Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(6), 210-218
Published Online June 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.156279

Hans汉斯

Bergman空间上以函数$\varphi_1(r)e^{ip\theta}+\varphi_2(r)e^{iq\theta}$为符号的Toeplitz算子的亚正规性

龙红霞，刘朝美*

大连交通大学基础部理学院，辽宁 大连

收稿日期：2026年5月16日；录用日期：2026年6月9日；发布日期：2026年6月16日

摘 要

本文主要研究单位圆盘的Bergman空间上带有非调和符号的Toeplitz算子的亚正规性，得到以函数$\varphi(z)=r^m e^{i\delta\theta}$为符号的Toeplitz算子是亚正规的当且仅当$\delta\ge 0$，以函数$\varphi(z)=ar^m e^{i\delta\theta}+br^m e^{-i\delta\theta}$ ($\delta>0$)为符号的Toeplitz算子是亚正规算子的充要条件是$|a|\ge|b|$，且给出以函数$\varphi(z)=ar^m e^{i\delta\theta}+br^n e^{-i\delta\theta}$ ($m\ne n$)为符号的Toeplitz算子是亚正规算子的必要条件。此外，还得到Toeplitz算子T_φ是亚正规的当且仅当$T_{a\varphi}$ ($a\ne 0$)是亚正规的，当且仅当对任意的复数a,b，$T_{a\varphi+b}$是亚正规的。

关键词

Bergman空间，Toeplitz算子，亚正规性，非调和符号

Hyponormality of Toeplitz Operators with Symbols $\varphi_1(r)e^{ip\theta}+\varphi_2(r)e^{iq\theta}$ on the Bergman Space

Hongxia Long, Chaomei Liu*

College of Science, Department of Foundational Courses, Dalian Jiaotong University, Dalian Liaoning

Received: May 16, 2026; accepted: June 9, 2026; published: June 16, 2026

Abstract

This paper investigates the hyponormality of Toeplitz operators with non-harmonic symbols on the

*通讯作者。

文章引用: 龙红霞, 刘朝美. Bergman 空间上以函数$\varphi_1(r)e^{ip\theta}+\varphi_2(r)e^{iq\theta}$为符号的 Toeplitz 算子的亚正规性[J]. 应用数学进展, 2026, 15(6): 210-218. DOI: 10.12677/aam.2026.156279

Bergman space over the unit disk. It is proved that the Toeplitz operator with symbol $\varphi(z)=r^m e^{i\delta\theta}$ is hyponormal if and only if $\delta \ge 0$. For the Toeplitz operator with symbol $\varphi(z)=ar^m e^{i\delta\theta}+br^m e^{-i\delta\theta}$ ($\delta > 0$), we show that this operator is hyponormal if and only if $|a| \ge |b|$, and necessary conditions for hyponormality are established for Toeplitz operators with symbol $\varphi(z)=ar^m e^{i\delta\theta}+br^n e^{-i\delta\theta}$ ($m \ne n$). In addition, we prove that the Toeplitz operator T_φ is hyponormal if and only if $T_{a\varphi}$ ($a \ne 0$) is hyponormal, which is also equivalent to the hyponormality of $T_{a\varphi+b}$ for arbitrary complex scalars a,b.

Keywords

Bergman Space, Toeplitz Operator, Hyponormality, Non-Harmonic Symbols

1. 引言

本文设 $\mathbb{N}$ 表示自然数集，$\mathbb{Z}$ 表示整数集，$\mathbb{C}$ 表示复数集。设 H 为复 Hilbert 空间，H 上的有界线性算子 T 称为亚正规算子，若 T 的自换位子满足 $[T^*,T]=T^*T-TT^* \ge 0$，其中 T^* 为 T 的伴随算子。显然可得 T 是亚正规算子的等价描述：对任意的 $x \in H$，$\|Tx\|^2 \ge \|T^*x\|^2$。

设 $\mathbb{D}$ 为 $\mathbb{C}$ 上的开单位圆盘，即 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$。设 $\mathrm{d}A(z)$ 为 $\mathbb{D}$ 上的归一化面积测度，且 $\mathrm{d}A(z)$ 可表示为 $\mathrm{d}A(z)=\frac{r}{\pi}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。空间 $L^2(\mathbb{D})$ 为 $\mathbb{D}$ 上平方可积的可测函数构成的 Hilbert 空间，其内积和范数为

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}\mathrm{d}A(z),\quad \|f\|=\left(\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^2\mathrm{d}A(z)\right)^{\frac{1}{2}},\quad f,g\in L^2(\mathbb{D})。$$

Bergman 空间 $A^2(\mathbb{D})$ 是 $L^2(\mathbb{D})$ 中解析函数构成的闭子空间，其再生核为 $K(w,z)=\frac{1}{(1-w\bar{z})^2}$，其中 $z,w\in\mathbb{D}$。对任意的 $n\in\mathbb{N}$，令 $e_n(z)=\sqrt{n+1}z^n$，则 $\{e_n\}$ 构成 $A^2(\mathbb{D})$ 的一组标准正交基。关于 Bergman 空间的基本性质可参阅文献[1]-[3]。设 $L^\infty(\mathbb{D})$ 为 $\mathbb{D}$ 上有界可测函数构成的 Banach 空间。

