

1-坚韧分裂图的Prism-哈密顿性

李东烨, 胡晓敏*, 王 健

太原理工大学数学学院, 山西 太原

收稿日期: 2026年4月15日; 录用日期: 2026年5月8日; 发布日期: 2026年5月19日

摘 要

如果对于图 G 的任意割集 $S \subseteq V(G)$ 均有 $|S|/c(G-S) \geq t$, 则称图 G 是 t -坚韧的, 其中 $c(G-S)$ 表示 $G-S$ 的分支数。1973年, Chvátal 猜想存在常数 t_0 使得每个阶数 $n \geq 3$ 的 t_0 -坚韧图都是哈密顿图, 该猜想对于一般图至今仍未解决。图 G 的 Prism 定义为笛卡尔积 $G \square K_2$, 如果 $G \square K_2$ 是哈密顿图, 则称 G 是 Prism-哈密顿图。Kaiser 等猜想存在常数 t_1 , 使得每个 t_1 -坚韧图都是 Prism-哈密顿图, 并证明了若该猜想成立, 则 $t_1 \geq 9/8$ 。Kratsch 等证明了每个 $3/2$ -坚韧的分裂图都是哈密顿图, 并构造了一系列坚韧度小于 $3/2$ 且非哈密顿的分裂图, 从而 $3/2$ 是保证分裂图成为哈密顿图的最佳坚韧度下界。本文从更弱的坚韧度条件出发, 研究了 1-坚韧分裂图的 Prism-哈密顿性, 证明了 Kaiser 等的猜想对于 1-坚韧的分裂图成立。

关键词

坚韧度, 分裂图, Prism-哈密顿图

Prism-Hamiltonicity of 1-Tough Split Graphs

Dongye Li, Xiaomin Hu*, Jian Wang

College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: April 15, 2026; accepted: May 8, 2026; published: May 19, 2026

Abstract

A graph G is t -tough if $|S|/c(G-S) \geq t$ for every cutset $S \subseteq V(G)$, where $c(G-S)$ denotes the number of components of $G-S$. In 1973, Chvátal conjectured that there exists a constant t_0 such that every t_0 -tough graph of order $n \geq 3$ is Hamiltonian. This conjecture remains open for general graphs. The prism of a graph G is defined as the Cartesian product $G \square K_2$. A graph G is

*通讯作者。

called prism-Hamiltonian if $G \square K_2$ is Hamiltonian. Kaiser *et al.* conjectured that there exists a constant t_1 such that every t_1 -tough graph is prism-Hamiltonian, and proved that if the conjecture holds, then $t_1 \geq 9/8$. Kratsch *et al.* proved that every $3/2$ -tough split graph is Hamiltonian and constructed a family of non-Hamiltonian split graphs with toughness less than $3/2$, showing that $3/2$ is the best possible toughness lower bound for guaranteeing Hamiltonicity in split graphs. In this paper, starting from a weaker toughness condition, we study the prism-Hamiltonicity of 1-tough split graphs and prove that Kaiser's conjecture holds for 1-tough split graphs.

Keywords

Toughness, Split Graph, Prism-Hamiltonian

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文所考虑的图均为有限且无向的简单图(即不含重边和环的图)。设 G 为一个图。对于顶点 $v \in V(G)$, $N_G(v)$ 表示 v 在 G 中的邻域, $d_G(v) = |N_G(v)|$ 表示 v 的度数, G 的最小度记为 $\delta(G)$ 。对于非空子集 $S \subseteq V(G)$, 定义 $N_G(S) := (\bigcup_{x \in S} N_G(x)) \setminus S$ 。由 S 导出的子图记为 $G[S]$, 并称为 G 的导出子图。用 $G-S$ 表示由 $V(G) \setminus S$ 导出的子图。

如果连通图 G 的连通度 $\kappa(G)$ 满足 $\kappa(G) \geq k$, 即 G 在去掉任意至多 $k-1$ 个顶点后仍然连通, 则称 G 为 k -连通图。我们用 $c(G)$ 表示 G 的连通分支数。1973 年, Chvátal [1] 首次提出了坚韧度的概念, 非完全图 G 的坚韧度记为 $\tau(G)$, 定义为

$$\tau(G) = \min \left\{ \frac{|S|}{c(G-S)} : S \subseteq V(G), c(G-S) \geq 2 \right\}$$

