

基于 l_p 正则化双层Tucker秩的张量去噪算法研究

姜 莹¹, 付亚茹^{1,2*}

¹太原师范学院数学与统计学院, 山西 晋中

²太原师范学院山西省智能优化计算与区块链技术重点实验室, 山西 晋中

收稿日期: 2026年4月21日; 录用日期: 2026年5月15日; 发布日期: 2026年5月27日

摘要

本文研究一种基于 l_p 正则化与双层Tucker秩的张量去噪模型的高效求解算法。在一定参数条件下, 模型可通过模态奇异值分解实现对张量低秩结构的精准刻画。本文重点聚焦模型的算法设计与数值实验验证, 采用交替方向乘子法(ADMM)构建算法。在随机张量、带噪彩色图像以及结构性缺失彩色图像补全任务上的数值实验结果表明, 本文所提方法与其他方法相比, 具有更高的补全精度、更清晰的视觉恢复效果, 验证了该模型在张量补全任务中的有效性与实用性。

关键词

张量去噪, 奇异值分解, Tucker秩, ADMM

Tensor Denoising Algorithm Based on l_p Regularized Two-Layer Tucker Rank

Xuan Jiang¹, Yaru Fu^{1,2*}

¹School of Mathematics and Statistics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi

²Shanxi Key Laboratory of Intelligent Optimization Computing and Blockchain Technology, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi

Received: April 21, 2026; accepted: May 15, 2026; published: May 27, 2026

Abstract

This paper investigates an efficient algorithm for a tensor denoising model based on l_p regularization

*通讯作者。

and the two-layer Tucker rank. Under some certain parameter conditions, the model can accurately characterize the low-rank structure of tensors via modal singular value decomposition. This work focuses on algorithm design and numerical experimental validation, constructing an algorithm using the Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM). Numerical experiments on random tensors, noisy color images, and structurally missing color image completion tasks demonstrate that the proposed method achieves higher completion accuracy, clearer visual recovery results compared with other methods, verifying the effectiveness and practicality of the model in tensor completion tasks.

Keywords

Tensor Denoising, Singular Value Decomposition, Tucker Rank, ADMM

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着科学技术的飞速发展, 人们在生产生活中获取的数据维度越来越高、结构越来越复杂。例如, 彩色图像可表示为三维张量, 彩色视频可表示为四维张量, 这些多维数据天然具备高阶结构特征。作为向量与矩阵的高阶推广, 张量能够自然地保留多维数据的空间结构信息[1] [2], 精准刻画不同维度之间的内在关联, 因此在图像恢复[3] [4]、机器学习[5]、信号处理[6]、计算机视觉[7]等领域得到了广泛关注与应用。在实际应用中, 大量观测到的张量数据往往具有内在的低秩性。因此, 基于张量框架的低秩优化方法, 尤其是张量去噪技术, 具有重要的理论研究价值与实际应用前景。张量去噪[8]作为张量恢复领域的核心课题之一, 其核心目标是从存在元素缺失的观测张量中, 恢复出完整的低秩张量结构。其标准的数学模型可表述为如下秩极小化问题

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{X}} \quad & \text{rank}(\mathcal{X}) \\ \text{s.t.} \quad & P_{\Omega}(\mathcal{X}) = P_{\Omega}(\mathcal{T}), \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\mathcal{T}, \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ 是 N 阶张量, 分别表示带缺失值的观测张量和待恢复的完整张量, $\Omega = \{(i_1, i_2, \dots, i_n) | i_j \in \{1, 2, \dots, N\}\}$ 为已知元素的索引集合, $P_{\Omega}(\cdot)$ 是作用于集合 Ω 上的正交投影算子, 仅保留观测位置的元素值, 确保去噪结果与已知观测数据一致。

与矩阵秩的定义不同, 张量秩的刻画方式更为复杂, 目前张量秩可以用多种形式表示, 如 CANDECOMP/PARAFAC (CP)秩[9], Tucker 秩[10], 张量链(Tensor Train, 简称 TT)秩[11], 张量环(Tensor Ring, 简称 TR)秩[12]等等。其中, Tucker 秩凭借其和高阶奇异值分解的天然适配性, 成为张量去噪任务中应用最广泛的秩度量方式。然而, 模型(1)中的秩函数具有非凸、不连续的特性, 其求解属于 NP-难问题, 无法直接高效求解。因此, 在实际应用中, 通常采用核范数作为秩函数的凸松弛, 将原问题转化为如下可求解的凸优化模型[2] [13]-[16]:

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{X}} \quad & \sum_{i=1}^N \alpha_i \|\mathcal{X}_{(i)}\|_* \\ \text{s.t.} \quad & P_{\Omega}(\mathcal{X}) = P_{\Omega}(\mathcal{T}), \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $\alpha_i \geq 0$ 且 $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$, $\mathcal{X}_{(i)} \in \mathbb{R}^{I_i \times \prod_{j \neq i} I_j}$ 表示张量 \mathcal{X} 的模 i 展开, $\|\mathcal{X}_{(i)}\|_*$ 是 $\mathcal{X}_{(i)}$ 的核范数(即奇异值之和)。

模型(2)虽然为张量去噪提供了可行的方法,但仍存在一些局限:核范数对所有奇异值施加均匀惩罚,无法区分不同奇异值对低秩结构的贡献,易导致对真实核函数的过松弛与低秩结构的过估计,进而降低恢复精度;其次该模型需对张量的全部模态展开矩阵执行奇异值分解,计算复杂度随张量维度与模态数的增加而增加,难以适配大规模高维张量数据的处理需求。