设 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{D})$，Bergman 空间 $A^2(\mathbb{D})$ 上以函数 φ 为符号的 Toeplitz 算子 T_φ 的定义为：对所有 $f\in A^2(\mathbb{D})$，$T_\varphi f=P(\varphi f)$，其中 P 是从 $L^2(\mathbb{D})$ 到 $A^2(\mathbb{D})$ 的正交投影。对任意的 $z,w\in\mathbb{D}$，正交投影 P 可表示为：

$$Pf(z)=\int_{\mathbb{D}}K(z,w)f(w)\mathrm{d}A(w)=\int_{\mathbb{D}}\frac{f(w)}{(1-z\bar{w})^2}\mathrm{d}A(w),\ f\in L^2(\mathbb{D}).$$

Bergman 空间上的 Toeplitz 算子具有以下基本性质[1] [4] [5]：设 $\varphi,\psi\in L^\infty(\mathbb{D})$，$\alpha,\beta\in\mathbb{C}$，

1) $T_{\alpha\varphi+\beta\psi}=\alpha T_\varphi+\beta T_\psi$；

2) $T_\varphi^*=T_{\bar{\varphi}}$；

3) 当 φ 或 ψ 为解析函数时，有 $T_{\bar{\varphi}}T_{\psi}=T_{\bar{\varphi}\psi}$。

本文主要研究 Bergman 空间上以函数 $\varphi(z)=\varphi_0(r)\mathrm{e}^{ip\theta}$ 与 $\varphi(z)=\varphi_1(r)\mathrm{e}^{ip\theta}+\varphi_2(r)\mathrm{e}^{iq\theta}$ 为符号 Toeplitz 算子的亚正规性，其中 $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2$ 都是关于 z 的径向函数且 $p,q\in\mathbb{Z}$。Toeplitz 算子的亚正规性问题长期备受人们的广泛关注，相关研究已经持续开展了几十年，并获得大量研究成果。对 Toeplitz 算子亚正规性研究的一个核心问题是用其符号函数充分刻画 Toeplitz 算子的亚正规性。对于 Bergman 空间上带有调和符号的 Toeplitz 算子亚正规性的完整刻画是由 H. Sadraoui [6]通过 Hankel 算子和投影算子的性质给出的，此后 I. S. Hwang [7] [8]和 S. K. Singh [9]等学者对以特殊调和函数为符号的 Toeplitz 算子的亚正规性展开研究，给出该类算子的亚正规性与其符号函数之间的联系，得到众多结论。对以调和函数为符号的 Toeplitz 算子的亚正规性研究的同时，人们还对带有非调和符号的 Toeplitz 算子的亚正规性展开讨论，获得大量成果[10]-[17]。M. Fleeman [12]、S. Kim [13]等学者探讨 Bergman 空间上带有非调和符号的 Toeplitz 算子的亚正规性，得到以下结论。

定理 1.1 [13] 设 $\varphi(z)=a_{m,n}z^m\bar{z}^n$，其中 $a_{m,n}\in\mathbb{C}$，则 T_φ 是亚正规的当且仅当 $m\geq n$。

定理 1.2 [13] 设 $\varphi(z)=az^m\bar{z}^n+bz^n\bar{z}^m$，其中 $m,n\in\mathbb{N}$ 满足 $m\geq n$ 且 a,b 为非零复数，则 T_φ 是亚正规的当且仅当 $|a|\geq|b|$。

根据上述结论的分析方法，本文对以函数 $\varphi(z)=r^m\mathrm{e}^{i\delta\theta}$ 为符号的 Toeplitz 算子的亚正规性展开探讨，得到定理 2.1，在此基础上运用泛函分析的理论给出以函数 $\varphi(z)=ar^m\mathrm{e}^{i\delta\theta}+br^m\mathrm{e}^{-i\delta\theta}$ （$\delta\in\mathbb{N}$ 且 $\delta>0$）为符号的 Toeplitz 算子的亚正规性的充分刻画，即得到该算子是亚正规算子的充要条件为 $|a|\geq|b|$。

S. Kim [13]等学者同时对以函数 $az^m\bar{z}^n+bz^s\bar{z}^t$ （$m\geq n$，$t\geq s$，$m\neq t$ 且 $m-n=t-s$）为符号的 Toeplitz 算子亚正规性展开研究，得到一些必要条件。受这些结论的启发，本文探讨以函数 $\varphi(z)=ar^m\mathrm{e}^{i\delta\theta}+br^n\mathrm{e}^{-i\delta\theta}$ 为符号的 Toeplitz 算子亚正规性，得到一些较为简洁的必要条件。

2. 主要结果

为了下面讨论的需要，本节首先给出以下两个引理。

引理 2.1 设 $\varphi(z)=r^s\mathrm{e}^{i\delta\theta}$，其中 $s\geq0$ 且 $\delta\in\mathbb{N}$，则对于任意的 $t\in\mathbb{N}$，$P(\varphi z^t)=\dfrac{2t+2\delta+2}{2t+s+\delta+2}z^{t+\delta}$。

