

多连通域双调和波特特征值问题的边界积分法

王静泊, 郑文明, 岳俊宏*, 贾宏恩

太原理工大学数学学院, 山西 太原

收稿日期: 2026年4月19日; 录用日期: 2026年5月13日; 发布日期: 2026年5月20日

摘要

弹性薄板振动的数值分析对航空航天结构设计与机械减振至关重要。传统有限元法精度不足, 边界积分方程法在多连通域中易产生虚假特征频率。为此, 本文提出新型虚假特征频率识别策略, 结合基于多层位势边界积分方程的Boyd方法, 求解固支边界多连通域的双调和波特特征值问题。首先, 基于多层位势理论推导多连通域的第二类Fredholm边界积分方程, 将特征值问题转化为行列式求零点问题; 其次, 采用广义高斯求积实现数值离散, 并通过Boyd求根方法高效求解特征频率; 进一步, 依据虚假特征频率与内边界外散射问题相关的特性, 构建多连通域虚假频率识别方案; 最后, 通过数值算例验证了Boyd方法的精度与效率, 并证实所提识别策略的可行性。

关键词

双调和波特特征值问题, 多层势边界积分方程, Boyd求根法, 虚假特征频率

Boundary Integral Method for the Biharmonic Wave Eigenvalue Problem in Multiply Connected Domains

Jingbo Wang, Wenming Zheng, Junhong Yue*, Hong'en Jia

Department of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: April 19, 2026; accepted: May 13, 2026; published: May 20, 2026

Abstract

Numerical analysis of elastic thin plate vibration is crucial for aerospace structural design and mechanical vibration reduction. The conventional finite element method suffers from insufficient

*通讯作者。

文章引用: 王静泊, 郑文明, 岳俊宏, 贾宏恩. 多连通域双调和波特特征值问题的边界积分法[J]. 应用数学进展, 2026, 15(5): 336-347. DOI: 10.12677/aam.2026.155233

accuracy, while the boundary integral equation method is prone to spurious eigenfrequencies in multiply connected domains. To address these issues, this paper proposes a novel identification strategy for spurious eigenfrequencies, combined with the Boyd method based on the multi-layer potential boundary integral equation, to solve the biharmonic wave eigenvalue problem of clamped boundary multiply connected domains. First, based on the multi-layer potential theory, the second-kind Fredholm boundary integral equation for multiply connected domains is derived, transforming the eigenvalue problem into a problem of finding zeros of the determinant. Second, the generalized Gaussian quadrature is adopted for numerical discretization, and eigenfrequencies are solved efficiently via the Boyd root-finding method. Furthermore, exploiting the characteristic that spurious eigenfrequencies are associated with the exterior scattering problem at inner boundaries, a scheme for identifying spurious frequencies in multiply connected domains is constructed. Finally, numerical examples verify the accuracy and efficiency of the Boyd method and validate the feasibility of the proposed identification strategy.

Keywords

Biharmonic Wave Eigenvalue Problems, Multi-Layer Potential Boundary Integral Equations, Boyd Root-Finding Method, Spurious Eigenfrequencies

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文考虑一个具有夹紧边界条件的二维有界弹性薄板的振动问题。假设所研究的问题域 Ω 是充满各向同性且匀质的弹性介质。该问题可归结为具有第一类 Dirichlet 边界条件的双调和波动特征值问题：在给定的具有光滑边界的二维有界连通区域 Ω 中，寻找特征频率 k 和相应的非平凡特征函数 u ，使其满足：

$$\Delta^2 u - k^4 u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (1)$$

$$(u, \partial_n u) = (0, 0) \quad \text{on } \Gamma, \quad (2)$$

其中， $\Delta^2 := \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ 是双调和算子，且 $k > 0$ 。图 1 展示了所研究问题的几何结构。对于边界点 $\mathbf{x} \in \Gamma$ ，用 n_x 和 τ_x 分别表示为单位法向量和单位切向量。

薄板振动分析是弹性力学与工程力学的重要课题，其振动特性分析广泛应用于航天航空[1]、海洋工程[2]和声学工程[3]等领域。数学上可描述为有界区域内带边界条件的双调和方程特征值问题。仅简单几何结构可获得解析解[4]，复杂形状需数值方法求解。四阶特征值问题的数值方法分为两类：(1) 基于区域离散化方案，包括有限元法(FEM) [5]和无网格方法[6]，通用性强但存在高频“污染”、未知量规模大等局限；(2) 基于边界离散化方案，包括边界积分法[7]和特解法[8][9]，而其精度高、无高频污染，可将二维问题降维为边界一维积分，并显著降低计算复杂度。对于边界积分，若被积函数充分光滑，复合 Gauss-Legendre 求积通常可满足精度要求；但当积分核含对数奇异性或更强奇异性时，该方法精度不足。广义高斯求积方案(GGQ)通过构造新型非多项式基函数，突破了经典 Gauss 积分对光滑性的限制，能精确处理含振荡、奇异性或二者兼具的被积函数，为边界积分方程高精度离散提供了更通用的方案。Bremer 等人[10]基于非线性优化构建 GGQ 规则，可高效高精度计算含振荡、奇异性的函数及平面波展开积分。

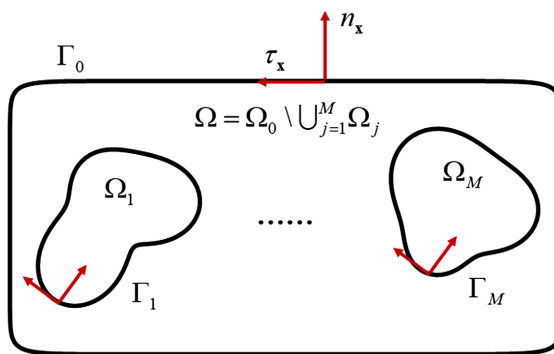


Figure 1. Multiply connected domain Ω with multiple holes and its boundaries $\Gamma_i (i=1,2,\dots,M)$ where the domain $\Omega = \Omega_0 \setminus \bigcup_{j=1}^M \Omega_j$ contains M holes $\Omega_j (j=1,2,\dots,M)$