文献[17]针对含噪张量恢复问题(张量鲁棒主成分分析任务),提出了非凸张量鲁棒主成分分析(NTRPCA)模型,其完整形式如下:

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{L}, \mathcal{E}} \quad & \Phi_1(\mathcal{L}) + \lambda \Phi_2(\mathcal{E}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathcal{X} = \mathcal{L} + \mathcal{E}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中低秩正则项定义为 $\Phi_1(\mathcal{L}) := \sum_{i=1}^{\min\{I_n, K_n\}} f(\sigma_i(\mathcal{L}_{(n)}))$, 下标 n 由核范数最大或最小准则确定, 即 $n = \arg \max_{1 \leq n \leq N} \{\|\mathcal{L}_{(n)}\|_*\}$ 或 $n = \arg \min_{1 \leq n \leq N} \{\|\mathcal{L}_{(n)}\|_*\}$, 稀疏惩罚项为 $\Phi_2(\mathcal{E}) := \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \cdots \sum_{i_N=1}^{I_N} f(|\mathcal{E}_{i_1 i_2 \cdots i_N}|)$ 式中, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ 为满足特定假设的非凸惩罚函数, 且 Φ_1 与 Φ_2 中可采用相同或不同的 $f(\cdot)$ 。该模型通过选取单一最优模态并施加非凸惩罚, 有效缓解了传统核范数的过度惩罚问题, 同时大幅降低了计算开销。但其研究场景局限于完整含噪张量的恢复, 与本文所研究的缺失数据张量去噪问题并无直接关联, 仅其非凸优化思想与单模态约束策略具有重要借鉴价值。鉴于 l_p 范数 ($0 < p < 1$) 在相关数值实验中表现最优, 本文借鉴文献[17]的非凸正则化框架与模态选择策略, 将 l_p 非凸正则引入张量去噪任务, 构建基于 l_p 正则与双层 Tucker 秩的低秩张量去噪模型:

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{L}, \mathcal{E}} \quad & \Phi_1(\mathcal{L}) + \lambda \Phi_2(\mathcal{E}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{X}) = \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{L} + \mathcal{E}), \end{aligned} \quad (4)$$

该模型以 l_p 范数作为非凸惩罚函数(即取 $f(t) = t^p$), 既继承了单模态约束的高效性, 又通过非凸逼近更精准地刻画张量低秩结构, 有效弥补了传统凸松弛模型的精度缺陷。

本文其余部分组织如下: 在第 2 节介绍一些关于张量去噪的预备知识; 在第 3 节提出基于交替方向乘法(Alternating Direction Method of Multipliers, 简称 ADMM)求解(4)优化问题的新算法; 在第 4 节中, 给出数值实验结果, 验证新模型算法的有效性; 第 5 节对全文进行总结。

2. 预备知识

本文中, \mathbb{R} 表示实数集, \mathbb{R}^I 为 I 维实列向量空间, $\mathbb{R}^{I_1 \times I_2}$ 为 $I_1 \times I_2$ 实矩阵空间。小写字母 x 、粗体小写字母 \mathbf{x} 、大写字母 X 、花体字母 \mathcal{X} 分别表示标量、向量、矩阵与张量。对正整数 n , 记 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, $\lceil \cdot \rceil$ 为上取整函数。

矩阵的核范数定义为 $\|X\|_* = \sum_{i=1}^r \sigma_i(X)$ 。设 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N}$ 为 N 阶张量, 元素记为 $\mathcal{X}_{i_1 i_2 \cdots i_N}$, $1 \leq i_k \leq I_k$ 。张量沿第 k 模展开矩阵为 $\mathcal{X}_{(k)} = \text{unfold}_k(\mathcal{X}) \in \mathbb{R}^{I_k \times \prod_{j \neq k} I_j}$, 逆运算为张量合成 $\text{fold}_k(\mathcal{X}_{(k)}) = \mathcal{X}$ 。同阶张量 \mathcal{X} 与 \mathcal{Y} 的内积为 $\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_N} \mathcal{X}_{i_1 i_2 \cdots i_N} \mathcal{Y}_{i_1 i_2 \cdots i_N}$ 。张量的 Tucker 秩为各模展开矩阵秩构成的向量 $\text{rank}_T(\mathcal{X}) = (\text{rank}(\mathcal{X}_{(1)}), \text{rank}(\mathcal{X}_{(2)}), \dots, \text{rank}(\mathcal{X}_{(N)}))^T$ 。张量的 Frobenius 范数(简称 F 范数)定义为 $\|\mathcal{X}\|_F = \sqrt{\sum_{i_1, i_2, \dots, i_N} |\mathcal{X}_{i_1 i_2 \cdots i_N}|^2}$, 且对任意 $1 \leq k \leq N$, 满足 $\|\mathcal{X}\|_F = \|\mathcal{X}_{(k)}\|_F$ 。设 Ω 为指标集, $\bar{\Omega}$ 为其补集, 则投影算子 $P_\Omega(\cdot)$ 定义为

$$(P_\Omega(\mathcal{X}))_{i_1 i_2 \cdots i_N} = \begin{cases} \mathcal{X}_{i_1 i_2 \cdots i_N}, & (i_1, i_2, \dots, i_N) \in \Omega, \\ 0, & (i_1, i_2, \dots, i_N) \in \bar{\Omega}. \end{cases}$$