证明 根据投影算子的性质可得

$$\begin{aligned}P(\varphi z^t)(z)&=\int_{\mathbb{D}}\varphi(w)w^tk(z,w)\mathrm{d}A(w)\\&=\int_{\mathbb{D}}\varphi(w)w^t\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\bar{w}^n\mathrm{d}A(w)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\int_0^1\int_0^{2\pi}r^{s+t+m+1}\mathrm{e}^{i(t+\delta+n)\theta}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\\&=\frac{2t+2\delta+2}{2t+s+\delta+2}z^{t+\delta}.\end{aligned}$$

引理 2.2 设 $\varphi(z)=r^s\mathrm{e}^{-i\delta\theta}$，其中 $s\geq0$ 且 $\delta\in\mathbb{N}$，则对于任意的 $t\in\mathbb{N}$，有

$$P(\varphi z^t)=\begin{cases}\dfrac{2t-2\delta+2}{2t+s-\delta+2}z^{t-\delta}, & t\geq\delta\\ 0, & t<\delta\end{cases}.$$

证明 根据投影算子的性质可得

$$\begin{aligned}P\left(\varphi z^{t}\right)(z)&=\int_{\mathbb{D}}\varphi(w)w^{t}k(z,w)\mathrm{d}A(w)\\&=\int_{\mathbb{D}}\varphi(w)w^{t}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^{n}\overline{w}^{n}\mathrm{d}A(w)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^{n}\int_{0}^{1}\int_{0}^{2\pi}r^{s+t+m+1}\mathrm{e}^{i(t-\delta-n)\theta}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\\&=\begin{cases}\dfrac{2t-2\delta+2}{2t+s-\delta+2}z^{t-\delta}, & t\ge\delta\\0, & t<\delta\end{cases}.\end{aligned}$$

定理 2.1 设 $\varphi(z)=r^{m}\mathrm{e}^{i\delta\theta}$，其中 $m\ge 0$ 且 $\delta\in\mathbb{Z}$，则 T_{φ} 是亚正规的当且仅当 $\delta\ge 0$。

证明 如果 $\delta\ge 0$，则对于任意的 $u(z)=\sum_{k=0}^{\infty}u_{k}z^{k}\in A^{2}(\mathbb{D})$，利用引理 2.1 和引理 2.2 可得

$$T_{\varphi}u=P(\varphi u)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+2\delta+2}{2k+m+\delta+2}u_{k}z^{k+\delta},$$

$$T_{\varphi}^{*}u=P(\overline{\varphi}u)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k-2\delta+2}{2k+m-\delta+2}u_{k}z^{k-\delta}。$$

从而可得

$$\begin{aligned}\left\langle\left[T_{\varphi}^{*},T_{\varphi}\right]u,u\right\rangle&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4k+4\delta+4}{(2k+m+\delta+2)^{2}}|u_{k}|^{2}-\sum_{k=\delta}^{\infty}\frac{4k-4\delta+4}{(2k+m-\delta+2)^{2}}|u_{k}|^{2}\\&=4\left\{\sum_{k=0}^{\delta-1}\frac{k+\delta+1}{(2k+m+\delta+2)^{2}}|u_{k}|^{2}+\sum_{k=\delta}^{\infty}\left[\frac{k+\delta+1}{(2k+m+\delta+2)^{2}}-\frac{k-\delta+1}{(2k+m-\delta+2)^{2}}\right]|u_{k}|^{2}\right\}\\&=4\left\{\sum_{k=0}^{\delta-1}\frac{k+\delta+1}{(2k+m+\delta+2)^{2}}|u_{k}|^{2}+\sum_{k=\delta}^{\infty}\frac{2\delta\left[m(2k+m+2)+\delta^{2}\right]}{(2k+m+\delta+2)^{2}(2k+m-\delta+2)^{2}}|u_{k}|^{2}\right\}.\end{aligned}$$

由于 $m\ge 0$ 且 $\delta\ge 0$，所以 $\left\langle\left[T_{\varphi}^{*},T_{\varphi}\right]u,u\right\rangle\ge 0$，故 T_{φ} 是亚正规的。

反之，若 T_{φ} 是亚正规的，则对于任意的 $k\in\mathbb{N}$ 且 $k\ge|\delta|$ 时，有 $\left\langle\left[T_{\varphi}^{*},T_{\varphi}\right]z^{k},z^{k}\right\rangle\ge 0$，即

$$\left\|T_{\varphi}z^{k}\right\|^{2}-\left\|T_{\varphi}^{*}z^{k}\right\|^{2}=\frac{4k+4\delta+4}{(2k+m+\delta+2)^{2}}-\frac{4k-4\delta+4}{(2k+m-\delta+2)^{2}}=\frac{8\delta\left[m(2k+m+2)+\delta^{2}\right]}{(2k+m+\delta+2)^{2}(2k+m-\delta+2)^{2}}\ge 0.$$

因为 $m\ge 0$ 且 $k\ge|\delta|$，所以 $\delta\ge 0$。

命题 2.1 T_{φ} 是亚正规的当且仅当 $T_{a\varphi}$ 是亚正规的，其中 $a\in\mathbb{C}$ 且 $a\ne 0$。

证明 如果 T_{φ} 是亚正规的，那么对于任意的 $u\in A^{2}(\mathbb{D})$，$\left\|T_{\varphi}u\right\|^{2}\ge\left\|T_{\varphi}^{*}u\right\|^{2}$。因为

$$\left\|T_{a\varphi}u\right\|^{2}-\left\|T_{a\varphi}^{*}u\right\|^{2}=|a|^{2}\left(\left\|T_{\varphi}u\right\|^{2}-\left\|T_{\varphi}^{*}u\right\|^{2}\right),$$

