

一类求解离散不适定问题的截断奇异值分解方法

吴思静*, 田 淼, 王忆清

重庆对外经贸学院数学与计算机科学学院, 重庆

收稿日期: 2026年5月2日; 录用日期: 2026年5月26日; 发布日期: 2026年6月2日

摘 要

奇异值分解(SVD)是矩阵计算中的核心工具。在图像处理领域, SVD被广泛用于图像压缩、去噪和特征提取。经典SVD算法在处理高分辨率图像或大规模科学仿真数据时, 计算复杂度高, 内存开销巨大, 本文提出随机SVD能保持高精度, 并适合处理大规模图像矩阵和高维科学观测数据。经典SVD适用于中小规模或高精度需求的任务, 而随机SVD已成为大规模图像分析、科学计算与工程应用中高效获取低秩近似的首选方案之一, 本文的随机SVD与Tikhonov正则化方法结合得到的随机SVD-Tikhonov正则化方法可处理大规模不适定问题, 数值实例说明了该方法的有效性。

关键词

截断奇异值分解, 随机化奇异值分解, Tikhonov正则化, 图像复原

A Truncated Singular Value Decomposition Method for Solving Discrete Ill-Posed Problems

Sijing Wu*, Miao Tian, Yiqing Wang

School of Mathematics and Computer Science, Chongqing College of International Business and Economics, Chongqing

Received: May 2, 2026; accepted: May 26, 2026; published: June 2, 2026

Abstract

Singular Value Decomposition (SVD) is a core tool in matrix computing. In the field of image processing,

*通讯作者。

文章引用: 吴思静, 田淼, 王忆清. 一类求解离散不适定问题的截断奇异值分解方法[J]. 应用数学进展, 2026, 15(6): 47-54. DOI: 10.12677/aam.2026.156264

SVD is widely used in image compression, denoising and feature extraction. The classic SVD algorithm has high computational complexity and huge memory overhead when dealing with high-resolution images or large-scale scientific simulation data. This paper proposes that random SVD can maintain high precision and is suitable for processing large-scale image matrices and high-dimensional scientific observation data. Classic SVD is suitable for tasks of medium and small scale or with high precision requirements, while random SVD has become one of the preferred solutions for efficiently obtaining low-rank approximations in large-scale image analysis, scientific computing and engineering applications. The random SVD-Tikhonov regularization method obtained by combining the random SVD in this paper with the Tikhonov regularization method can handle large-scale undetermined problems. Numerical examples illustrate the effectiveness of this method.

Keywords

Truncated Singular Value Decomposition, Randomized Singular Value Decomposition, Tikhonov Regularization, Image Restoration

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在许多科学与工程应用中，如图像复原、反问题建模以及由积分方程或偏微分方程反演得到的参数估计问题中，常常需要求解形如以下线性系统

$$Ax = b^\delta \quad (1.1)$$

其中 $A \in R^{m \times n}$ 是由连续算子离散化得到的矩阵， $b^\delta \in R^m$ 表示含噪观测数据。该问题在图像复原等多个领域具有广泛应用。 e 表示测量误差或离散化误差，假设数据噪声水平

$$\|e\|_2 = \delta$$

已知，那么 $b^\delta = b + e$ ，其中 b 为无误差的未知向量，即 $Ax_{\text{true}} = b$ 。

尽管该问题在离散意义下是有限维的线性代数问题，但其本质仍然继承了原连续问题的不适定性，通常表现为矩阵 A 的奇异值快速衰减至零，从而导致问题对数据噪声极其敏感。具体而言，矩阵 A 的奇异值往往在数值上迅速趋近于零，且其衰减速度随问题类型和离散精度的提高而进一步加快，从而导致矩阵条件数急剧增大。此类问题通常被称为离散不适定问题。由于 A 的严重不适定性，即使在噪声水平较低的情况下，线性系统(1.1)的直接解仍可能产生强烈振荡且缺乏物理意义的解。目前，针对离散不适定问题，最常用的方法主要为截断奇异值分解[1]和 Tikhonov 正则化方法[2]-[4]。