图 1. 带有多个孔洞的多连通区域 Ω 及其边界 $\Gamma_i (i=1,2,\dots,M)$ ，这里区域 $\Omega = \Omega_0 \setminus \bigcup_{j=1}^M \Omega_j$ 具有 M 个孔洞 $\Omega_j (j=1,2,\dots,M)$

基于上述边界离散积分技术，可构造边界积分方程的离散矩阵，进而可采用基于奇异值分解(SVD)的求根方法[8] [9] [11]或 Boyd 求根方法[12]以获得原始特征值问题的特征频率。SVD 求根法通过遍历不同频率计算离散矩阵最小奇异值，拟合后取局部极小点得到特征频率，但该方法效率较低，高频特征求解精度有限。为此，Zhao 等人[12]引入了 Boyd 提出的求根框架[13]，用于求解基于边界积分方程的 Laplace 特征值问题。他先将原问题转化为 Fredholm 行列式求根问题，再用谱精度 Nyström 方法离散积分方程，最后通过 Boyd 方法快速定位行列式零点。相比 SVD 方法，该方法在保证高精度的同时大幅提升了计算效率。

然而，上述研究主要集中于二阶 Laplace 特征值问题。针对四阶双调和波特征值问题，目前虽已有较多工作采用基于 SVD 的求根方法开展分析[14] [15]，但结合 Boyd 求根方法的相关研究仍较为匮乏。究其原因，仅依靠单层势与双层势建立的边界积分方程，离散后所得矩阵特性存在不足，无法通过 Boyd 求根方法求解得到高精度数值结果。为克服这一局限，现有研究引入多层势理论，建立了双调和波问题的第二类 Fredholm 边界积分方程。例如，Lindsay 等学者[16]对含离散固支点的薄板双调和波特征值问题，提出了基于多层势组合的高效边界积分方法，通过将解表示为格林函数叠加项与光滑修正项，有效消除了结构缺陷引发的弱奇异性问题。此外，在多连通区域中，基于边界积分方程求解特征值问题时，均易引入额外的虚假特征频率。这是因为在构建边界积分方程时不同层势往往会引入一些虚假特征频率，这类频率本质是对应类问题的特征频率[15] [17]。目前针对薄板的双调和和特征值问题，已有少量虚假特征波数的规避的研究[14] [15]。例如，Chen 等[15]采用了薄板振动边界积分方程的六种组合求解方案，研究了不同类型边界条件的虚假特征频率，并提出三种虚假特征频率抑制方法：Burton-Miller 方法、CHIEF 法和基于 SVD 更新技术的方法。研究表明，基于复值边界积分方程(BIE)求解多连通域(环形板)薄板振动时，虚假特征值不可避免，其产生源于内边界对应的单连通内部问题，虚假特征频率由边界积分方程的组合方案决定，而真实特征频率由边界条件决定。然而，这些研究主要考虑了含圆形孔洞的多连通区域，并未对任意孔洞的多连通区域进行深入研究，其虚假特征频率的产生规律与抑制策略仍有待进一步探索。

为此，本文结合 GGQ、Boyd 求根法与多层势边界积分的优势，为夹紧边界条件下的双调和波特征值问题，构建了一种基于多层势边界积分方程的高精度求解框架。同时，提出了一种适用于任意形状多

连通区域的新型虚假特征频率识别策略。

2. 边界积分方程的构造

本节首先利用多层势的组合构建了双调和波方程的层势解。然后, 结合夹紧边界条件构建了多连通区域的边界积分方程。最后, 将原始特征值问题(1) (2)转化为基于边界积分方程的 Fredholm 行列式的零点问题。

2.1. 多连通区域上的边界积分方程

本节研究如图 1 所示多连通域上的双调和波特征值问题。基于文献[16], 本文引入两类多层位势的组合形式, 利用叠加原理, 将双调和波方程(1)的解表示为:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\bigcup_{i=0}^M \Gamma_i} [K_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})\varphi_1(\mathbf{y}) + K_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})\varphi_2(\mathbf{y})] ds_y, \quad (3)$$

其中, $i=0$ 对应外边界 Γ_0 , $i=1, \dots, M$ 对应内边界 Γ_i 。当 $M=0$ 时, 式(3)退化为单连通域上的解表达式; 此处核函数 $K_i (i=1, 2)$ 是双调和波方程格林函数高阶导数的线性组合。这里双调和波方程格林函数的表达式为:

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}; k) = \frac{1}{2k^2} \left[\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) - \frac{1}{2\pi} K_0(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \right],$$

其中, $H_0^{(1)}$ 为第一类 0 阶 Hankel 函数, K_0 为第二类 0 阶修正 Bessel 函数, 满足 $K_0(z) := \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(iz)$ 。且 $H_0^{(1)}(z)$ 和 $K_0(z)$ 分别是 Helmholtz 方程和 Yukawa 方程的格林函数。根据文献[18], 我们将双调和波方程解中的核函数 K_1, K_2 分别取为 $\Phi_{n_y n_y n_y} + 3\Phi_{n_y \tau_y \tau_y}$ 与 $\Phi_{\tau_y \tau_y} - \Phi_{n_y n_y}$ 。通过在每条边界 $\Gamma_i (i=0, 1, \dots, M)$ 施加固支边界条件(2), 并利用多层位势的跳跃关系[16], 可推导得到如下矩阵方程组:

$$\left[\begin{pmatrix} D_0 & & & 0 \\ & D_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & D_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_0 & \bar{K}_1 & \dots & \bar{K}_M \\ \bar{K}_0 & K_1 & \dots & \bar{K}_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{K}_0 & \bar{K}_1 & \dots & K_M \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \varphi|_{\Gamma_0} \\ \varphi|_{\Gamma_1} \\ \vdots \\ \varphi|_{\Gamma_M} \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad x \in \Gamma. \quad (4)$$