并且 $a\ne 0$，所以有 $|a|^{2}>0$，从而可得 $\left\|T_{a\varphi}u\right\|^{2}\ge\left\|T_{a\varphi}^{*}u\right\|^{2}$，即 $T_{a\varphi}$ 是亚正规的。

反之，由于存在 $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 使得 $T_{a\varphi}$ 是亚正规的，所以对于任意的 $u\in A^{2}(\mathbb{D})$，$|a|^{2}\left\|T_{\varphi}u\right\|^{2}\ge|a|^{2}\left\|T_{\varphi}^{*}u\right\|^{2}$。由于 $|a|>0$，所以 $\left\|T_{\varphi}u\right\|^{2}\ge\left\|T_{\varphi}^{*}u\right\|^{2}$，即 T_{φ} 是亚正规的。

命题 2.2 T_{φ} 是亚正规的当且仅当对任意的 $a,b\in\mathbb{C}$，$T_{a\varphi+b}$ 是亚正规的。

证明 如果 T_{φ} 是亚正规的，那么对于任意的 $u\in A^{2}(\mathbb{D})$，$\left\|T_{\varphi}u\right\|^{2}\ge\left\|T_{\varphi}^{*}u\right\|^{2}$。而对任意的 $a,b\in\mathbb{C}$，显然有

$T_{a\varphi+b}u = aT_\varphi u + bu$， $T^*_{a\varphi+b}u = \bar{a}T^*_\varphi u + \bar{b}u$， 且

$$\left\|T_{a\varphi+b}u\right\|^2 = \left\langle aT_\varphi u + bu, aT_\varphi u + bu\right\rangle = |a|^2\left\|T_\varphi u\right\|^2 + |b|^2\|u\|^2 + a\bar{b}\left\langle T_\varphi u, u\right\rangle + \bar{a}b\left\langle u, T_\varphi u\right\rangle,$$

$$\begin{aligned}\left\|T^*_{a\varphi+b}u\right\|^2 &= \left\langle \bar{a}T^*_\varphi u + \bar{b}u, \bar{a}T^*_\varphi u + \bar{b}u\right\rangle = |a|^2\left\|T^*_\varphi u\right\|^2 + |b|^2\|u\|^2 + \bar{a}b\left\langle T^*_\varphi u, u\right\rangle + a\bar{b}\left\langle u, T^*_\varphi u\right\rangle \\ &= |a|^2\left\|T^*_\varphi u\right\|^2 + |b|^2\|u\|^2 + \bar{a}b\left\langle u, T_\varphi u\right\rangle + a\bar{b}\left\langle T_\varphi u, u\right\rangle,\end{aligned}$$

从而可得 $\left\|T_{a\varphi+b}u\right\|^2 - \left\|T^*_{a\varphi+b}u\right\|^2 = |a|^2\left(\left\|T_\varphi u\right\|^2 - \left\|T^*_\varphi u\right\|^2\right)$。而 $|a|^2 \ge 0$，所以 $\left\|T_{a\varphi+b}u\right\|^2 - \left\|T^*_{a\varphi+b}u\right\|^2 \ge 0$，即得 $T_{a\varphi+b}$ 是亚正规的。

反之，如果对于任意的 $a,b\in\mathbb{C}$， $T_{a\varphi+b}$ 是亚正规的，那么当 $a=1$， $b=0$ 时， $T_{a\varphi+b}$ 也是亚正规的，且 $T_{a\varphi+b} = T_\varphi$， 即 T_φ 是亚正规的。

定理 2.2 设 $\psi(z) = r^m\mathrm{e}^{i\delta\theta}$，其中 $m\ge 0$， $\delta\in\mathbb{N}$ 且 $\delta>0$； $\varphi(z) = a\psi(z) + b\overline{\psi(z)}$，其中 $a,b\in\mathbb{C}$，则 T_φ 是亚正规的当且仅当 $|a|\ge|b|$。

证明 根据亚正规算子的定义可得 T_φ 是亚正规的当且仅当对任意的 $u\in A^2(\mathbb{D})$，$\left\|T_\varphi u\right\|^2 - \left\|T^*_\varphi u\right\|^2 \ge 0$。而 $T_\varphi u = aT_\psi u + bT^*_\psi u$， $T^*_\varphi u = \bar{a}T^*_\psi u + \bar{b}T_\psi u$， 且

$$\left\|T_\varphi u\right\|^2 = \left\langle aT_\psi u + bT^*_\psi u, aT_\psi u + bT^*_\psi u\right\rangle = |a|^2\left\|T_\psi u\right\|^2 + |b|^2\left\|T^*_\psi u\right\|^2 + a\bar{b}\left\langle T_\psi u, T^*_\psi u\right\rangle + \bar{a}b\left\langle T^*_\psi u, T_\psi u\right\rangle,$$

$$\left\|T^*_\varphi u\right\|^2 = \left\langle \bar{a}T^*_\psi u + \bar{b}T_\psi u, \bar{a}T^*_\psi u + \bar{b}T_\psi u\right\rangle = |a|^2\left\|T^*_\psi u\right\|^2 + |b|^2\left\|T_\psi u\right\|^2 + \bar{a}b\left\langle T^*_\psi u, T_\psi u\right\rangle + a\bar{b}\left\langle T_\psi u, T^*_\psi u\right\rangle,$$

