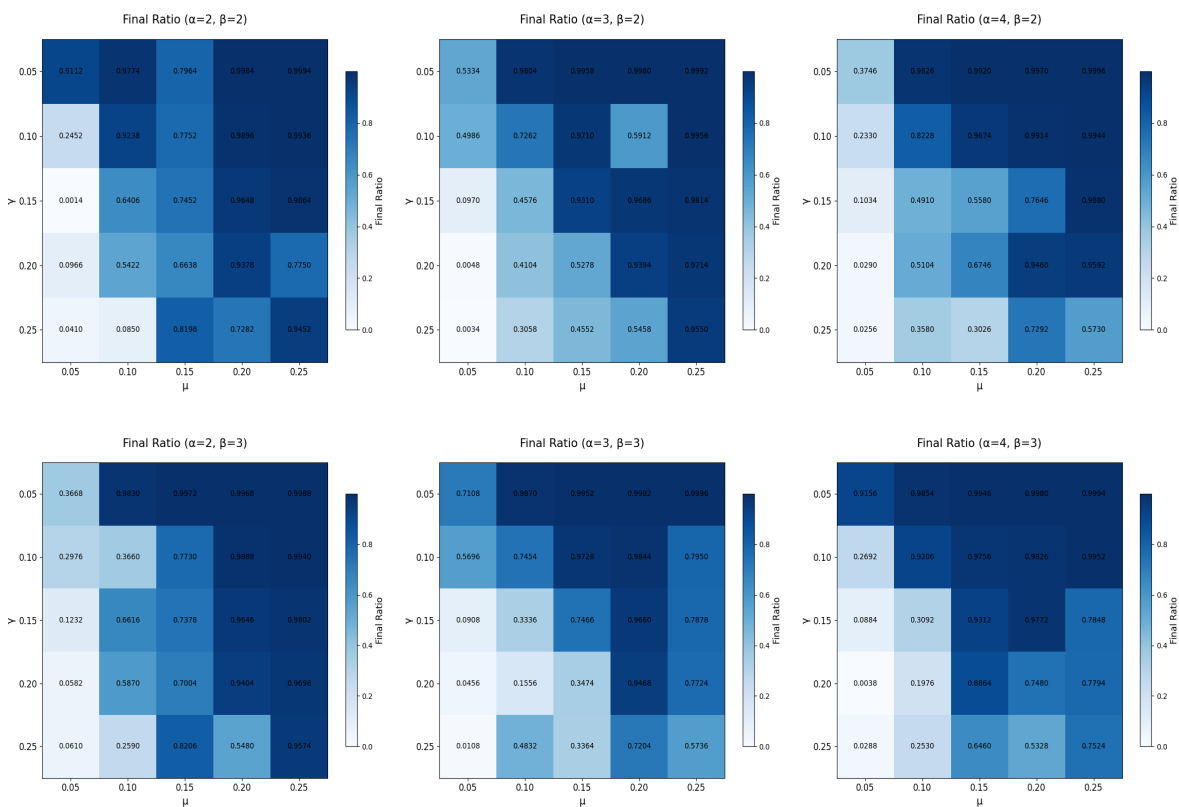


Figure 7. Heatmap of network infection peak ratio against transmission rate and recovery rate
 图 7. 网络感染峰值占比随传播率与恢复率变化的热力图