Hansen [1]提出并系统分析了截断奇异值分解(TSVD)作为一种正则化策略，用于求解离散不适定线性最小二乘问题，讨论了 TSVD 与标准正则化解之间的联系，并说明了截断主导奇异值能抑制噪声影响的机制。

Xu [5]系统比较了多种 TSVD 截断策略(如基于 F-统计、L-curve 和基于均方误差的准则)，分析了它们在稳定性、偏差和均方误差等方面的性能，为 TSVD 参数选择提供了深入见解。

Jia [6]等人提出了改进的随机化截断奇异值分解(MTRSVD)方法，将随机化 SVD 与改进 TSVD 结合起来，可用于求解大规模离散不适定问题，显著减少了计算成本，同时保持了正则化精度。

Bai [7]等人提出了一种新的 MTRSVD 方法，通过结合随机算法提高大规模问题中的 SVD 近似质量，

并用不适定问题的实际数值例子验证了其有效性。

Xu [8]等人在 TSVD 基础上引入广义 SVD (GSVD)与双侧均匀随机化策略,用于更复杂的 Tikhonov 正则化模型,提高大规模离散不适定问题的计算效率。

Noschese 和 Reichel [9]引入了改进截断奇异值分解(MTSVD)算法,其核心思想是用具有相同谱条件数的最接近矩阵(在酉不变矩阵范数下)替代 A 。

2. 奇异值分解算法

奇异值分解(Singular Value Decomposition, SVD)是数值线性代数中最重要的矩阵分解之一,也是分析和求解离散不适定问题的基础工具。对于任意矩阵

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

其奇异值分解可表示为

$$A = U \Sigma V^T$$

其中 $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为正交矩阵, $\Sigma = \text{diag}[s_1, s_2, \dots, s_r, 0, \dots, 0] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为非负对角矩阵, 其对角元 $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r > 0$ 称为矩阵 A 的奇异值。在离散不适定问题中, 矩阵 A 的奇异值通常呈快速衰减趋势, 其中较大的奇异值对应于问题中稳定、可恢复的主要信息, 而较小的奇异值则往往与高频成分及噪声主导的方向相关。

2.1. 截断奇异值分解算法(TSVD)

针对离散不适定问题(1.1), 截掉一部分较小奇异值可有效降低不适定性, 这种方法被称为截断奇异值分解方法(TSVD), TSVD 通过选取一个截断参数 k , 构造近似矩阵

$$A_k = \sum_{i=1}^k s_i u_i v_i^T.$$

其相应的正则化解可描述为

$$x_k = \sum_{i=1}^k \frac{u_i^T b}{s_i} v_i$$

截断参数 k 在 TSVD 方法中扮演着正则化参数的角色, 其选取直接决定了所得解对噪声的抑制能力以及对真实解的逼近质量。合理选择 k 是在解的稳定性与逼近精度之间取得平衡的关键: 过小的 k 会导致解过度平滑而丢失重要信息, 而过大的 k 则会引入噪声主导的高频成分, 造成解的不稳定。针对离散不适定问题, 已有多种 k 的选取策略被提出, 包括差异原理, 广义交叉验证(GCV)和 L-curve 等方法[1] [2] [10] [11]。本文主要采用差异原理确定截断参数 k , 时, 差异原理要求选择 k 使得 TSVD 解的残差满足

$$\|Ax_k - b\|_2 = \tau \delta, \quad (2.1)$$

其中 $\tau > 1$ 是指定的且与 δ 无关。差异原理直接将解的拟合误差与噪声水平联系起来, 能够有效避免过拟合噪声, 保证解在保留主要信息的同时具有良好的稳定性。因此, 本工作中主要采用差异原理来确定截断参数 k (算法 1)。

2.2. 随机化奇异值分解

传统 SVD 在求解离散不适定问题时, 能够准确揭示矩阵的奇异值谱和不稳定子空间, 但其计算复杂度为 $O(mn \min(m, n))$, 在大规模问题中成本过高, 甚至因内存爆炸而无法计算。