从而可得 $\left\|T_\varphi u\right\|^2 - \left\|T^*_\varphi u\right\|^2 = \left(|a|^2 - |b|^2\right)\left(\left\|T_\psi u\right\|^2 - \left\|T^*_\psi u\right\|^2\right)$， 于是可得 T_φ 是亚正规的当且仅当

$$\left(|a|^2 - |b|^2\right)\left(\left\|T_\psi u\right\|^2 - \left\|T^*_\psi u\right\|^2\right) \ge 0.$$

既然 $\delta>0$ 且 $m\ge 0$，所以由定理 2.1 可得 T_ψ 是亚正规的，即 $\left\|T_\psi u\right\|^2 - \left\|T^*_\psi u\right\|^2 \ge 0$， 且

$$\left\|T_\psi z^\delta\right\|^2 - \left\|T^*_\psi z^\delta\right\|^2 = \frac{2\delta+1}{(3\delta+m+2)^2} - \frac{1}{(\delta+m+2)^2} = \frac{2\delta\left[m(2\delta+m+2)+\delta^2\right]}{(3\delta+m+2)^2(\delta+m+2)^2} > 0,$$

所以 T_φ 是亚正规的当且仅当 $|a|\ge|b|$。

定理 2.3 设 $\varphi(z) = ar^m\mathrm{e}^{i\delta\theta} + br^n\mathrm{e}^{-i\delta\theta}$，其中 $a,b\in\mathbb{C}$， δ 是正整数且 m， n 为非负整数。若 T_φ 是亚正规的，则当 $m>n$ 时， $|a| \ge \dfrac{\delta+m+2}{\delta+n+2}|b|$； 当 $m<n$ 时， $|a| \ge \sqrt{\dfrac{n}{m}}|b|$。

证明 记 $f(z) = ar^m\mathrm{e}^{i\delta\theta}$， $g(z) = br^n\mathrm{e}^{-i\delta\theta}$，则 $\varphi = f+g$。如果 T_φ 是亚正规的，那么对任意的 $u\in A^2(\mathbb{D})$，有

$$\left\langle\left[T^*_{f+g}, T_{f+g}\right]u, u\right\rangle = \left\|T_f u\right\|^2 - \left\|T^*_f u\right\|^2 + \left\|T_g u\right\|^2 - \left\|T^*_g u\right\|^2 + 2Re\left[\left\langle T_f u, T_g u\right\rangle - \left\langle T^*_f u, T^*_g u\right\rangle\right] \ge 0。 \tag{1}$$

根据引理 2.1 和引理 2.2 得

$$T_f u = a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+2\delta+2}{2k+m+\delta+2}u_k z^{k+\delta}, \quad T^*_f u = \bar{a}\sum_{k=\delta}^{\infty}\frac{2k-2\delta+2}{2k+m-\delta+2}u_k z^{k-\delta},$$

$$T_g u = b\sum_{k=\delta}^{\infty}\frac{2k-2\delta+2}{2k+n-\delta+2}u_k z^{k-\delta}, \quad T^*_g u = \bar{b}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+2\delta+2}{2k+n+\delta+2}u_k z^{k+\delta},$$

从而可得

$$\left\|T_f u\right\|^2 = 4|a|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+\delta+1}{(2k+m+\delta+2)^2}|u_k|^2, \quad \left\|T_f^* u\right\|^2 = 4|a|^2 \sum_{k=\delta}^{\infty} \frac{k-\delta+1}{(2k+m-\delta+2)^2}|u_k|^2,$$

$$\left\|T_g u\right\|^2 = 4|b|^2 \sum_{k=\delta}^{\infty} \frac{k-\delta+1}{(2k+n-\delta+2)^2}|u_k|^2, \quad \left\|T_g^* u\right\|^2 = 4|b|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+\delta+1}{(2k+n+\delta+2)^2}|u_k|^2,$$

$$\begin{aligned}
&2Re\left[\left\langle T_f u, T_g u\right\rangle - \left\langle T_f^* u, T_g^* u\right\rangle\right] \\
&= 8Re\left[a\bar{b}\sum_{k=0}^{\infty} u_k \overline{u_{k+2\delta}} \frac{k+\delta+1}{(2k+m+\delta+2)(2k+n+3\delta+2)} - \bar{a}b\sum_{k=0}^{\infty} \overline{u_k} u_{k+2\delta} \frac{k+\delta+1}{(2k+n+\delta+2)(2k+m+3\delta+2)}\right] \\
&= 8\sum_{k=0}^{\infty} Re\left(a\bar{b}u_k \overline{u_{k+2\delta}}\right) \frac{2\delta(n-m)(k+\delta+1)}{(2k+m+\delta+2)(2k+n+3\delta+2)(2k+n+\delta+2)(2k+m+3\delta+2)}.
\end{aligned}$$

根据函数 u 的任意性我们将选择适当的 u 使得 $Re\left(a\bar{b}u_k\overline{u_{k+2\delta}}\right)=0\,(k=0,1,2,\cdots)$，所以

$$2Re\left[\left\langle T_f u, T_g u\right\rangle - \left\langle T_f^* u, T_g^* u\right\rangle\right] = 0.$$