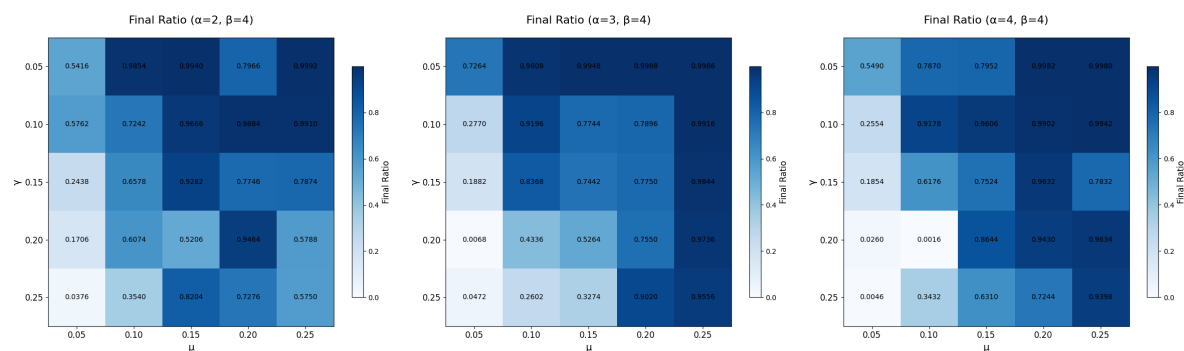


Figure 8. Heatmap of network final infection ratio against transmission rate and recovery rate

图 8. 网络最终感染占比随传播率与恢复率变化的热力图

5. 结论

本文围绕复杂网络上的传染病传播动力学展开研究, 针对传统网络模型无法兼顾空间因素与社会因素、难以精准刻画真实传染病传播规律的缺陷, 提出友谊距离指数(FDI), 构建融合地理邻近性与社会亲近度的 FDI 网络演化模型, 有效弥补了 BA 模型、经典加权网络模型的不足, 能够更贴合真实网络的拓扑特征。

以经典 SIR 传染病模型为研究框架, 系统分析 FDI 网络上的传播动力学行为, 重点探究网络参数与传播参数对传播阈值、感染规模的影响, 揭示了空间和社会耦合作用下的传染病传播机制。研究结果不仅完善了复杂网络传播动力学的相关理论, 更为真实社交网络中传染病的精准防控提供了可靠的理论支撑与实践指导, 验证了 FDI 网络在传播动力学研究中的合理性与实用性, 为后续相关领域的深入研究奠定了基础。

参考文献

- [1] 孙艺致, 吕堂红. 具有时滞的 COVID-19 SIR 模型的稳定性和 Hopf 分支分析[J]. 长春理工大学学报(自然科学版), 2025, 48(3): 105-113.
- [2] 王运锋, 夏德宏, 颜尧妹. 社会网络分析与可视化工具 NetDraw 的应用案例分析[J]. 现代教育技术, 2008(4): 85-89.
- [3] Angelelli, E., Morandi, V. and Speranza, M.G. (2020) Minimizing the Total Travel Time with Limited Unfairness in Traffic Networks. *Computers & Operations Research*, **123**, Article 105016. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2020.105016>
- [4] Barabási, A. (2009) Scale-Free Networks: A Decade and beyond. *Science*, **325**, 412-413. <https://doi.org/10.1126/science.1173299>
- [5] Pi, X.C., Tang, L.K. and Chen, X.Z. (2021) A Directed Weighted Scale-Free Network Model with an Adaptive Evolution Mechanism. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **572**, Article 125897. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2021.125897>
- [6] Li, M., Wang, D., Fan, Y., Di, Z. and Wu, J. (2006) Modelling Weighted Networks Using Connection Count. *New Journal of Physics*, **8**, 72. <https://doi.org/10.1088/1367-2630/8/5/072>
- [7] Li, P., Zhao, Q. and Wang, H. (2013) A Weighted Local-World Evolving Network Model Based on the Edge Weights Preferential Selection. *International Journal of Modern Physics B*, **27**, Article 1350039.
- [8] Yang, C.X., Tang, M.X., Tang, H.Q., et al. (2014) Local-World and Cluster-Growing Weighted Networks with Controllable Clustering. *International Journal of Modern Physics C*, **25**, Article 1440009. <https://doi.org/10.1142/s0129183114400099>
- [9] Granovetter, M. (1978) Threshold Models of Collective Behavior. *American Journal of Sociology*, **83**, 1420-1443. <https://doi.org/10.1086/226707>
- [10] Broido, A.D. and Clauset, A. (2019) Scale-Free Networks Are Rare. *Nature Communications*, **10**, Article No. 1017. <https://doi.org/10.1038/s41467-019-08746-5>
- [11] 丁莹, 闫光辉, 裴华艳, 等. 传染病传播建模中的关键参数: 传播阈值与基本再生数解析[J]. 兰州交通大学学报, 2025, 44(6): 110-118.