其中, 根据文献[16], $D_i = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -\kappa(\mathbf{x}) & 1/2 \end{pmatrix}$ 。这里 $\kappa(\mathbf{x})$ 为点处的有向曲率, 且 $\tau_x = \kappa(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_x$ 。显然跳跃矩阵 $D_i(\mathbf{x})$ 是有界可逆的。同时由于积分核矩阵 \mathbf{K} 是连续的(见文献([19], Theorem 3.1), 结合[16] [20]可知积分核矩阵 \mathbf{K} 为紧线性算子, 故方程为第二类 Fredholm 积分方程。算子 $\bar{\mathbf{K}}_i[\varphi_1, \varphi_2]: C(\Gamma_i) \rightarrow C(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_i)$ 表示边界 Γ_i 上作用在 $[\varphi_1, \varphi_2]$ 的多层位势, 具体表达为:

$$\bar{\mathbf{K}}_i[\varphi_1, \varphi_2] = \int_{\Gamma_i} \begin{bmatrix} K_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & K_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ K_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & K_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(\mathbf{y}) \\ \varphi_2(\mathbf{y}) \end{bmatrix} ds_y,$$

其中, $K_{1i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $K_{2i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \partial K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) / \partial n_x$ 。而算子 $\mathbf{K}_i[\varphi_1, \varphi_2]: C(\Gamma_i) \rightarrow C(\Gamma_i)$ 是通过多层位势 $\bar{\mathbf{K}}_i[\varphi_1, \varphi_2]$ 施加跳跃关系得到的边界积分算子。

基于上述多层势边界积分方程, 并根据文献[12]可知: 当方程(4)的算子矩阵的 Fredholm 行列式 $f(k) = 0$ 时, 边界积分方程(4)存在非平凡解。同时, 原始特征值问题(1) (2)的特征频率能够使 $f(k) = 0$, 且相应的非平凡解是该问题的特征函数。然而, $f(k) = 0$ 的解中往往还混有一些非原特征值问题(1) (2)的

特征频率，这类解被称为虚假特征频率。这一现象源于多连通区域中内边界的存在及其边界积分方程的固有性质[15]。多连通区域内边界对应的边界积分方程，与该边界下外散射问题的边界积分方程形式一致；而基于层势构造的边界积分方程，受自身适定性影响，在外散射问题求解过程中易出现虚假特征频率。文献[17]已证实，对于双调和外散射问题，由单层势与双层势组合构建的耦合边界积分方程会产生虚假特征频率；但针对多层势外散射问题的虚假特征频率机理，目前尚无明确结论。该问题依赖于多层势边界积分方程的适定性理论分析，而其严格的适定性条件与理论分析目前仍是公开问题[19]。

2.2. 虚假特征频率的识别

本节介绍了一种多连通区域边界积分方程(4)虚假特征频率 \tilde{k} 的识别策略。根据文献[12]，对于具有 Dirichlet 边界条件的 Helmholtz 外散射问题和双连通区域特征值问题，当采用双层势表示解时，这两个问题的边界积分方程均会出现虚假特征频率，这些虚假特征频率恰好均是内部区域上 Helmholtz 方程的 Neumann 特征频率。因此，我们有如下的 Remark:

Remark 2.1. 在双连通区域 $\Omega = \Omega_0 \setminus \Omega_1$ 中，具有 Dirichlet 边界条件的 Helmholtz 特征值问题的虚假特征频率与在区域 $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_1$ 上的 Helmholtz 外散射问题的虚假特征频率相同。

类似地，我们认为在双连通区域上具有夹紧边界的双调和波特特征值问题的虚假特征波数具有如下的 Remark:

Remark 2.2. 在双连通区域 $\Omega = \Omega_0 \setminus \Omega_1$ 中，具有夹紧边界条件的双调和波特特征值问题的虚假特征频率与在区域 $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_1$ 上的双调和波外散射问题的虚假特征频率相同。

事实上，这是因为将双连通区域的多层势边界积分方程限定于内边界 $\partial\Omega_1$ 时，其边界积分方程形式与同一边界构型下外散射问题的多层位势边界积分方程在形式上完全相同。这使得该外散射问题的虚假特征频率与双连通区域因内边界引入的虚假特征频率完全重合，从而为后续构建统一的虚假特征识别方法提供了关键理论支撑。该 Remark 已通过后续的数值实例证明了其正确性，且可将其推广到更一般的多连通区域，具体 Remark 如下:

Remark 2.3. 设多连通区域 $\Omega = \Omega_0 \setminus \bigcup_{j=1}^M \Omega_j$ ，且其边界为 $\Gamma = \bigcup_{j=0}^M \Gamma_j$ 。那么，具有夹紧边界条件的双调和波特特征值问题的虚假特征波数与在所有外区域 $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_j$ ($j = 1, 2, \dots, M$) 上的双调和波外散射问题的“虚假特征频率”的并集相同。

值得注意的是，对于双调和波外散射问题，基于不同层势的边界积分方程所得的虚假特征频率往往不同。

因此，基于上述 Remark，本文提出了一种多连通区域上多层势边界积分方程虚假特征频率的识别方法，具体步骤如下:

步骤 1: 采用 3.2 节 Boyd 求根方法获得多连通区域上基于多层势边界积分方程(4)的所有特征频率，包括真实特征频率和虚假特征频率。

步骤 2: 针对多连通区域的每个孔洞的双调和波外散射问题，构建其相应的基于多层势的边界积分方程，同样采用 Boyd 求根方法求解特征频率。对所有孔洞外散射问题的特征频率取并集，即为边界积分方程的虚假特征频率。