引理 1 (奇异值分解(SVD) [18]) 设 $X \in \mathbb{R}^{l_1 \times l_2}$ 是一个秩为 r 的矩阵, 存在矩阵 $U \in \mathbb{R}^{l_1 \times r}$ 和 $V \in \mathbb{R}^{l_2 \times r}$ 使得 $X = U\Sigma_r V^T$, 其中 $\Sigma_r = \text{diag}(\{\sigma_i\}_{1 \leq i \leq r})$ 是一个对角线矩阵, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, U, V 分别是左奇异矩阵, 右奇异矩阵。

引理 2 (奇异值阈值算子[19]) 对于秩为 r 的矩阵 $Y \in \mathbb{R}^{l_1 \times l_2}$, 存在奇异值分解 $Y = U\Sigma_r V^T$, 则 Y 的奇异值阈值算子为

$$D_\tau(Y) = UD_\tau(\Sigma)V^T, D_\tau(\Sigma) = \text{diag}(\max\{\sigma_i - \tau, 0\}),$$

其中 $\tau > 0$, 对于矩阵 $X \in \mathbb{R}^{l_1 \times l_2}$, 有

$$D_\tau(Y) = \arg \min_X \tau \|X\|_* + \frac{1}{2} \|X - Y\|_F^2.$$

3. 算法

在本节中, 我们用 ADMM 框架来解决问题(4)。为确定最优模态, 本文参考文献[17]的方法, 在算法迭代开始前一次性选定固定模态 n^* , 并在整个 ADMM 迭代过程中保持不变。具体做法为, 对观测张量 \mathcal{X} 在所有模态上的展开矩阵计算核范数, 并通过低秩逼近的 PSNR 指标评价各模态的重构性能, 最终选择性能最优的模态作为 n^* 。后续低秩项 \mathcal{L} 的更新操作均仅基于该固定模态 n^* 完成。此时, 低秩正则项定义为 $\Phi_1(\mathcal{L}) = \|\mathcal{L}_{(n^*)}\|_*$, 其中 $\mathcal{L}_{(n^*)}$ 表示 \mathcal{L} 在模态 n^* 上的展开矩阵。为了解决凸优化问题(4), 引入新的张量 \mathcal{W} , 使得 $\mathcal{W} = \mathcal{L} + \mathcal{E}$, 则模型(4)等价于:

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{L}, \mathcal{E}} \quad & \Phi_1(\mathcal{L}) + \lambda \Phi_2(\mathcal{E}) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \mathcal{W} = \mathcal{L} + \mathcal{E} \\ \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{W}) = \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{X}) \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

\mathcal{T} 为线性等式约束 $\mathcal{W} = \mathcal{L} + \mathcal{E}$ 对应的拉格朗日乘子, 下面给出了(5)的增广拉格朗日函数优化模型:

$$\begin{aligned} L(\mathcal{L}, \mathcal{E}, \mathcal{W}, \mathcal{T}, \eta) = & \Phi_1(\mathcal{L}) + \lambda \Phi_2(\mathcal{E}) + \langle \mathcal{T}, \mathcal{L} + \mathcal{E} - \mathcal{W} \rangle + \frac{\eta}{2} \|\mathcal{L} + \mathcal{E} - \mathcal{W}\|_F^2, \\ \text{s.t.} \quad & \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{W}) = \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{X}), \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $\eta > 0$ 是一个惩罚参数。交替方向乘子法(ADMM)的迭代格式如下:

$$\begin{cases} \mathcal{E}^{k+1} = \arg \min_{\mathcal{E}} \left\{ \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{L}^k, \mathcal{W}^k, \mathcal{T}^k, \eta^k) \right\}, \\ \mathcal{L}^{k+1} = \arg \min_{\mathcal{L}} \left\{ \mathcal{L}(\mathcal{E}^{k+1}, \mathcal{L}, \mathcal{W}^k, \mathcal{T}^k, \eta^k) \right\}, \\ \mathcal{W}^{k+1} = \arg \min_{\mathcal{W}} \left\{ \mathcal{L}(\mathcal{E}^{k+1}, \mathcal{L}^{k+1}, \mathcal{W}, \mathcal{T}^k, \eta^k) \right\}, \\ \mathcal{T}^{k+1} = \mathcal{T}^k + \eta^k (\mathcal{L}^{k+1} + \mathcal{E}^{k+1} - \mathcal{W}^{k+1}), \\ \eta^{k+1} = \rho \eta^k, \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\rho > 1$, k 表示迭代次数。

下面分析各个子问题, 首先计算 \mathcal{E}^{k+1} 如下:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{k+1} &= \arg \min_{\mathcal{E}} \left\{ \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{L}^k, \mathcal{W}^k, \mathcal{T}^k, \eta^k) \right\} \\ &= \arg \min_{\mathcal{E}} \lambda \Phi_2(\mathcal{E}) + \langle \mathcal{T}^k, \mathcal{E} \rangle + \frac{\eta^k}{2} \|\mathcal{L}^k + \mathcal{E} - \mathcal{W}^k\|_F^2 \\ &= \arg \min_{\mathcal{E}} \lambda \Phi_2(\mathcal{E}) + \frac{\eta^k}{2} \left\| \mathcal{L}^k + \mathcal{E} - \mathcal{W}^k + \frac{\mathcal{T}^k}{\eta^k} \right\|_F^2, \end{aligned} \quad (8)$$