于是将上述结果带入(1)式中得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\delta-1}(k+\delta+1)\left[\frac{|a|^2}{(2k+m+\delta+2)^2} - \frac{|b|^2}{(2k+n+\delta+2)^2}\right]|u_k|^2 \\
&+ 2\delta\sum_{k=\delta}^{\infty}\left\{\frac{|a|^2\left[m(2k+m+2)+\delta^2\right]}{(2k+m+\delta+2)^2(2k+m-\delta+2)^2} - \frac{|b|^2\left[n(2k+n+2)+\delta^2\right]}{(2k+n+\delta+2)^2(2k+n-\delta+2)^2}\right\}|u_k|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

当 $0 \leq k < \delta$ 时，$(k+\delta+1)\left[\frac{|a|^2}{(2k+m+\delta+2)^2} - \frac{|b|^2}{(2k+n+\delta+2)^2}\right] \geq 0$。又由于 $k+\delta+1>0$，所以

$$|a| \geq \frac{2k+m+\delta+2}{2k+n+\delta+2}|b|. \tag{2}$$

当 $k \geq \delta$ 时，$\delta\left\{\frac{|a|^2\left[m(2k+m+2)+\delta^2\right]}{(2k+m+\delta+2)^2(2k+m-\delta+2)^2} - \frac{|b|^2\left[n(2k+n+2)+\delta^2\right]}{(2k+n+\delta+2)^2(2k+n-\delta+2)^2}\right\} \geq 0$。由于 $\delta>0$，所以

$$|a| \geq \frac{(2k+m+2)^2-\delta^2}{(2k+n+2)^2-\delta^2}\sqrt{\frac{n(2k+n+2)+\delta^2}{m(2k+m+2)+\delta^2}}|b|. \tag{3}$$

令 $g(k)=\frac{(2k+m+2)^2-\delta^2}{(2k+n+2)^2-\delta^2}\sqrt{\frac{n(2k+n+2)+\delta^2}{m(2k+m+2)+\delta^2}}$，$k \geq \delta$，显然有 $g(k) \geq 0$ 且

$$\begin{aligned}
\ln g(k) &= \ln\left[(2k+m+2)^2-\delta^2\right] - \ln\left[(2k+n+2)^2-\delta^2\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\ln\left[n(2k+n+2)+\delta^2\right] - \frac{1}{2}\ln\left[m(2k+m+2)+\delta^2\right].
\end{aligned}$$

于是两边求导可得

$$\frac{g'(k)}{g(k)} = \frac{4(2k+m+2)}{(2k+m+2)^2-\delta^2} - \frac{4(2k+n+2)}{(2k+n+2)^2-\delta^2} + \frac{n}{n(2k+n+2)+\delta^2} - \frac{m}{m(2k+m+2)+\delta^2}. \tag{4}$$

由于 $g(k)>0$，所以 $g'(k)$ 的正负取决于上式等号右侧的函数。设 $A=2k+m+2$，$B=2k+n+2$，则

(4)式可改写为

$$\frac{g'(k)}{g(k)}=\frac{4A}{A^2-\delta^2}-\frac{4B}{B^2-\delta^2}+\frac{n}{nB+\delta^2}-\frac{m}{mA+\delta^2}=(n-m)\left[\frac{4\left(1+\frac{\delta^2}{AB}\right)}{\left(A-\frac{\delta^2}{A}\right)\left(B-\frac{\delta^2}{B}\right)}-\frac{1-\frac{\delta^2}{mn}}{\left(A+\frac{\delta^2}{m}\right)\left(B+\frac{\delta^2}{n}\right)}\right]. \quad (5)$$

下面对上式中括号内的表达式分为两种情形进行讨论。

若 $mn\le\delta^2$，则 $1-\frac{\delta^2}{mn}\le 0$。由于 $A-\frac{\delta^2}{A}=\frac{A^2-\delta^2}{A}>0$，$B-\frac{\delta^2}{B}=\frac{B^2-\delta^2}{B}>0$，所以

$$\frac{4\left(1+\frac{\delta^2}{AB}\right)}{\left(A-\frac{\delta^2}{A}\right)\left(B-\frac{\delta^2}{B}\right)}-\frac{1-\frac{\delta^2}{mn}}{\left(A+\frac{\delta^2}{m}\right)\left(B+\frac{\delta^2}{n}\right)}>0.$$

若 $mn>\delta^2$，则 $1+\frac{\delta^2}{AB}>1$，$0<1-\frac{\delta^2}{mn}<1$ 且 $A-\frac{\delta^2}{A}<A+\frac{\delta^2}{m}$，$B-\frac{\delta^2}{B}<B+\frac{\delta^2}{n}$，所以

$$\frac{4\left(1+\frac{\delta^2}{AB}\right)}{\left(A-\frac{\delta^2}{A}\right)\left(B-\frac{\delta^2}{B}\right)}>\frac{1-\frac{\delta^2}{mn}}{\left(A+\frac{\delta^2}{m}\right)\left(B+\frac{\delta^2}{n}\right)}.$$