步骤 3: 前两步得到的特征频率的差集就是原始特征值问题(1) (2)的真实特征频率。

3. 数值方法

本节介绍了边界积分方程组(4)的离散方案，并采用 Boyd 求根方法求解相应离散 Fredholm 行列式的

零点(原问题的特征频率)。

3.1. 边界积分方程的离散方案

基于文献[19], 在边界积分方程中多层势核函数 $K_{ij}(i, j=1, 2)$ 是连续且不光滑的函数, 能够分解为光滑函数和具有弱奇异的函数之和:

$$K_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = K_{ij}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + K_{ij}^{WS}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad i, j=1, 2,$$

其中, $K_{ij}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 是一个光滑函数; $K_{ij}^{WS}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 是一个具有形如 $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^p \log|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ 的弱奇异函数, 且 $p \in \mathbb{N}$ 。

因此, 针对该核函数边界积分 $\int_{\Gamma} K_{i,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})d\mathbf{s}_y$ 的离散, 其光滑函数的边界积分直接采用复合 Gauss-Legendre 求积规则进行数值积分。

对于含弱奇异函数的边界积分, 则采用 GGQ 求解。GGQ 采用了修正的 Gauss-Legendre 积分的思想 [10] [21] [22], GGQ 通过构建一组新的非多项式基函数族 $\{1, t, \dots, t^{2M-1}, \log t, t \log t, \dots, t^{l-1} \log t\}$, 突破了经典高斯积分对函数光滑性的限制, 可精确处理具有振荡特性、奇异性或两者兼具的被积函数, 为边界积分方程的高精度离散提供了更具普适性的解决方案。这里的 GGQ 主要使用的是一种基于非线性优化的广义高斯求积构造方法, 实现了对含振荡与奇异性的函数以及平面波展开等情形均可获得高效高精度的积分规则。首先将边界划分为 N_q 段, 这些边界可分为对应积分是具有奇异性的“本界”边界和“邻界”边界; “界外”对应的积分是光滑的, 可采用标准的 Gauss-Legendre 节点的积分。然后, 利用 GGQ 在“本界”和“邻界”上获得一组特定的节点和权重, 我们将这些节点和权重分别记为 $t_n^{(l)}$ 、 $\omega_n^{(l)}$ 和 \bar{t}_n 、 $\bar{\omega}_n$ 。然后, 我们把第 q 个面元参数化为 $\gamma_q(t)$, 其中 $t \in [-1, 1]$ 。基于 n 阶标准的 Gauss-Legendre 求积规则, 对于边界 Γ 总节点个数为 $n \times N_q$ 。假设本界为第 i 个子边界 Γ_i , “邻界”和“界外”的边界索引集分别为 $B(i)$ 和 $C(i)$, 再设定“本界”和“邻界”的积分节点数量是 N_s 和 N_e 。由于这些节点与 Gauss-Legendre 积分节点不同, 因此需基于标准的 n 个 Gauss-Legendre 节点处的密度函数值, 对“本界”和“邻界”的节点处的密度函数值进行如下的 Lagrange 插值:

$$\varphi(\gamma_q(t)) = \sum_{p=1}^n L_p(\gamma_q(t))\varphi_p,$$

其中, L_p 是 Lagrange 插值多项式。再根据“本界”和“邻界”所对应的节点与权重, 将边界积分转化为离散形式, 最终得到具有弱奇异核函数对应边界积分的离散结果:

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{N_p} \int_{\Gamma_q} K^{MS}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})d\mathbf{s}_y &\approx \sum_{p=1}^n \sum_{n=1}^{N_s} \omega_n^{(l)} K^{MS}(\mathbf{x}, \gamma_i(t_n^{(l)})) J_i(t_n^{(l)}) \mathbf{L}_{np}^{(S)} \varphi_{ip} \quad (\text{本界}) \\ &+ \sum_{q \in B(i)} \sum_{p=1}^n \sum_{n=1}^{N_e} \bar{\omega}_n K^{MS}(\mathbf{x}, \gamma_q(\bar{t}_n)) J_q(\bar{t}_n) \mathbf{L}_{np}^{(E)} \varphi_{qp} \quad (\text{邻界}) \\ &+ \sum_{q \in C(i)} \sum_{p=1}^n \omega_p K^{MS}(\mathbf{x}, \gamma_q(t_p)) J_q(t_p) \varphi_{qp}, \quad (\text{界外}) \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $\mathbf{L}_{np}^{(S)} = L_p(\gamma_i(t_n^{(l)}))$ 定义于边界 Γ_i 上, $\mathbf{L}_{np}^{(E)} = L_p(\gamma_q(\bar{t}_n))$ 定义于边界 Γ_q 上, 且 φ_{qp} 用于表示第 q 个子边界内第 p 个节点对应的密度函数值。 t_p 和 ω_p 为标准区间 $[-1, 1]$ 上对应的 Gauss-Legendre 求积点与权值。

基于上述核函数边界积分的离散方案, 我们能够得到边界积分方程(4)对应的离散 Fredholm 行列式 $f_N(k)$ 。因此, 边界积分方程对应的特征值求解问题转化为寻找离散 Fredholm 行列式 $f_N(k)$ 的零点问题。

3.2. Boyd 求根方法

本节阐述一种求解 Fredholm 行列式的零点的 Boyd 求根方法, 计算得到的零点对应双调和波方程的

特征值。Boyd 求根方法[13]的核心思想是将实轴上的根搜索问题转化为周期函数的傅里叶分析问题，通过函数逼近与多项式求根实现高效求解。Boyd 求根方法的具体步骤如下：