通过计算得到问题的最优解如下:

$$(\mathcal{E}^{k+1})_{i_2 \cdots i_N} = \text{prox}_{\frac{\lambda}{\eta^k} f} \left(\left(\mathcal{W}^k - \mathcal{L}^k - \frac{\mathcal{T}^k}{\eta^k} \right)_{i_2 \cdots i_N} \right), \forall i_n \in [I_n], n \in [N].$$

下面求解低秩项 \mathcal{L} 对应的子问题, 原始优化问题为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{k+1} &= \arg \min_{\mathcal{L}} \left\{ \mathcal{L}(\mathcal{E}^{k+1}, \mathcal{L}, \mathcal{W}^k, \mathcal{T}^k, \eta^k) \right\} \\ &= \arg \min_{\mathcal{L}} \Phi_1(\mathcal{L}) + \langle \mathcal{T}^k, \mathcal{L} \rangle + \frac{\eta^k}{2} \|\mathcal{L} + \mathcal{E}^{k+1} - \mathcal{W}^k\|_F^2 \\ &= \arg \min_{\mathcal{L}} \Phi_1(\mathcal{L}) + \frac{\eta^k}{2} \left\| \mathcal{L} + \mathcal{E}^{k+1} - \mathcal{W}^k + \frac{\mathcal{T}^k}{\eta^k} \right\|_F^2, \end{aligned} \quad (9)$$

其中低秩项的正则化函数定义为

$$\Phi_1(\mathcal{L}) = \sum_i f(\sigma_i(\mathcal{L}_{(n)})),$$

这里 $\mathcal{L}_{(n)}$ 表示张量 \mathcal{L} 。由于 $\Phi_1(\mathcal{L}) = \|\mathcal{L}_{(n)}\|_*$ 仅与预先选定的固定模态 n^* 有关, 该张量优化问题可降阶为矩阵优化问题。求解步骤如下:

沿第 n 个模态的展开矩阵, σ_i 表示其奇异值, 模态 n 由所有展开矩阵的核范数取最大或最小确定。记

$$G^k = \mathcal{W}^k - \mathcal{E}^{k+1} - \frac{\mathcal{T}^k}{\eta^k},$$

则 \mathcal{L} 子问题可简化为

$$\mathcal{L}^{k+1} = \arg \min_{\mathcal{L}} \Phi_1(\mathcal{L}) + \frac{\eta^k}{2} \|\mathcal{L} - G^k\|_F^2,$$

将该问题转化为展开矩阵的形式, 令 $G = G_{(n)}^k, L = \mathcal{L}_{(n)}$, 则对应的矩阵优化问题为

$$L^* = \arg \min_L \sum_i f(\sigma_i(L)) + \frac{\eta^k}{2} \|L - G\|_F^2,$$

对 G 做奇异值分解 $G = USV^\top$, 其中 $S = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_r)$ 为奇异值构成的对角矩阵。根据矩阵低秩优化的性质, 最优解 L^* 具有相同的奇异向量, 即 $L^* = UDV^\top$, 其中 D 为待求的对角矩阵。将收缩后的奇异值重构为对角矩阵 D^* , 即可得到最优矩阵

$$L^* = UD^*V^\top,$$

最后将 L^* 沿第 n 个模态折叠回张量形式, 得到低秩张量的更新结果

$$\mathcal{L}^{k+1} = \text{fold}_n(L^*).$$

最后求解 \mathcal{W} 对应的子问题, 值得注意的是, 受约束条件 $\mathcal{P}_\Omega(\mathcal{W}) = \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{X})$ 的限制, \mathcal{W} 只在 $\bar{\Omega}$ 进行更新。该原始优化问题为:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{k+1} &= \arg \min_{\mathcal{W}} \left\{ \mathcal{L}(\mathcal{E}^{k+1}, \mathcal{L}^{k+1}, \mathcal{W}, \mathcal{T}^k, \eta^k) \right\} \\ &= \arg \min_{\mathcal{W}} -\langle \mathcal{T}^k, \mathcal{W} \rangle + \frac{\eta^k}{2} \|\mathcal{L}^{k+1} + \mathcal{E}^{k+1} - \mathcal{W}\|_F^2 \\ &= \arg \min_{\mathcal{W}} -\langle \mathcal{T}^k + \eta^k \mathcal{A}, \mathcal{W} \rangle + \frac{\eta^k}{2} \|\mathcal{W}\|_F^2, \end{aligned} \quad (10)$$

其中, $\mathcal{A} = \mathcal{L}^{k+1} + \mathcal{E}^{k+1}$ 对问题求梯度并令其为零, 即

$$-(\mathcal{T}^k + \eta^k \mathcal{A}) + \eta^k \mathcal{W} = 0,$$

可得

$$\mathcal{W} = \frac{\mathcal{T}^k}{\eta^k} + \mathcal{L}^{k+1} + \mathcal{E}^{k+1}.$$

下面给出求解模型(4)的具体步骤, 如算法 1 (基于单模态 L_p 正则化的张量去噪算法(Single-modal L_p Regularized Tensor Denoising, 简记 SM-Lp-RTD))所示。