而对于完全图 K_n , 则定义 $\tau(K_n) = +\infty$ 。对于实数 t , 如果图 G 满足 $\tau(G) \geq t$, 则称 G 是 t -坚韧的。根据坚韧度的定义, 可以证明每个 t -坚韧的非完全图都是 $\lceil 2t \rceil$ -连通的。如果图 G 中的圈包含 G 的所有顶点, 则称之为哈密顿圈。如果图 G 包含一个哈密顿圈, 则称图 G 为哈密顿图。容易验证, 每个哈密顿图都是 1-坚韧的, 但反之并不成立。Chvátal [1] 提出了如下坚韧度猜想:

猜想 1.1 ([1]) 存在常数 t_0 使得每个阶数 $n \geq 3$ 的 t_0 -坚韧图都是哈密顿图。

Bauer 等 [2] 构造了 $(9/4 - \epsilon)$ -坚韧的非哈密顿图, 从而证明了如果 Chvátal 的坚韧度猜想成立, 则 $t_0 \geq 9/4$ 。关于坚韧度的更多研究, 可参见综述 [3]。Chvátal 的坚韧度猜想对于一般图而言仍未解决, 但对于某些特殊图类, 已取得了一些重要进展。如每个 4-连通的平面图是哈密顿图 [4], 从而每个坚韧度 $\tau(G) > 3/2$ 的平面图是哈密顿图; 每个大于 1-坚韧的平面弦图 [5] 是哈密顿图; 每个 10-坚韧的弦图 [6] 是哈密顿图等。

近年来, 坚韧度与禁止子图的哈密顿性受到更广泛的研究。给定一个图 H , 如果图 G 不包含 H 作为其导出子图, 则称 G 为 H -禁止子图。我们用 P_n 和 K_n 分别表示具有 n 个顶点的路和完全图。

1978 年, Jung [7] 在 P_4 -禁止子图中建立了坚韧度与哈密顿性之间的重要联系:

定理 1.1 ([7]) 设 G 是阶数 $n \geq 3$ 的 P_4 -禁止子图。则 G 是哈密顿图当且仅当 G 是 1-坚韧的。

近期, Li 等[8]研究了限制至多 4 个点的禁止子图, 证明了 1-坚韧的 R -禁止子图是哈密顿图, 其中 R 是 P_4 , $P_3 \cup K_1$ 或 $K_2 \cup 2K_1$ 的一个导出子图; Broersma 等[9]证明了 25-坚韧的 $2K_2$ -禁止子图是哈密顿图; 随后, Shan [10]和 Ota 等[11]分别将这一结果改进到 3-坚韧和 2-坚韧。对于限制大于 4 个点的禁止子图, Shan [12]证明了 15-坚韧的 $(P_3 \cup P_2)$ -禁止子图是哈密顿图; Gao 等[13]证明了 7-坚韧的 $(P_3 \cup 2P_1)$ -禁止子图是哈密顿图; Shi 等[14]证明了 4-坚韧且 $2k$ -连通的 $(K_2 \cup kK_1)$ -禁止子图是哈密顿图; Xu 等[15]证明了对于正整数 $k \geq 2$, $(k-1)$ -坚韧的 $(K_2 \cup kK_1)$ -禁止子图是哈密顿图; Ota 等[16]证明了对于正整数 $k \geq 2$, 1-坚韧, k -连通且 $\delta(G) \geq \frac{3(k-1)}{2}$ 的 $(K_2 \cup kK_1)$ -禁止子图是哈密顿图。

图 G 的 Prism 定义为笛卡尔积 $G \square K_2$, 即取 G 的两个复制 G_1 和 G_2 , 并在 G_1 和 G_2 的每一对对应顶点之间添加一条边, 构成一个完美匹配后所得到的图。如果 $G \square K_2$ 是哈密顿图, 则称 G 是 Prism-哈密顿图。关于图的 Prism-哈密顿性, 目前已有一些很好的成果, 见[17]-[21]。

类似于 Chvátal [1]的坚韧度猜想, Kaiser 等[22]给出了如下有关坚韧度和 Prism-哈密顿图的猜想, 并证明了若该猜想成立, 则 $t_1 \geq 9/8$ 。