算法 1. 截断奇异值算法(TSVD)

```

输入:  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $\delta, \tau, k_{\max}$ 
输出: 正则解  $x$ 
 $[U, \Sigma, V] = \text{svd}(A)$ 
While  $k < k_{\max}$ 
     $x_k = \sum_{i=1}^k \frac{u_i^T b}{s_i} v_i$ 
    IF  $\|Ax_k - b\|_2 < \tau\delta$ 
        Break
    ENDIF
End
    
```

为了提高计算效率, 本文使用一种改进算法, 通过随机投影构造低秩近似, 显著降低计算复杂度, 同时保持对主导奇异值和奇异向量的高精度捕捉。尤其是对于大规模问题而言, 当线性系统(1.1)中, A 的维度过大时, SVD 无法计算, 而随机 SVD (RSVD)可有效降低计算复杂度。

令 $\Omega \in \mathbb{R}^{n \times (k+p)}$ 为一个具有独立同分布高斯元素的随机矩阵, 其中 k 为目标秩, p 为过采样参数。构造

$$Y = A\Omega$$

并令 Q 为 Y 的正交基, 则有 A 的近似可表示为

$$\tilde{A} = QQ^T A \tag{2.2}$$

随着过采样参数 p 的增加, 随机子空间 $R(Q)$ 以高概率收敛到由 A 的前 k 个左奇异向量张成的子空间, 即

$$\angle(R(Q), R(U_k)) \rightarrow 0$$

这表明 RSVD 在子空间意义下是一致收敛的。RSVD 近似误差可由如下界控制:

$$\|A - QQ^T A\|_2 \leq (1 + \varepsilon(k, p))s_{k+1},$$

其中 $\varepsilon(k, p)$ 随过采样参数 p 增大而快速衰减。在期望意义下, 有更精确的误差估计:

$$E\|A - QQ^T A\|_2 \leq \left(1 + C\sqrt{\frac{k}{p-1}}\right)s_{k+1} + C' \frac{\sum_{j>k} s_j^2}{s_{k+1}},$$

其中 C 和 C' 是来源于随机矩阵理论概率估计的普通常数[12]。可生成矩阵 A 的秩 r 近似。

设

$$A \approx \tilde{A}_r = \tilde{U}_r \tilde{\Sigma}_r \tilde{V}_r^T \tag{2.3}$$

其中正交矩阵 $\tilde{U}_r = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_r] \in \mathbb{R}^{m \times r}$, 正交矩阵 $\tilde{V}_r = [\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_r] \in \mathbb{R}^{n \times r}$, 对角矩阵 $\tilde{\Sigma}_r = [\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_r] \in \mathbb{R}^{r \times r}$, 且满足 $\tilde{s}_1 \geq \tilde{s}_2 \geq \dots \geq \tilde{s}_r \geq 0$ 。基于 RSVD 构造的截断解为

$$\tilde{x}_k = \sum_{i=1}^k \frac{\tilde{u}_i^T b}{\tilde{s}_i} \tilde{v}_i.$$

将这种随机化方法与截断奇异值方法结合并用于求解离散不适定问题(1.1), 此算法称为截断随机奇异值算法, 并在算法 2 中详细描述。

算法 2. 截断随机奇异值算法(TRSVD)

输入: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, δ, τ, k_{\max}
 输出: 正则解 x
 1. 生成一个高斯随机矩阵 $G \in \mathbb{R}^{n \times r}$
 2. 构造 $Y = AG \in \mathbb{R}^{m \times r}$
 3. 对 Y 进行 QR 分解并获得正交矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{m \times r}$
 4. 构造小规模矩阵 $B = Q^T A \in \mathbb{R}^{r \times n}$
 5. 计算 B 的 SVD 分解 $B = W \Sigma V^T$
 6. 构造 $\tilde{U}_r = QW$, 并使 $A \approx \tilde{U}_r \tilde{\Sigma}_r \tilde{V}_r^T$
 7. While $k < k_{\max}$

$$\tilde{x}_k = \sum_{i=1}^k \frac{\tilde{u}_i^T b}{\tilde{\sigma}_i} \tilde{v}_i.$$