算法1. 求解问题(4)的SM-Lp-RTD算法

Require: 观测张量 \mathcal{X} , Ω , $\lambda > 0$, $\rho = 1.1$, 非凸函数参数 p , 最大迭代次数 k_{\max} , 收敛阈值 $\epsilon > 0$

Ensure: 低秩张量 \mathcal{L} , 稀疏张量 \mathcal{E} , 恢复张量 \mathcal{W}

- 1: 模态选择预处理: 迭代前一次性选定最优模态 n^* , 迭代中保持固定. 对所有 $n \in [N]$, 计算 \mathcal{X} 的低秩近似 $\hat{\mathcal{X}}^{(n)}$
 - 2: $n_{\max} = \arg \max_{1 \leq n \leq N} \{\|\mathcal{X}_{(n)}\|_*\}$, $n_{\min} = \arg \min_{1 \leq n \leq N} \{\|\mathcal{X}_{(n)}\|_*\}$
 - 3: $n_{\text{index}} = \arg \max_{n \in [N]} \{\text{PSNR}(\mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}}^{(n)})\}$
 - 4: **if** $n_{\text{index}} = n_{\max}$ **then**
 - 5: function = max
 - 6: **else if** $n_{\text{index}} = n_{\min}$ **then**
 - 7: function = min
 - 8: **else**
 - 9: $[N] = [N] \setminus \{n_{\text{index}}\}$
 - 10: **end if**
 - 11: 初始化: $\mathcal{L}^0 = \mathcal{X}$, $\mathcal{E}^0 = \mathbf{0}$, $\mathcal{W}^0 = \mathcal{X}$, $\mathcal{T}^0 = \mathbf{0}$, $\eta^0 = 1.0$, $k = 0$
 - 12: **while** $k < k_{\max}$ 且 $\|\mathcal{W}^k - \mathcal{L}^k - \mathcal{E}^k\|_F > \epsilon$ **do**
 - 13: $\mathcal{E}^{k+1} = \arg \min_{\mathcal{E}} \lambda \Phi_2(\mathcal{E}) + \frac{\eta^k}{2} \|\mathcal{E} - (\mathcal{W}^k - \mathcal{L}^k + \frac{\mathcal{T}^k}{\eta^k})\|_F^2$
 - 14: 对所有 $n \in [N]$, 计算 $\mathcal{L}_{(n)}^k (\mathcal{L}_{(n)}^k)^\top$ 的特征分解
 - 15: $\mathcal{L}^{k+1} = \arg \min_{\mathcal{L}} \Phi_1(\mathcal{L}) + \frac{\eta^k}{2} \|\mathcal{L} - (\mathcal{W}^k - \mathcal{E}^{k+1} + \frac{\mathcal{T}^k}{\eta^k})\|_F^2$
 - 16: $\mathcal{W}^{k+1} = \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{X}) + \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{L}^{k+1} + \mathcal{E}^{k+1} + \frac{\mathcal{T}^k}{\eta^k})$
 - 17: $\mathcal{T}^{k+1} = \mathcal{T}^k + \eta^k (\mathcal{W}^{k+1} - \mathcal{L}^{k+1} - \mathcal{E}^{k+1})$
 - 18: $\eta^{k+1} = \rho \cdot \eta^k$
 - 19: $k = k + 1$
 - 20: **end while**
 - 21: **return** \mathcal{L}^{k+1} , \mathcal{E}^{k+1} , \mathcal{W}^{k+1}
-

算法 1 的收敛性分析参照求解非凸张量鲁棒主成分分析的收敛性证明框架, 例如[17], 本文不再详细介绍收敛性证明。

4. 数值实验

在本节中, 我们基于随机数据和真实图像, 将提出的算法与[14] [20] [21]中的现有算法 APGMINnew、APGMMIN、ADMTR 进行比较。所有实验都是在 Windows 11 和运行在惠普电脑上的 MATLAB R2024b

下进行的。实验中, $sr = m / \prod_{i=1}^N I_i$ 表示采样率, 其中 m 是观察到的张量的元素的个数。

4.1. 随机张量去噪

本小节通过随机生成的张量来比较四个优化模型的效果。随机张量是由该张量的 Tucker 分解生成的 $\mathcal{T} = \mathcal{G} \times_1 U_1 \times_2 U_2 \times_3 \cdots \times_N U_N$, 其中 $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N}$ 是核张量, $U_n \in \mathbb{R}^{I_n \times r_n}, n=1,2,\dots,N$ 是因子矩阵。用 $RSE = \frac{\|\mathcal{X} - \mathcal{T}\|_F}{\|\mathcal{T}\|_F}$ 表示误差公式, 其中 \mathcal{T} 和 \mathcal{X} 分别表示原始张量和算法输出的最优解。

数值实验中, 采样率分别设置为 $sr = 0.5, 0.6$, 结果如表 1、表 2 所示。模型初始参数设置如下: 惩罚参数 $\eta = 10^{-5}$, $\rho = 1.1$, 正则化参数 $\lambda = 0.006$, 迭代终止条件为相对误差小于 $tol = 10^{-5}$, 最大迭代次数 $Maxiter = 1000$, 非凸惩罚参数 $p = 0.6$ 。