猜想 1.2 ([22]) 存在常数 t_1 , 使得每个 t_1 -坚韧图都是 Prism-哈密顿图。

Ellingham 等[23]将定理 1.1 中的坚韧度条件从 1-坚韧减弱为 1/2-坚韧, 研究了 P_4 -禁止子图的 Prism-哈密顿性。

定理 1.2 ([23]) 设 G 是阶数 $n \geq 2$ 的 P_4 -禁止子图。则 G 是 Prism-哈密顿图当且仅当 G 是 1/2-坚韧的。

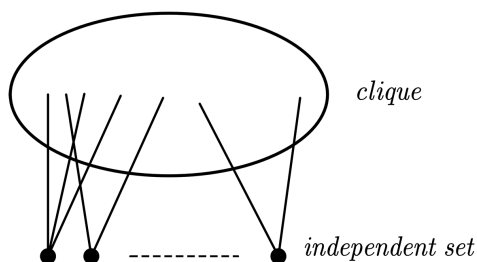


Figure 1. An example of split graphs
图 1. 一个分裂图举例

本文主要研究分裂图的 Prism-哈密顿性。如果连通图 G 的顶点集 $V(G)$ 可划分为一个团 K 和一个独立集 I , 则称 G 为分裂图(如图 1)。Kratsch 等[24]研究了分裂图的哈密顿性, 证明了如下定理。

定理 1.3 ([24]) 每个 3/2-坚韧的分裂图都是哈密顿图。

Chvátal [1]构造了一个 1-坚韧, 非哈密顿图的分裂图, Kratsch 等[24]拓展了 Chvátal 的反例, 构造了一系列非哈密顿图的分裂图 $\{G_l\}_{l=1}^{\infty}$, 其中每个图都不含 2-因子, 且对任意正整数 l , 有 $\tau(G_l) = \frac{3l}{2l+1}$ 。因此, 3/2 是保证分裂图成为哈密顿图的最佳坚韧度下界。

本文研究了分裂图在更弱坚韧度条件下的 Prism-哈密顿性, 主要定理如下。

定理 1.4 每个 1-坚韧的分裂图都是 Prism-哈密顿图。

2. 定理 1.4 的证明

定理 1.4 的证明需用到图论中经典的 Hall 定理[25], 该定理给出了二部图中存在一个匹配使得其覆盖某一部分所有顶点的充要条件。

引理 2.1 ([25]) 二部图 $G[X, Y]$ 存在一个覆盖 X 中所有顶点的匹配当且仅当

$$|N_G(S)| \geq |S| \quad \text{for all } S \subseteq X. \tag{1}$$

定理 1.4 的证明: 设 G 是一个 1-坚韧的分裂图, 则其顶点集可划分为 $V(G) = K \cup I$, 其中 K 是一个团, I 是一个独立集, 且 $K \cap I = \emptyset$. 设 $K = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$, $I = \{y_1, y_2, \dots, y_q\}$. 令 G_1 和 G_2 为 G 的两个复制, 其中 G_1 的顶点标记与 G 相同, 记为 $\{x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q\}$, G_2 中的顶点记为 $\{x_1', \dots, x_p', y_1', \dots, y_q'\}$. 令 $i = \{1, 2, \dots, p\}$, $j = \{1, 2, \dots, q\}$, 则 x_i 和 y_j 分别表示 x_i 和 y_j 在 G_2 中的对应顶点, 且有 $x_i x_i' \in E(G \square K_2)$, $y_j y_j' \in E(G \square K_2)$.

对任意子集 $I' \subseteq I$, 由 G 的 1-坚韧性, 有

$$\frac{|N_K(I')|}{|I'|} \geq \frac{|N_K(I')|}{c(G - N_K(I'))} \geq 1. \tag{2}$$

因此, 由引理 2.1 可知, 存在一个匹配 M 覆盖 I 中的所有顶点, 且 M 由 K 与 I 之间的边构成. 进一步地, 由 G 是 1-坚韧的, 取 $I' = I$, 则 $N_K(I) \subseteq K$, 且 $c(G - K) = |I|$, 故有

$$\frac{|K|}{c(G - K)} = \frac{|K|}{|I|} \geq 1, \tag{3}$$

即 $|K| \geq |I|$.

记 C 为一个有向圈, x 和 y 为图 G 中任意两个点, 我们用 $x\bar{C}y$ 表示从 x 沿 C 的方向到 y 的子路, 而 $y\bar{C}x$ 表示从 y 沿 C 的相反方向到 x 的相应子路.

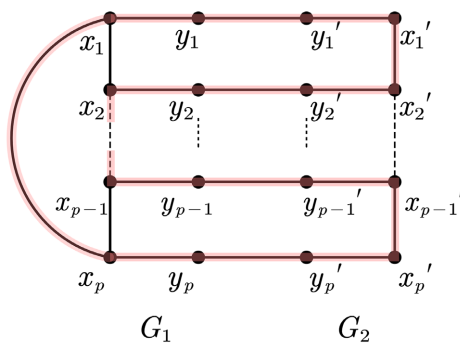
接下来, 我们根据 $|K|$ 与 $|I|$ 的大小关系以及 $|M|$ 的奇偶性进行讨论并构造 $G \square K_2$ 上的哈密顿圈.