IF $\|A\tilde{x}_k - b\|_2 < \tau\delta$

Break

ENDIF

End

3. 截断随机 SVD-Tikhonov 正则化混合方法

单独 tRSVD 通过截断小奇异值实现初步正则化, 但对中间奇异值方向的噪声仍可能放大。在截断低秩矩阵上引入 Tikhonov 正则化是一个值得考虑的正则化策略。首先, 对大规模问题(1.1)进行 tRSVD, 得到并引入 Tikhonov 正则化, 得到问题

$$x_{k,\lambda} = \operatorname{argxmin} \left\| \tilde{A}_k x - b \right\|_2^2 + \lambda^2 \|x\|_2^2 \tag{3.1}$$

其正规方程可表示为

$$\left(\tilde{A}_k^T \tilde{A}_k + \lambda^2 I \right) x = \tilde{A}_k^T b$$

或者

$$\left(\tilde{V}_k \tilde{\Sigma}_k^2 \tilde{V}_k^T + \lambda^2 I \right) x = \tilde{V}_k \tilde{\Sigma}_k \tilde{U}_k^T b.$$

问题(3.1)的 Tikhonov 正则化策略, 可对中间奇异值方向进一步平滑, 并防止噪声放大, 正则化参数 $\lambda > 0$ 可用差异原理、L-curve 或 GCV 等方法确定。

在截断子空间上, \tilde{A}_k 的奇异值为 $\tilde{\sigma}_1 \geq \tilde{\sigma}_2 \geq \dots \geq \tilde{\sigma}_k \geq 0$, 则解可以写为:

$$\tilde{x}_{k,\lambda} = \sum_{i=1}^k \frac{\tilde{\sigma}_i}{\tilde{\sigma}_i^2 + \lambda^2} (\tilde{u}_i^T b) \tilde{v}_i. \tag{3.2}$$

公式(3.2)中的正则化参数 λ 由差异原理确定, 使得正则化解的残差范数满足

$$\|A x_\lambda - b\|^2 \leq \eta \delta, \tag{3.3}$$

这里 $\eta > 1$ 通常是指定的。本文将这种对大规模问题(1.1)进行 tRSVD 并使用 Tikhonov 正则化的方法叫做截断随机 SVD-Tikhonov 正则化方法(TR-tRSVD), 并在算法 3 中详细描述。若不进行随机化, 而是将 Tikhonov 正则化策略和截断 SVD 算法结合, 则可得到截断 SVD-Tikhonov 正则化算法(TR-tSVD)。

算法 3. 截断随机 SVD-Tikhonov 正则化方法(TR-tRSVD)

输入: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, δ, τ, k_{\max}

输出: 正则解 x

1. 使用算法 2-2 生成 $A \approx \tilde{U}_k \tilde{\Sigma}_k \tilde{V}_k^T$
2. 差异原理确定正则化参数 λ , 满足(3.3)
3. 计算

$$\tilde{x}_{k,\lambda} = \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \frac{\tilde{\sigma}_i}{\tilde{\sigma}_i^2 + \lambda^2} (\tilde{u}_i^T b) \tilde{v}_i.$$

4. 数值实验

设 x_{true} 为真实图像, x_{iter} 为数值重建解, 则重建误差定义为相对二范数误差:

$$\text{RE} = \frac{\|x_{\text{iter}} - x_{\text{true}}\|_2}{\|x_{\text{true}}\|_2}$$

在图像处理中, 也可采用峰值信噪比(PSNR):

$$\text{PSNR} = 20 \log_{10} \frac{\max(x_{\text{true}})}{\|x_{\text{iter}} - x_{\text{true}}\|_2 / \sqrt{N^2}}.$$

考虑二维图像去模糊问题, 其离散化线性模型为

$$Ax = b + e$$

其中 $x \in R^{N^2}$ 表示按列堆叠后的原始图像, $b \in R^{N^2}$ 为观测到的模糊图像, e 表示噪声, 噪声向量由零均值单位协方差的高斯白噪声生成, 并按给定相对噪声水平 δ 进行缩放, 即

$$e = \delta \frac{\|b\|_2}{\|z\|_2} z, z \sim N(0,1)$$

模糊过程由二维高斯点扩散函数给出:

$$h(s,t) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{s^2+t^2}{2\sigma^2}\right)$$