首先，对 $f_N(k)$ 零点的候选区间 $[a, b]$ 进行变量变换： $k(\theta) = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \theta, \theta \in [0, \pi]$ ，该变换使 $f_N(k(\theta))$ 成为关于 θ 的周期函数。然后令 $f_N(k(\theta))$ 在 $[0, 2\pi]$ 进行均匀采样，即计算：

$$f_j = f_N\left(\frac{k\pi j}{M}\right), j = 1, 2, \dots, 2M.$$

由于 $f_N(k(\theta))$ 是一个关于 θ 的周期解析函数，因此利用截断 Fourier 级数对其进行逼近：

$$f_N(k(\theta)) \approx \sum_{i=-M}^M c_i e^{i\theta}, \tag{6}$$

其中， c_i 是 Fourier 级数的系数，对应数值可通过采样序列 $f_j (j = 1, 2, \dots, 2M)$ 结合快速 Fourier 变换 FFT 得到。值得注意的是，截断数 M 为区间 $[0, 2\pi]$ 采样点数 $2M$ 的一半。为使截断傅里叶级数足够精确地逼近 f_N ，需通过逐次倍增 M 的方式迭代计算，直至满足收敛条 $|c_M/c_0| \leq \varepsilon$ ；其中， ε 为预设的傅里叶系数衰减的相对容差。令 $z = e^{i\theta}$ ，将其代入(6)，两边乘以 z^M 得到如下关于 z 的 Laurent 级数： $q(z) = z^M \sum_{i=-M}^M c_i z^i$ 。该级数是一个 $2M$ 次的泰勒级数，且其非零根与原函数(6)的非零根完全一致。将多项式系数 $\{c_{-M}, \dots, c_{M-1}\}$ 代入对应的友矩阵[23]，并通过求解友矩阵的特征值 $\hat{\lambda}$ 得到多项式 $q(z)$ 的根。最后我们设定一个参数 ϵ ，仅保留与单位圆距离在 ϵ 范围内的特征值 \hat{k} （在数值实验中，设定 $\epsilon = 10^{-6}$ ），并通过公式 $k = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \text{Re}(\hat{\lambda})$ 将其转换为原问题的特征频率。

4. 数值结果

本节通过两个数值实例验证了所提出数值方法和虚假特征频率识别策略的有效性。在数值验证中，利用相对误差 $E_r = |k^\epsilon - k^n|/k^\epsilon$ ，评估数值解的精度，这里 k^ϵ 和 k^n 分别是某一特征频率的半解析解/有限元考解和数值解。此外，还探讨了边界积分方程离散矩阵条件数与特征频率之间的关系。

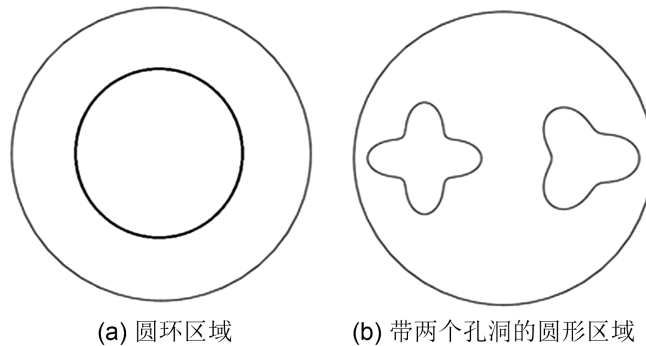


Figure 2. Two multiply connected domains
图 2. 两个多连通区域

4.1. 圆环

在本节中，我们考虑环形板对应的圆环区域： $\Omega = \Omega_1 \setminus \Omega_2$ ，其中外圆区域 Ω_1 的半径 $R_1 = 1 \text{ m}$ ，内圆孔区域 Ω_2 的半径 $R_2 = 0.5 \text{ m}$ ，其边界分别为 Γ_1 和 Γ_2 ，如图 2(a)所示。该特征值问题的半解析解能够在文

献[4]中找到。首先, 针对多连通区域的多层势边界积分方程, 本小节研究了避免虚假特征频率策略的有效性。在数值实验中, 在边界 Γ_1 和 Γ_2 上分别布置 128 和 64 个离散点, 并利用 Boyd 求根方法在区间[5,14]上得到了给定圆环区域的全部特征频率, 包括真实和虚假特征频率。由于这些特征频率中存在虚假特征频率, 本节采用 2.2 节中的策略, 对其中的虚假特征频率进行识别。具体来说, 我们首先针对具有夹紧边界条件的圆形孔洞的双调和波外散射问题, 构建了基于多层势的边界积分方程。该方程为多连通区域中内边界 Γ_{int} 对应的边界积分方程, 具体表达式为:

$$D\varphi + \mathcal{K}\varphi = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{int},$$

其中, D 是跳跃矩阵; $\mathcal{K}\varphi = \int_{\Gamma} \mathbf{K}\varphi d\Gamma$, 并且 $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \Phi_{n_y n_y n_y} + 3\Phi_{n_y \tau_y \tau_y} & -\Phi_{n_y n_y} + \Phi_{\tau_y \tau_y} \\ \Phi_{n_x n_y n_y} + 3\Phi_{n_x n_y \tau_y} & -\Phi_{n_x n_y n_y} + \Phi_{n_x \tau_y \tau_y} \end{pmatrix}$, $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1(\mathbf{x}) \\ \varphi_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ 。

然后, 利用第 3 节的离散方案和 Boyd 求根方法求解该边界积分方程的特征频率(即虚假特征频率)。最后, 通过对所有特征频率进行筛选与区分, 即可得到区间[5,14]内的真实特征频率, 其与虚假特征频率的具体数值详见表 1。接下来, 我们研究了 Boyd 求根方法在求解圆环区域特征频率时的精度与效率, 并与基于 SVD 方法及 FEM 进行了对比。在数值实验中, 利用 Boyd 方法与基于 SVD 的方法在边界上分别采用 128、160、192、256、320 和 360 个边界离散点; 而有限元法则在保持边界节点数相同的条件下生成三角网格, 对应的总网格节点数分别为 624、880、1134、2104、3344 和 4140。本文选取圆环区域的前 20 个特征值作为研究对象, 统计并对比了各方法计算这 20 个特征频率的平均相对误差与总运行时间。表 2 展示了在不同边界离散点数 N 下, Boyd 方法与基于 SVD 的方法, 以及在对应总网格节点数 N 下 FEM 的平均相对误差和计算时间。由表可得, 计算精度方面, Boyd 方法显著优于基于 SVD 的方法与 FEM, 表现为三者最优。计算效率方面, 粗网格下 FEM 耗时最短, 但随着网格密度增加, 其计算时间急剧增长, 且最小计算误差仅为 10^{-5} 量级; 相比之下, 基于 SVD 的方法与 Boyd 方法的时间增幅相对平缓, 其中 SVD 方法耗时更短, 但二者精度均显著高于 FEM, Boyd 方法的精度优势尤为突出。综合精度与耗时的综合性能, Boyd 方法的计算效率仍为最优方法。上述结果表明, 在多连通区域的特征频率求解中, Boyd 方法可在控制计算时间增长的同时, 实现对半解析解的高精度逼近, 充分体现了其在高精度计算场景下的卓越性能。