情形 1 $|K| = |I|$ 且 $|M|$ 为偶数.

此时, 有 $p = q$ 且为偶数, 不妨设 $M = \{x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_p y_p\}$. 令 $C = x_1 x_2 \dots x_p x_1$ 为一个圈覆盖 K 中的所有顶点, 如图 2, 则

$$x_1 y_1 y_1' x_1' x_2 y_2 y_2' x_2' x_3 \dots x_{p-1} y_{p-1} y_{p-1}' x_{p-1}' x_p y_p y_p' x_p' x_1 \tag{4}$$

是 $G \square K_2$ 上的一个哈密顿圈.



$$y_1 x_2 y_2 y_2' x_2' y_3' y_3' \cdots x_{p-1}' x_{p-1}' y_{p-1}' y_{p-1}' x_p x_p x_1' y_1' y_1 \quad (5)$$

是 $G \square K_2$ 上的一个哈密顿圈。

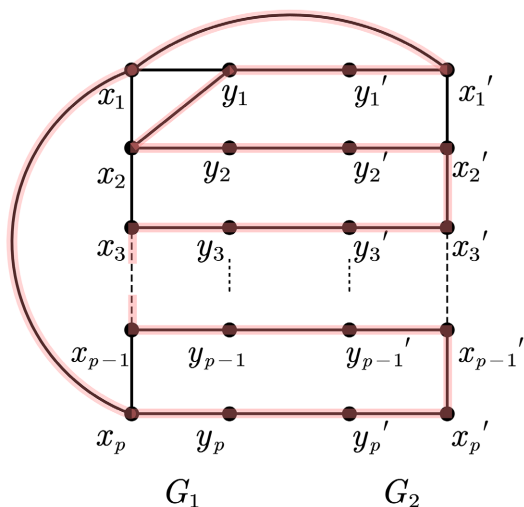


Figure 3. A Hamilton cycle in the prism over $G \square K_2$ when $|K|=|I|$ and $|M|$ is odd

图 3. $|K|=|I|$ 且 $|M|$ 为奇数时 $G \square K_2$ 上的哈密顿圈

情形 3 $|K| > |I|$ 且 $|M|$ 为偶数。

此时, 有 $p > q$ 且 $q = |M|$ 为偶数, 设 $M = \{x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_p y_p\}$ 。令 $C = x_1 x_2 \cdots x_p x_1$ 为一个圈覆盖 K 中的所有顶点, C' 为 G_2 中对应的圈。因为 K 是一个团, 则有 $x_p, x_{q-1}' \in E(G \square K_2)$ 。

因此, 如图 4,

$$x_p \bar{C} x_{q+1} x_q y_q y_q' x_q' x_{q+1}' \bar{C}' x_{p-1}' x_{q-1}' y_{q-1}' \cdots x_2 x_1' y_1' y_1 x_1 x_p \quad (6)$$

是 $G \square K_2$ 上的一个哈密顿圈。

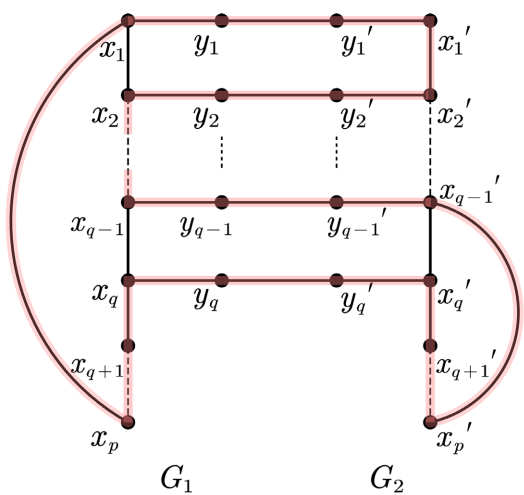


Figure 4. A Hamilton cycle in the prism over $G \square K_2$ when $|K| > |I|$ and $|M|$ is even

图 4. $|K| > |I|$ 且 $|M|$ 为偶数时 $G \square K_2$ 上的哈密顿圈

情形 4 $|K| > |I|$ 且 $|M|$ 为奇数。

此时, 有 $p > q$ 且 $q = |M|$ 为奇数, 设 $M = \{x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_p y_p\}$ 。令 $C = x_1 x_2 \dots x_p x_1$ 为一个圈覆盖 K 中的所有顶点, C' 为 G_2 中对应的圈。