其中 $\sigma > 0$ 控制模糊程度。在一维情形下, 高斯核在有限带宽 p 内离散化为

$$g_j = \exp\left(-\frac{(j-1)^2}{2\sigma^2}\right), j = 1, \dots, p$$

由此构造一个 $N \times N$ 的对称 Toeplitz 矩阵

$$T = \text{toeplitz}([g_1, \dots, g_p, 0, \dots, 0])$$

其中仅主对角线附近 $p - 1$ 个副对角线为非零。二维模糊算子可以表示为一维算子的 Kronecker 积:

$$A = \frac{1}{2\pi\sigma^2} (T \otimes T), A \in R^{N^2 \times N^2}. \tag{4.1}$$

由于高斯点扩散函数在频域中快速衰减, 算子 A 的奇异值呈指数级衰减并迅速趋近于零, 从而导致问题在 Hadamard 意义下严重不适定。

如表 1 所示, 给出了在(4.1)所定义的模糊算子作用下, 在加入了两种不同水平($\delta = 0.01$ 和 $\delta = 0.001$) 的噪音时, 使用 TR-tRSVD 和 TR-tSVD 算法对尺寸为 128×128 的医学图像图像 MRI 进行复原。在仿真实验中截断参数 k 由差异原理确定, 即满足(2.1), 而正则化参数 λ 由差异原理确定, 使正则解满足(3.3), 在本次实验中设置 $\eta = 1.1$, $\tau = 1.05$ 。并使用 PSNR、CPU 计算时间、截断参数和得到正则解的相对误差作为评价指标。表 1 中, 设置 $G \in \mathbb{R}^{N^2 \times r}$ ($r = 150$), 并设置当相邻解的相对误差小于 $1e-04$ 时停止计算, 表中数据显示, 在灰度图像恢复实验中, TR-tRSVD 算法相较于 TR-tSVD 算法, 得到的恢复图像数据, 能更快停止迭代, 解的数据的相对误差更小, PSNR 更高。在大规模离散不适定问题中, TR-tRSVD 相对于 TR-tSVD 算法, 由于其随机采样策略, 降低了问题规模, 这使得高频信息被尽可能被压缩, 能更快达到停止条件, 展现其更优越的计算效率。

Table 1. Performance comparison of TR-tSVD and TR-tRSVD algorithms in the grayscale image restoration experiment
表 1. TR-tSVD 和 TR-tRSVD 算法在灰度图像恢复实验中的性能比较

噪音水平	算法	截断参数	RE	PSNR	CPU time (s)
0.01	TR-tSVD	107	0.5138	22.69	483.36
	TR-tRSVD	68	0.4325	24.36	78.23
0.001	TR-tSVD	184	0.3143	26.1818	501.83
	TR-tRSVD	87	0.2521	28.17	89.36

图 1 所展示的是对应表 1 中, 当噪音水平为 0.001 时的(a) 原始图像, (b) 模糊加噪图像, 以及分别使用(c) TR-tSVD 和(d) TR-tRSVD 算法得到的恢复图像。