综合上述两种情形，括号内的表达式恒为正。由于 $m\ne n$，下面将根据 m 与 n 的大小关系进一步展开讨论。

1) 若 $m>n$，当 $0\le k<\delta$ 时，由于 $\frac{2k+m+\delta+2}{2k+n+\delta+2}$ 关于 k 在 $[0,+\infty)$ 单调递减，所以根据(2)式可得 $|a|\ge\frac{\delta+m+2}{\delta+n+2}|b|$。当 $k\ge\delta$ 时，根据(5)式可得 $\frac{g'(k)}{g(k)}\le 0$，即 $g'(k)\le 0$，故 $g(k)$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上单调递减。因此由(3)式得 $|a|\ge\frac{(\delta+m+2)(3\delta+m+2)}{(\delta+n+2)(3\delta+n+2)}\sqrt{\frac{n(2\delta+n+2)+\delta^2}{m(2\delta+m+2)+\delta^2}}|b|$，从而可得

$$|a|\ge\max\left\{\frac{\delta+m+2}{\delta+n+2},\frac{(\delta+m+2)(3\delta+m+2)}{(\delta+n+2)(3\delta+n+2)}\sqrt{\frac{n(2\delta+n+2)+\delta^2}{m(2\delta+m+2)+\delta^2}}\right\}|b|.$$

接下来分析 $\frac{3\delta+m+2}{3\delta+n+2}\sqrt{\frac{n(2\delta+n+2)+\delta^2}{m(2\delta+m+2)+\delta^2}}$ 与 1 的大小关系。由于

$$\frac{3\delta+m+2}{3\delta+n+2}\sqrt{\frac{n(2\delta+n+2)+\delta^2}{m(2\delta+m+2)+\delta^2}}=\sqrt{\frac{n^2+(2\delta+2)n+\delta^2}{3\delta+n+2}\frac{3\delta+m+2}{m^2+(2\delta+2)m+\delta^2}},$$

定义函数 $f(x)=\frac{x^2+(2\delta+2)x+\delta^2}{(x+3\delta+2)^2}$，$x\ge 0$。因为 $f'(x)=\frac{(2\delta+1)x+2\delta^2+5\delta+2}{(x+3\delta+2)^3}>0$，所以 $f(x)$ 关于 x 在区间 $[0,+\infty)$ 上为增函数。由 $m>n$ 可得 $f(m)>f(n)$，即 $\frac{m^2+(2\delta+2)m+\delta^2}{(m+3\delta+2)^2}>\frac{n^2+(2\delta+2)n+\delta^2}{(n+3\delta+2)^2}$。于

是得到 $\frac{3\delta+m+2}{3\delta+n+2}\sqrt{\frac{n(2\delta+n+2)+\delta^2}{m(2\delta+m+2)+\delta^2}}<1$。因此最终可得 $|a|\geq\frac{\delta+m+2}{\delta+n+2}|b|$。

2) 若 $m<n$，当 $0\leq k<\delta$ 时，由于 $\frac{2k+m+\delta+2}{2k+n+\delta+2}$ 关于 k 在 $[0,+\infty)$ 单调递增，所以根据(2)式可得 $|a|\geq\frac{3\delta+m}{3\delta+n}|b|$。当 $k\geq\delta$ 时，根据(5)式可得 $\frac{g'(k)}{g(k)}\geq 0$，即得 $g'(k)\geq 0$，故 $g(k)$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上单调递增。因此由(3)式得 $|a|\geq\sqrt{\frac{n}{m}}|b|$，从而可得 $|a|\geq\max\left\{\frac{3\delta+m}{3\delta+n},\sqrt{\frac{n}{m}}\right\}|b|$。然而 $m<n$，那么 $\sqrt{\frac{n}{m}}>\frac{3\delta+m}{3\delta+n}$，因此最终可得 $|a|\geq\sqrt{\frac{n}{m}}|b|$。

例 2.1 设 $\varphi(z)=1.25r^2e^{i\theta}+re^{-i\theta}$，则 Toeplitz 算子 T_φ 不是亚正规的。

证明 取 $u=z^0+z^2\in A^2(\mathbb{D})$，根据引理 1 与引理 2 计算得 $T_\varphi u=\frac{5}{3}z+\frac{10}{9}z^3$，$T_\varphi^* u=\frac{12}{7}z+z^3$。于是可得 $\|T_\varphi u\|^2\approx 1.6975$，$\|T_\varphi^* u\|^2\approx 1.7194$，所以 $\|T_\varphi u\|^2<\|T_\varphi^* u\|^2$，由亚正规算子的定义知 T_φ 不是亚正规的。

通过此例可知，当 $m>n$ 时，对于某些函数 φ，定理 2.3 中的必要条件 $|a|\geq\frac{\delta+m+2}{\delta+n+2}|b|$ 不是 T_φ 为亚正规算子的充分条件。