Table 1. Real eigenfrequencies k and spurious eigenfrequencies \tilde{k} of the annular domain in the interval [5,14] obtained by the Boyd root-finding method based on the spurious eigenfrequency identification strategy

表 1. 利用基于虚假特征频率识别策略的 Boyd 求根方法获得的圆环区域在区间[5,14]中的真实特征频率 k 和虚假特征频率 \tilde{k}

频率区间	真实特征频率 k	虚假特征频率 \tilde{k}
[5,10]	9.447、9.499、9.660	5.401、7.836、8.517
[10,12]	10.371、10.941、11.645	10.093、11.811
[12,14]	12.463、13.372	12.020、12.272

Table 2. Comparison of average relative errors and computational times for solving the first 20 eigenfrequencies via the Boyd method, SVD-based method, and FEM in the annular domain

表 2. 圆环区域内, Boyd 方法、基于 SVD 的方法与 FEM 求解前 20 个特征频率的平均相对误差及计算时间对比

N	Boyd method		SVD-based method		\tilde{N}	FEM	
	Error	Time (s)	Error	Time (s)		Error	Time (s)
128	6.456e-09	106	6.594e-04	110	624	9.162e-03	2
160	4.658e-10	136	7.914e-05	124	880	3.275e-03	10

续表

192	8.354e-11	179	1.553e-06	140	1134	9.945e-04	69
256	4.224e-11	201	4.229e-07	158	2104	1.829e-04	322
320	5.713e-12	216	8.239e-08	178	3344	8.233e-05	387
360	1.047e-13	263	1.015e-08	252	4140	3.064e-05	485

注：此处误差指相对误差。 \tilde{N} 表示有限元网格中的节点数。

接下来，我们继续探讨多连通区域上边界积分方程离散矩阵的条件数与特征频率的关联。研究表明，多连通区域的虚假特征频率，与采用相同层势的多连通孔洞的外散射问题的边界积分方程的“特征频率”相关。图 3 同时展示了多连通区域上边界积分方程和相应孔洞外散射问题边界积分方程的离散矩阵条件数随频率变化的曲线，以及结合 Boyd 求根方法得到的特征频率。从图中可见，条件数曲线的尖峰与数值方法求得特征频率相吻合；同时，在蓝色曲线尖峰中排除绿色曲线尖峰的位置外，剩余的尖峰位置与真实特征频率一致。这也进一步表明基于相应外散射问题的识别虚假特征频率的策略的有效性。因此，针对多连通区域，可借助以下两类条件数对真实特征频率进行大致区间定位：一类是原始特征值问题的边界积分方程的离散矩阵，另一类是各孔洞外散射问题边界积分方程的离散矩阵。这两类离散矩阵的条件数变化峰值分别对应全部特征频率和虚假特征频率。再结合 Boyd 求根方法实现特征频率的高精度计算。

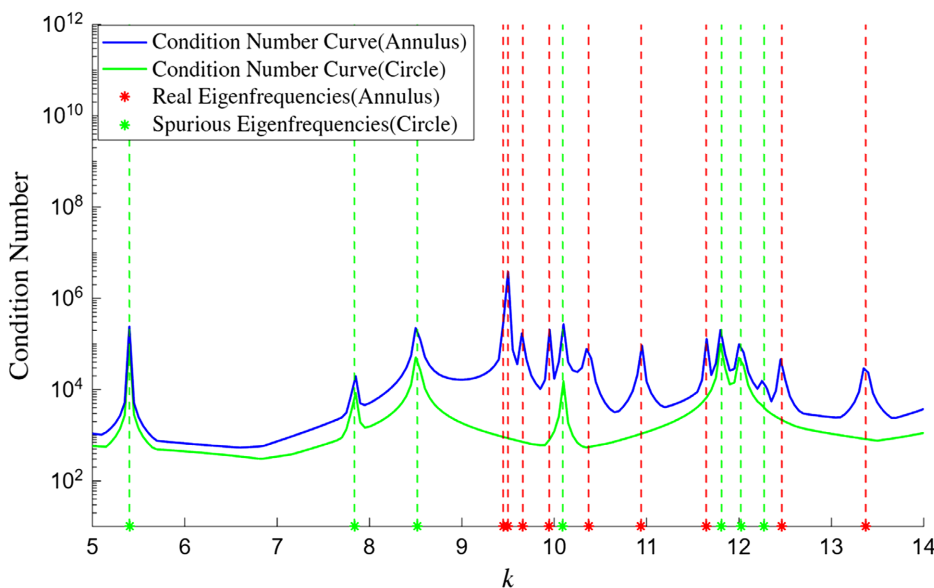


Figure 3. Variation curves of the condition numbers for the discrete matrices of the multi-layer potential BIEs for the annular domain and the exterior scattering domain with a circular hole versus the frequency $k \in [5, 14]$. The red and green asterisks mark the real and spurious eigenfrequencies of the annular domain, respectively

图 3. 频率 $k \in [5, 14]$ 范围内，圆环区域与圆形孔洞外散射区域的多层势边界积分方程离散矩阵的条件数变化曲线。红色和绿色星标分别标记圆环区域的真实与虚假特征频率位置