Table 1. Comparison of four algorithms for random tensor denoising at $sr = 0.5$

表 1. $sr = 0.5$ 时, 四种随机张量填充算法的比较

大小	秩(r)	算法	迭代次数	CPU 时间(s)	RSE
(100 × 100 × 100)	(5,5,5)	SM-Lp-RTD	123	10.1477	1.186246e-08
		APGMINnew	40	3.1788	7.343193e-04
		APGMMIN	63	3.9504	5.170920e-05
		ADMTR	992	53.0962	9.038747e-05
(150 × 150 × 150)	(5,5,5)	SM-Lp-RTD	99	23.8741	1.797028e-08
		APGMINnew	36	9.0368	1.656126e-05
		APGMMIN	66	13.6945	1.715185e-05
		ADMTR	1000	345.2978	2.704654e-01
(150 × 150 × 150)	(2,3,4)	SM-Lp-RTD	96	23.1180	6.684840e-08
		APGMINnew	40	9.0939	5.699469e-04
		APGMMIN	62	11.1940	1.173635e-04
		ADMTR	347	117.9415	4.140416e-04
(200 × 200 × 200)	(2,2,2)	SM-Lp-RTD	102	56.6897	1.180983e-07
		APGMINnew	38	24.5163	7.764181e-04
		APGMMIN	61	31.5972	2.462394e-04
		ADMTR	182	149.8084	1.164558e-03

Table 2. Comparison of four models for random tensor denoising at $sr = 0.6$

表 2. $sr = 0.6$ 时, 四种随机张量填充算法的比较

大小	秩(r)	算法	迭代次数	CPU 时间(s)	RSE
(100 × 100 × 100)	(5,5,5)	SM-Lp-RTD	113	11.8406	7.768340e-09
		APGMINnew	64	3.3737	2.683157e-05
		APGMMIN	35	2.3223	5.483893e-05
		ADMTR	914	107.9114	8.571236e-05
(150 × 150 × 150)	(5,5,5)	SM-Lp-RTD	116	30.7980	1.908666e-08
		APGMINnew	36	8.1634	5.418197e-05
		APGMMIN	65	12.1937	2.326340e-05
		ADMTR	1000	332.4518	9.726167e-02

续表

(150 × 150 × 150)	(2,3,4)	SM-Lp-RTD	188	17.2051	1.737645e-06
		APGMINnew	36	11.7023	1.394742e-04
		APGMMIN	62	16.6478	6.614419e-05
		ADMTR	310	132.5614	4.035104e-04
(200 × 200 × 200)	(2,2,2)	SM-Lp-RTD	95	74.4045	4.597502e-07
		APGMINnew	36	27.9462	2.780153e-04
		APGMMIN	60	40.0388	2.312931e-04
		ADMTR	139	139.4088	1.366643e-03

从表中结果可以看出,在相同采样率下恢复同维度张量时,本文提出的 SM-Lp-RTD 算法展现出显著优势。在三种采样率下,虽然在时间和迭代次数上比 APGMINnew、APGMMIN 多,但误差比其他方法要更小,说明所提算法恢复精度优于对比方法,迭代收敛性好,且在迭代次数和时间上,SM-Lp-RTD 普遍低于 ADMTR 算法,说明算法能快速收敛到最优解。

4.2. 彩色图像恢复

本小节使用维数为 $512 \times 512 \times 3$ 的彩色图像“Sailboat”比较 SM-Lp-RTD 与 APGMINnew、APGMMIN、ADMTR 的恢复效果。彩色图像“Sailboat”的修复效果见图 1,在表 3 中用峰值信噪比(PSNR) [20],结构相似性指数(SSIM) [20]体现修复效果。

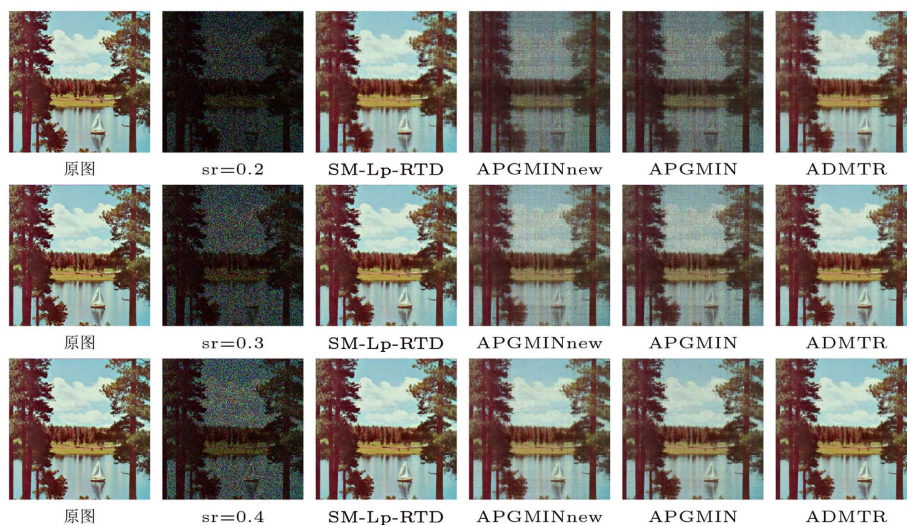


Figure 1. The restoration effect of the color “Sailboat” image

图 1. 彩色“Sailboat”图像的恢复效果

Table 3. Comparison of four models for color “Sailboat” image at different sampling rates

表 3. 四种模型对彩色图像“Sailboat”在不同采样率下的比较

算法	采样率	PSNR	SSIM
SM-Lp-RTD	$sr = 0.2$	22.28828	0.80985
APGMINnew		12.27071	0.34563
APGMMIN		11.56595	0.31169
ADMTR		21.96226	0.79703