3. 结论

本文基于两个辅助引理对单位圆盘的 Bergman 空间上以非调和函数为符号的 Toeplitz 算子的亚正规性展开研究，得到以函数 $\varphi(z)=r^m e^{i\delta\theta}$ 和函数 $\varphi(z)=ar^m e^{i\delta\theta}+br^m e^{-i\delta\theta}$ ($\delta>0$)为符号的 Toeplitz 算子是亚正规算子的充要条件，以及以函数 $\varphi(z)=ar^m e^{i\delta\theta}+br^n e^{-i\delta\theta}$ ($m\neq n$)为符号的 Toeplitz 算子是亚正规算子的必要条件．本文所得结论具有原创性和创新性，将以函数 $a_{m,n}z^m\bar{z}^n$、$az^m\bar{z}^n+bz^n\bar{z}^m$、$az^m\bar{z}^n+bz^s\bar{z}^t$ 为符号的 Toeplitz 算子的结论分别推广到带有更为一般符号的 Toeplitz 算子上，这将有助于探讨带有更一般符号的 Toeplitz 算子的亚正规性．然而，本文结论都是关于以特殊拟齐次函数为符号的 Toeplitz 算子的，且以函数 $\varphi(z)=ar^m e^{i\delta\theta}+br^n e^{-i\delta\theta}$ ($m\neq n$)为符号的 Toeplitz 算子亚正规性的结论仅是一个必要条件，而该必要条件不是算子亚正规性的充分条件。之后，我们将继续探讨以函数 $\varphi(z)=ar^m e^{i\delta\theta}+br^n e^{-i\delta\theta}$ ($m\neq n$)为符号的 Toeplitz 算子为亚正规算子的充分条件，以期获得该类算子为亚正规算子的充要条件，进而分别探究以函数 $\varphi_0(r)e^{i\delta\theta}$ ($\varphi_0(r)$ 是关于 r 的多项式函数)、$\varphi_1(r)e^{i\delta\theta}+\varphi_2(r)e^{-i\delta\theta}$ ($\varphi_i(r)$ ($i=1,2$)是关于 r 的多项式函数)为符号的 Toeplitz 算子的亚正规性，及以两个拟齐次函数的和函数为符号的 Toeplitz 算子的亚正规性，并将相关问题推广至加权 Bergman 空间。

基金项目

国家自然科学基金项目(No. 11301046)；辽宁省教育厅科学研究经费项目(JDL2019026)。

参考文献

[1] Axler, S. (1988) Bergman Spaces and Their Operators. In: Conway, J.B. and Morrel, B.B., Eds., *Surveys of Some Recent Results in Operator Theory*, Vol. 1, 1-50.

[2] Douglas, R. (1972) Banach Algebra Techniques in Operator Theory. Academic Press.

[3] Hedenmalm, H., Korenblum, B. and Zhu, K. (2000) Theory of Bergman Spaces. Springer.

[4] Axler, S. (1986) The Bergman Space, the Bloch Space, and Commutators of Multiplication Operators. *Duke Mathematical Journal*, **53**, 315-332. https://doi.org/10.1215/s0012-7094-86-05320-2

[5] Zhu, K. (1990) Operator Theory in Function Spaces. Dekker.

[6] Sadraoui, H. (1992) Hyponormality of Toeplitz Operators and Composition Operators. Ph.D. Thesis, Purdue University.

[7] Hwang, I.S. (2005) Hyponormal Toeplitz Operators on the Bergman Space. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **42**, 387-403. https://doi.org/10.4134/jkms.2005.42.2.387

[8] Hwang, I. (2008) Hyponormality of Toeplitz Operators on the Bergman Space. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **45**, 1027-1041. https://doi.org/10.4134/jkms.2008.45.4.1027

[9] Gupta, A. and Singh, S.K. (2017) Necessary Conditions for Hyponormality of Toeplitz Operators on the Fock Space. *Mathematics for Application*, **6**, 151-159. https://doi.org/10.13164/ma.2017.10

[10] Lu, Y. and Liu, C. (2009) Commutativity and Hyponormality of Toeplitz Operators on the Weighted Bergman Space. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **46**, 621-642. https://doi.org/10.4134/jkms.2009.46.3.621

[11] Simanek, B. (2019) Hyponormal Toeplitz Operators with Non-Harmonic Algebraic Symbol. *Analysis and Mathematical Physics*, **9**, 1613-1626. https://doi.org/10.1007/s13324-018-00279-2

[12] Fleeman, M. and Liaw, C. (2019) Hyponormal Toeplitz Operators with Non-Harmonic Symbol Acting on the Bergman Space. *Operators and Matrices*, **13**, 61-83. https://doi.org/10.7153/oam-2019-13-04

[13] Kim, S. and Lee, J. (2021) Hyponormality of Toeplitz Operators with Non-Harmonic Symbols on the Bergman Spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, **2021**, Article No. 67. https://doi.org/10.1186/s13660-021-02602-1

[14] Kim, S. and Lee, J. (2023) Remarks on Hyponormal Toeplitz Operators with Nonharmonic Symbols. *Open Mathematics*, **21**, Article 20230114. https://doi.org/10.1515/math-2023-0114

[15] Gupta, A. and Aggarwal, A. (2022) Necessary Conditions for Hyponormality of Toeplitz Operators on the Bergman Space. *Mathematics for Application*, **11**, 13-19. https://doi.org/10.13164/ma.2022.02

[16] Kim, S. and Lee, J. (2024) A sufficient Condition for Hyponormal Toeplitz Operators on the Bergman Space. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **61**, 1019-1031.

[17] Kim, S. and Lee, J. (2022) Hyponormal Toeplitz Operators with Non-Harmonic Symbols on the Weighted Bergman Spaces. *Annals of Functional Analysis*, **14**, Article No. 14. https://doi.org/10.1007/s43034-022-00241-1