4.2. 带两个孔洞的圆盘区域

本节考虑一个含三叶草与四叶草形孔洞的圆形区域，如图 2(b)所示。其边界可由以下参数化形式精确描述：

$$\Gamma_1 = (x_1(t), y_1(t)) = (\cos t, \sin t),$$

$$\Gamma_i = S \times (x_i(t), y_i(t)) = (x_i + (1 + M \cos(n_i t)) \cos(t), y_i + (1 + M \cos(n_i t)) \sin(t)), i = 2, 3, t \in [0, 2\pi),$$

其中, Γ_1 对应单位圆盘区域; 针对三叶草边界 Γ_2 和四叶草边界 Γ_3 , 取振幅参数 $M = 0.3$, 比例参数为 $S = 0.3$, 且它们的位置参数 (x_i, y_i) 和叶数参数 n_i 分别为 $(x_2, y_2, n_2) = (1.8, 0, 3)$ 和 $(x_3, y_3, n_3) = (-1.8, 0, 4)$ 。我们在边界 Γ_1 、 Γ_2 和 Γ_3 上分别布置 320 个、160 个和 64 个离散点。首先, 我们根据 Boyd 求根方法和 2.2 节中的避免虚假特征频率的技术获得含三叶草与四叶草孔洞的圆形区域上的真实特征频率和虚假特征频率, 这里用 $\tilde{k}^{(t)}$ 和 $\tilde{k}^{(f)}$ 分别表示三叶草和四叶草区域上对应的虚假特征频率, 如表 3 所示。然后, 我们研究了边界积分方程离散矩阵条件数和特征频率间关系, 验证了条件数曲线尖峰与真实特征频率和虚假特征频率的对应关系。图 4 展示了该区域上的矩阵条件数随频率 k 的变化, 并分别采用品红色、绿色和黑色虚线表示真实特征频率、基于三叶草和四叶草的虚假特征频率。这再次表明, 条件数曲线的尖峰位置覆盖由 Boyd 求根方法得到的所有特征频率, 包括真实特征频率和由所有孔洞形成的虚假特征频率。

Table 3. Real eigenfrequencies k and spurious eigenfrequencies $\tilde{k}^{(t)}$ and $\tilde{k}^{(f)}$ generated by two types of domains in the interval [6,12] for the circular domain with two holes, obtained by the Boyd root-finding method based on the spurious eigenfrequency identification strategy

表 3. 利用基于虚假特征频率识别策略的 Boyd 求根方法获得的双孔洞圆形区域在区间[6,12]中的真实特征频率 k 和两种区域产生的虚假特征频率 $\tilde{k}^{(t)}$ 和 $\tilde{k}^{(f)}$

频率区间	k (真实特征频率)	$\tilde{k}^{(t)}$ (三叶草孔洞)	$\tilde{k}^{(f)}$ (四叶草孔洞)
[6,9]	6.407、8.517	8.826	7.495
[9,12]	9.079、9.125、10.279、11.541、11.702	10.758	9.886、10.181、11.929

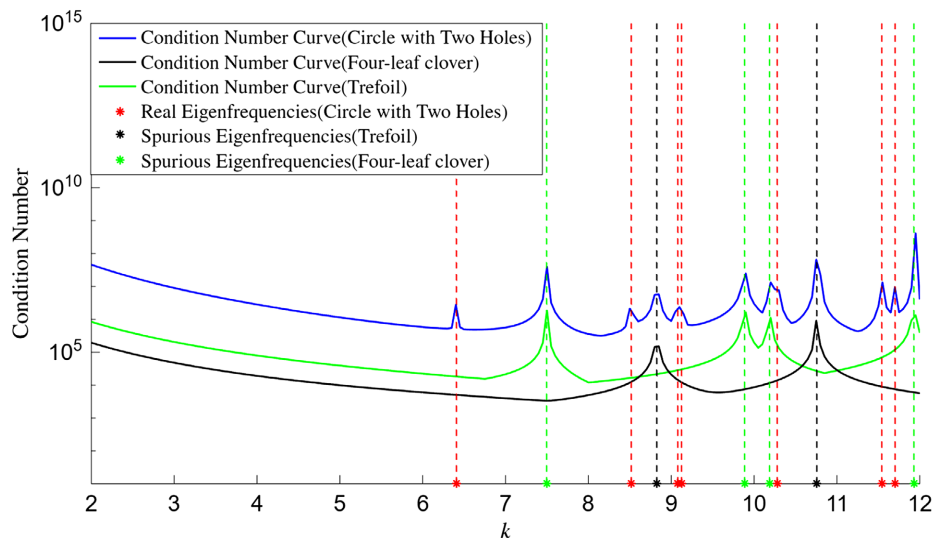


Figure 4. Variation curves of the condition number for the discretized matrices of the multi-layer potential BIEs for the circular domain with two holes, the exterior scattering domain to the trefoil domain, and the exterior scattering domain to the quatrefoil domain within the frequency range $k \in [2, 12]$. The red and black/green asterisks denote the positions of the real and spurious eigenfrequencies of the circular domain with two holes, respectively

图 4. 频率 $k \in [2, 12]$ 范围内, 含双孔洞的圆形区域、三叶草外散射区域和四叶草外散射区域的多层势边界积分方程离散矩阵的条件数变化曲线。红色和黑色/绿色星标分别表示含双孔洞的圆形区域的真实与虚假特征频率位置

5. 结论

本文针对薄板振动特征值问题, 提出一种基于多层势 BIE 离散矩阵的 Boyd 求根方法。数值实验表明, 与基于 SVD 的求根方法及 FEM 相比, Boyd 方法在求解多连通域特征频率时, 精度与效率均得到显著提升。同时发现, 边界积分方程离散矩阵的条件数与特征频率分布密切相关, 可利用这一规律快速定位特征频率区间, 降低 Boyd 方法的求根时间消耗。此外, 通过构建与多连通域具有相同固支边界孔洞的散射问题边界积分方程, 并分析其特征频率, 可有效识别多连通域中的虚假特征频率。未来, 该工作可推广至自由边界、简支边界及其他多层势组合的边界积分方程系统, 用于识别复杂多连通区域的虚假特征频率。