续表

SM-Lp-RTD	$sr = 0.3$	24.32108	0.86364
APGMIN _{new}		17.28883	0.57255
APGMMIN		16.57127	0.54053
ADMTR		24.09423	0.86716
SM-Lp-RTD	$sr = 0.4$	25.83608	0.90031
APGMIN _{new}		22.17148	0.79254
APGMMIN		21.40521	0.75390
ADMTR		25.92258	0.91062

由表 3 与图 1 的图像恢复结果可见, 在不同采样率下, 本文提出的 SM-Lp-RTD 算法均能获得更高的 PSNR 与 SSIM 值, 恢复图像在清晰度与结构相似性上均明显优于 APGMIN_{new}、APGMMIN 两种算法, 与 ADMTR 算法性能接近且部分指标更优。

4.3. 结构性缺失下的彩色图像恢复

本小节使用维数为 $512 \times 512 \times 3$ 的彩色图像“Baboon”比较 SM-Lp-RTD 与 APGMIN_{new}、APGMMIN、ADMTR 的恢复效果。为展示其效果, 彩色图像“Baboon”的修复效果见图 2。

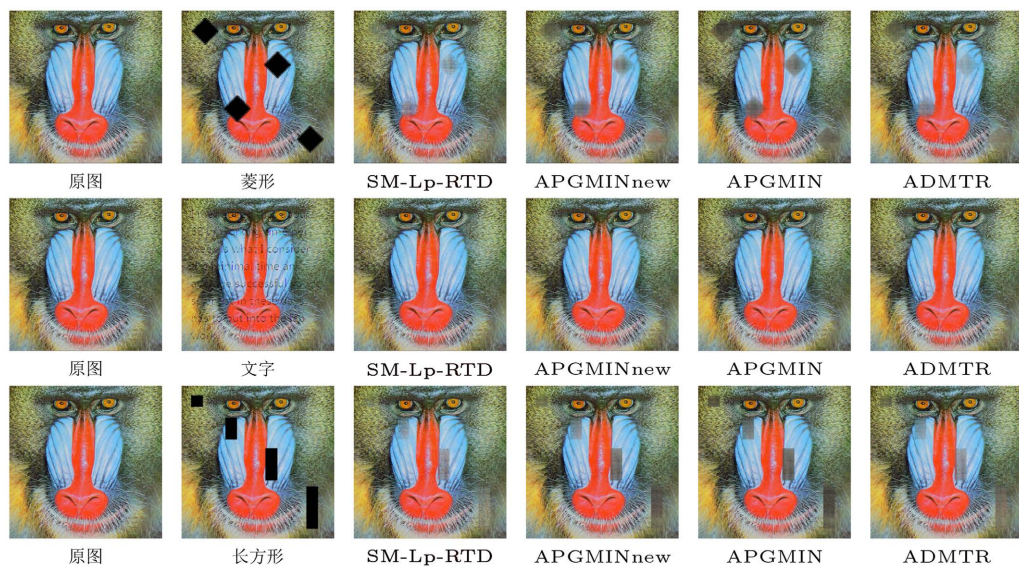


Figure 2. The restoration effect of the color “Baboon” image

图 2. 彩色“Baboon”图像的恢复效果

Table 4. Comparison of restoration effect of four models for color “Baboon” image with different masks

表 4. 四种模型对彩色图像“Baboon”在不同 mask 下恢复效果的比较

算法	mask	PSNR	SSIM
SM-Lp-RTD	菱形	28.23477	0.96687
APGMIN _{new}		26.93936	0.96428
APGMMIN		24.89365	0.95723
ADMTR		28.21342	0.96923

续表

SM-Lp-RTD	文字	38.15688	0.99560
APGMINnew		37.04410	0.99427
APGMMIN		36.47042	0.99397
ADMTR		37.66521	0.99521
SM-Lp-RTD	长方形	27.93415	0.96536
APGMINnew		25.16542	0.95874
APGMMIN		23.79572	0.95455
ADMTR		27.69709	0.96716

针对结构性缺失下的彩色图像修复任务, 由表 4 及对应恢复效果图可以看出, 本文提出的 SM-Lp-RTD 算法在菱形、文字、长方形多种结构性缺失下均表现稳定, PSNR 与 SSIM 指标整体最优, 恢复效果明显好于 APGMINnew 与 APGMMIN, 与 ADMTR 相当甚至更优。

5. 结论

本文结合非凸正则化与单模态选择策略, 构建了基于 l_p 正则与双层 Tucker 秩的低秩张量去噪模型, 并基于 ADMM 设计了新的算法。所提模型通过引入 l_p 非凸惩罚函数, 能够更精确地逼近张量的真实低秩结构, 缓解传统核范数的过估计缺陷; 同时通过单模态约束策略, 有效降低了奇异值分解的计算时间, 提升了算法在高阶张量场景下的适用性。

随机张量去噪实验结果表明, 在不同采样率与不同三阶随机张量数据下, 本文提出的 SM-Lp-RTD 算法与 ADMTR 算法、APGMINnew、APGMMIN 算法相比, 在恢复精度与计算效率取得了良好的效果。真实图像恢复实验结果表明, 在“Sailboat”图像的不同采样率去噪任务, 以及“Baboon”图像的多种结构性缺失下, SM-Lp-RTD 算法均能获得更高的 PSNR 与 SSIM 指标。