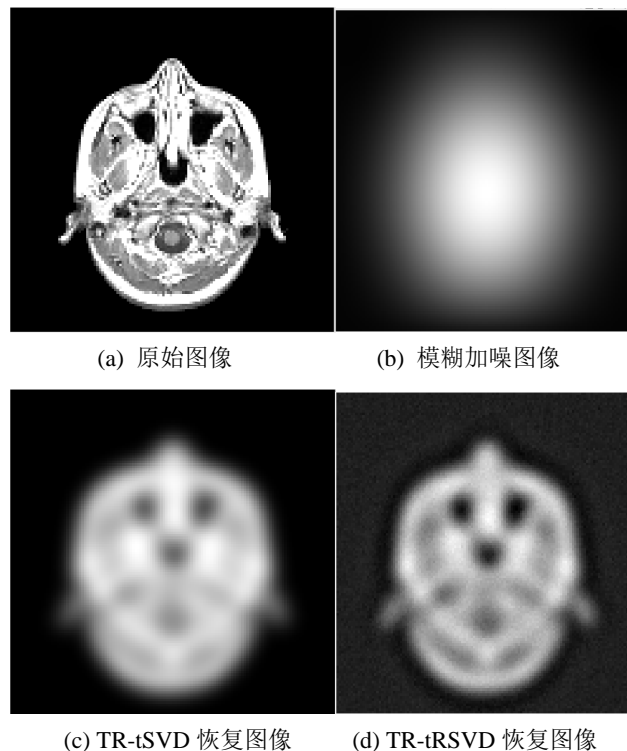


Figure 1. Restoration effect diagram of the grayscale image
图 1. 灰度图像的恢复效果图

5. 总结

TR-tRSVD 算法相较于 TR-tSVD 的主要优势在于其通过引入随机投影技术, 将原本需要对大规模张量进行完整 tSVD 分解的问题转化为在低维子空间中的小规模 SVD 计算, 从而显著降低了计算复杂度与内存开销。与此同时, TR-tRSVD 仅依赖矩阵 - 向量乘法运算, 具有更好的可扩展性, 能够高效应用于大规模和高维张量反问题。在精度方面, 通过合理选择截断秩及过采样参数, TR-tRSVD 可以在保持与 TR-tSVD 相当近似精度的同时, 大幅提升计算效率。因此, TR-tRSVD 在大规模张量数据处理与反问题求解中展现出更优的综合性能。

基金项目

项目名称: 传统工业图像恢复中大规模反问题的算法研究; 项目编号: KYZK2025014。

参考文献

- [1] Hansen, P.C. (1987) The Truncated SVD as a Method for Regularization. *BIT*, **27**, 534-553. <https://doi.org/10.1007/bf01937276>
- [2] Engl, H.W., Hanke, M. and Neubauer, A. (1996) Regularization of Inverse Problem. Kluwer Academic Publishers.
- [3] Avron, H., Maymounkov, P. and Toledo, S. (2010) Blendenpik: Supercharging Lapack's Least-Squares Solver. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **32**, 1217-1236. <https://doi.org/10.1137/090767911>
- [4] Brezinski, C., Rodriguez, G. and Seatzu, S. (2008) Error Estimates for Linear Systems with Applications to Regularization. *Numerical Algorithms*, **49**, 85-104. <https://doi.org/10.1007/s11075-008-9163-1>
- [5] Xu, P. (1998) Truncated SVD Methods for Discrete Linear Ill-Posed Problems. *Geophysical Journal International*, **135**, 505-514. <https://doi.org/10.1046/j.1365-246x.1998.00652.x>
- [6] Jia, Z. and Yang, Y. (2017) Modified TRSVD Algorithms for Large-Scale Discrete Ill-Posed Problems.
- [7] Bai, X., Huang, G., Lei, X., Reichel, L. and Yin, F. (2021) A Novel Modified TRSVD Method for Large-Scale Linear Discrete Ill-Posed Problems. *Applied Numerical Mathematics*, **164**, 72-88. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.08.019>
- [8] Xu, W., Shen, W. and Bai, Z.J. (2024) Two-Sided Uniformly Randomized GSVD for Large-Scale Discrete Ill-Posed Problems.
- [9] Noschese, S. and Reichel, L. (2014) A Modified Truncated Singular Value Decomposition Method for Discrete Ill-Posed Problems. *Numerical Linear Algebra with Applications*, **21**, 813-822. <https://doi.org/10.1002/nla.1938>
- [10] Hansen, P.C. and O'Leary, D.P. (1993) The Use of the L-Curve in the Regularization of Discrete Ill-Posed Problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **14**, 1487-1503. <https://doi.org/10.1137/0914086>
- [11] Hansen, P.C. (1998) Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion. Society for Industrial and Applied Mathematics. <https://doi.org/10.1137/1.9780898719697>
- [12] Halko, N., Martinsson, P.G. and Tropp, J.A. (2011) Finding Structure with Randomness: Probabilistic Algorithms for Constructing Approximate Matrix Decompositions. *SIAM Review*, **53**, 217-288. <https://doi.org/10.1137/090771806>