基金项目

本研究由山西省基础研究计划(面上项目)资助(项目编号: 202303021211025)。

参考文献

- [1] Zhang, J., Gao, P., Diao, X., Ullah, S., Qi, W., Almujiyah, H., *et al.* (2025) Analytical Free Vibration Solution of Orthotropic Thin Plates with Three Edges Rotationally Restrained and One Edge Free. *Acta Mechanica*, **236**, 1673-1695. <https://doi.org/10.1007/s00707-025-04237-5>
- [2] Wu, C., Watanabe, E. and Utsunomiya, T. (1995) An Eigenfunction Expansion-Matching Method for Analyzing the Wave-Induced Responses of an Elastic Floating Plate. *Applied Ocean Research*, **17**, 301-310. [https://doi.org/10.1016/0141-1187\(95\)00023-2](https://doi.org/10.1016/0141-1187(95)00023-2)
- [3] Xiong, Y. (2021) Vibroacoustics of Lightweight Structures with Embedded Acoustic Black Holes. PhD Thesis, Pennsylvania State University.
- [4] Kang, D. and Kao, C. (2017) Minimization of Inhomogeneous Biharmonic Eigenvalue Problems. *Applied Mathematical Modelling*, **51**, 587-604. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.07.015>
- [5] Mora, D. and Rodríguez, R. (2009) A Piecewise Linear Finite Element Method for the Buckling and the Vibration Problems of Thin Plates. *Mathematics of Computation*, **78**, 1891-1917. <https://doi.org/10.1090/s0025-5718-09-02228-5>
- [6] Cui, X.Y., Liu, G.R., Li, G.Y. and Zhang, G.Y. (2011) A Thin Plate Formulation without Rotation DOFs Based on the Radial Point Interpolation Method and Triangular Cells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **85**, 958-986. <https://doi.org/10.1002/nme.3000>
- [7] Antunes, P.R.S. (2011) On the Buckling Eigenvalue Problem. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **44**, Article 215205. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/21/215205>
- [8] Betcke, T. and Trefethen, L.N. (2005) Reviving the Method of Particular Solutions. *SIAM Review*, **47**, 469-491. <https://doi.org/10.1137/s0036144503437336>
- [9] Betcke, T. (2008) The Generalized Singular Value Decomposition and the Method of Particular Solutions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **30**, 1278-1295. <https://doi.org/10.1137/060651057>
- [10] Bremer, J., Gimbutas, Z. and Rokhlin, V. (2010) A Nonlinear Optimization Procedure for Generalized Gaussian Quadratures. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **32**, 1761-1788. <https://doi.org/10.1137/080737046>
- [11] Chen, J.T., Liu, L.W. and Hong, H.K. (2003) Spurious and True Eigensolutions of Helmholtz BIEs and BEMs for a Multiply Connected Problem. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **459**, 1891-1924. <https://doi.org/10.1098/rspa.2002.1084>
- [12] Zhao, L. and Barnett, A. (2015) Robust and Efficient Solution of the Drum Problem via Nyström Approximation of the Fredholm Determinant. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **53**, 1984-2007. <https://doi.org/10.1137/140973992>
- [13] Boyd, J.P. (2002) Computing Zeros on a Real Interval through Chebyshev Expansion and Polynomial Rootfinding. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **40**, 1666-1682. <https://doi.org/10.1137/s0036142901398325>
- [14] Lee, W.M. and Chen, J.T. (2009) Free Vibration Analysis of a Circular Plate with Multiple Circular Holes by Using the Addition Theorem and Direct Biem. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, **49**, 303-315. <https://doi.org/10.2495/be090271>
- [15] Chen, J.T., Lin, S.Y., Chen, I.L. and Lee, Y.T. (2010) Mathematical Analysis and Numerical Study to Free Vibrations of Annular Plates Using BIEM and BEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **65**, 236-263. <https://doi.org/10.1002/nme.1498>

-
- [16] Lindsay, A.E., Quaipe, B. and Wendelberger, L. (2018) A Boundary Integral Equation Method for Mode Elimination and Vibration Confinement in Thin Plates with Clamped Points. *Advances in Computational Mathematics*, **44**, 1249-1273. <https://doi.org/10.1007/s10444-017-9580-6>
- [17] Zheng, W., Yue, J., Niu, R. and Li, S. (2025) Spurious Eigenfrequencies of Coupled Boundary Integral Equation Systems for Biharmonic Wave Scattering Problems with Clamped Obstacles. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **179**, Article 106423. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2025.106423>
- [18] Farkas, P. (1989) Mathematical Foundations for Fast Methods for the Biharmonic Equation. PhD Thesis, The University of Chicago.
- [19] Nekrasov, P., Su, Z., Askham, T. and Hoskins, J.G. (2025) Boundary Integral Formulations for Flexural Wave Scattering in Thin Plates. *Journal of Computational Physics*, **542**, Article 114355. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2025.114355>
- [20] Kress, R. (2014) Linear Integral Equations. 3rd Edition, Springer.
- [21] Milovanović, G.V., Igić, T.S. and Turnić, D. (2015) Generalized Quadrature Rules of Gaussian Type for Numerical Evaluation of Singular Integrals. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **278**, 306-325. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.10.009>
- [22] Askham, T. and Rachh, M. (2020) A Boundary Integral Equation Approach to Computing Eigenvalues of the Stokes Operator. *Advances in Computational Mathematics*, **46**, Article No. 20. <https://doi.org/10.1007/s10444-020-09774-2>
- [23] Edelman, A. and Murakami, H. (1995) Polynomial Roots from Companion Matrix Eigenvalues. *Mathematics of Computation*, **64**, 763-776. <https://doi.org/10.1090/s0025-5718-1995-1262279-2>