参考文献

- [1] Guo, L., Gao, K. and Huang, Z. (2023) Low Rank Tensor Recovery by Schatten Capped P Norm and Plug-And-Play Regularization. *Neurocomputing*, **534**, 171-186. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2023.02.052>
- [2] Liu, J., Musialski, P., Wonka, P. and Ye, J. (2013) Tensor Completion for Estimating Missing Values in Visual Data. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **35**, 208-220. <https://doi.org/10.1109/tpami.2012.39>
- [3] Komodakis, N. (2006) Image Completion Using Global Optimization. 2006 *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition—Volume 1 (CVPR'06)*, New York, 17-22 June 2006, 442-452. <https://doi.org/10.1109/cvpr.2006.141>
- [4] Bengua, J.A., Phien, H.N., Tuan, H.D. and Do, M.N. (2017) Efficient Tensor Completion for Color Image and Video Recovery: Low-Rank Tensor Train. *IEEE Transactions on Image Processing*, **26**, 2466-2479. <https://doi.org/10.1109/tip.2017.2672439>
- [5] Signoretto, M., Van de Plas, R., De Moor, B. and Suykens, J.A.K. (2011) Tensor versus Matrix Completion: A Comparison with Application to Spectral Data. *IEEE Signal Processing Letters*, **18**, 403-406. <https://doi.org/10.1109/lsp.2011.2151856>
- [6] Cichocki, A., Mandic, D., De Lathauwer, L., Zhou, G., Zhao, Q., Caiafa, C., et al. (2015) Tensor Decompositions for Signal Processing Applications: From Two-Way to Multiway Component Analysis. *IEEE Signal Processing Magazine*, **32**, 145-163. <https://doi.org/10.1109/msp.2013.2297439>
- [7] Bertalmio, M., Bertozzi, A.L. and Sapiro, G. (2001) Navier-Stokes, Fluid Dynamics, and Image and Video Inpainting. *Proceedings of the 2001 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. CVPR 2001, Kauai*, 8-14 December 2001, 1. <https://doi.org/10.1109/cvpr.2001.990497>
- [8] Zhang, M. and Huang, Z.H. (2015) Conditions for the Equivalence between the Low-N-Rank Tensor Recovery Problem and Its Convex Relaxation. *Pacific Journal of Optimization*, **11**, 365-383.

-
- [9] Hitchcock, F.L. (1927) The Expression of a Tensor or a Polyadic as a Sum of Products. *Journal of Mathematics and Physics*, **6**, 164-189. <https://doi.org/10.1002/sapm192761164>
- [10] Tucker, L.R. (1966) Some Mathematical Notes on Three-Mode Factor Analysis. *Psychometrika*, **31**, 279-311. <https://doi.org/10.1007/bf02289464>
- [11] Oseledets, I.V. (2011) Tensor-Train Decomposition. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **33**, 2295-2317. <https://doi.org/10.1137/090752286>
- [12] Zhao, Q., Zhou, G., Xie, S., Zhang, L.Q. and Cichocki, A. (2016) Tensor Ring Decomposition. arXiv: 1606.05535 <https://arxiv.org/abs/1606.05535>
- [13] Ng, M.K., Yuan, Q., Yan, L. and Sun, J. (2017) An Adaptive Weighted Tensor Completion Method for the Recovery of Remote Sensing Images with Missing Data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, **55**, 3367-3381. <https://doi.org/10.1109/tgrs.2017.2670021>
- [14] Gandy, S., Recht, B. and Yamada, I. (2011) Tensor Completion and Low-N-Rank Tensor Recovery via Convex Optimization. *Inverse Problems*, **27**, Article ID: 025010. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/27/2/025010>
- [15] Huang, L., So, H.C., Chen, Y. and Wang, W. (2014) Truncated Nuclear Norm Minimization for Tensor Completion. 2014 *IEEE 8th Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop (SAM)*, A Coruna, 22-25 June 2014, 417-420. <https://doi.org/10.1109/sam.2014.6882431>
- [16] 郭雄伟, 王川龙. 低秩张量填充的加速随机临近梯度算法[J]. 计算数学, 2022, 44(4): 534-544.
- [17] Gao, K., Huang, Z. and Xu, Y. (2025) Tensor Robust Principal Component Analysis Based on a Two-Layer Tucker Rank Minimization Model. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **18**, 1522-1561. <https://doi.org/10.1137/24m1691788>
- [18] Golub, H. and Van Loan, F. (2004) *Matrix Computations: 4th Edition*. Johns Hopkins Studies in Mathematical Sciences. <https://epubs.siam.org/doi/book/10.1137/1.9781421407944>
- [19] Cai, J., Candès, E.J. and Shen, Z. (2010) A Singular Value Thresholding Algorithm for Matrix Completion. *SIAM Journal on Optimization*, **20**, 1956-1982. <https://doi.org/10.1137/080738970>
- [20] Wang, C. and Zhang, L. (2025) Tensor Completion by $L_* - L_F$ Bilevel Programming. *Journal of Industrial and Management Optimization*, **21**, 4854-4877. <https://doi.org/10.3934/jimo.2025077>
- [21] Wang, C. and Xue, R. (2026) Tensor Completion via Minimum and Maximum Optimization with Noise. *Journal of Computational Mathematics*, **44**, 650-669. <https://doi.org/10.4208/jcm.2504-m2024-0005>