因为 K 是一个团, 则有 $x_{p-1} x_{q-1} \in E(G \square K_2)$ 。

因此, 如图 5,

$$x_p \bar{C} x_q y_q y_q' x_q' \bar{C}' x_{p-1} x_{q-1} y_{q-1} \dots x_2 x_1 y_1 y_1' x_1' x_p' x_p \quad (7)$$

是 $G \square K_2$ 上的一个哈密顿圈。

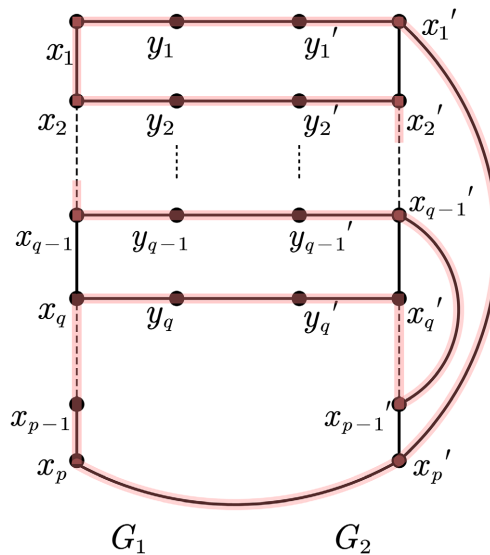


Figure 5. A Hamilton cycle in the prism over $G \square K_2$ when $|K| > |I|$ and $|M|$ is odd

图 5. $|K| > |I|$ 且 $|M|$ 为奇数时 $G \square K_2$ 上的哈密顿圈

综上所述, $G \square K_2$ 是哈密顿图, 定理 1.4 得证。

3. 总结和展望

本文围绕 Kaiser 等的猜想, 研究了 1-坚韧分裂图的 Prism-哈密顿性, 证明了该猜想对于 1-坚韧的分裂图成立。值得探讨的是, 本文将坚韧度条件从已知分裂图哈密顿性所需的 $3/2$ 降低至 1 以保障 Prism-哈密顿性, 其原因在于 Prism 构造引入了新的结构, 即图的两个复制对应点之间的新边。在哈密顿圈中, 某个特殊的小度点 v 将成为构造哈密顿圈的重要阻碍。然而, 在 $G \square K_2$ 中, v 对应两个点 $(v, 1)$ 与 $(v, 2)$, 且二者之间有边相连。一个 Prism-哈密顿圈可以在某一层访问 $(v, 1)$, 通过层间边连接至另一层, 遍历另一层中部分点后, 再通过其他路径返回, 从而有效绕过特殊点 v 破坏连通性的影响。

目前图的 Prism-哈密顿性研究更集中于度条件, 如度和条件、闭包条件、Chvátal-Erdős 条件等, 关于特殊图类 Prism-哈密顿性的已知结果有限, 更多集中于足够连通度的平面图, 近期有 $1/2$ -坚韧的 P_4 -禁止子图等。本文研究了一类特殊图, 即分裂图的 Prism-哈密顿性, 验证了 Kaiser 猜想对于分裂图成立, 证明更多的特殊图类是否为 Prism-哈密顿图是一个值得研究的方向。

本文所采用的构造性证明方法基于分裂图的结构特性, 即可划分为团和独立集两部分, 通过 Hall 定理构造了这两部分之间的一个匹配, 从而进一步构造 Prism-哈密顿圈。其核心在于: 利用团的高连通性

保障内部圈的存在性, 利用独立集的特性保证其在邻点在团中, 并利用二者之间的匹配连接作为桥梁切换两层结构以构造圈结构。对于其他同样具备类似于稠密子图和稀疏子图二分结构的图类, 例如某些 P_k -禁止子图, 其中 $k \geq 5$, 如果能够建立类似的划分并控制边的分布, 那么本文的构造框架或许可以经过适当修改后适用。这将是后续研究的一个可行方向, 即探索该方法在更广泛的可划分图类中的适用范围。根据坚韧度的定义可知, 1/2-坚韧即可保证图的连通性, 而连通图可能存在哈密顿路, 本文的分层构造圈结构的思路对于更低坚韧度的分裂图仍然有效, 只需进一步分析团和独立集之间边的情况, 即可构造所需的哈密顿圈。因此, 是否每个 1/2-坚韧的分裂图是 Prism-哈密顿图, 是一个值得进一步研究的问题。

基金项目

本研究得到国家自然科学基金(项目编号: 12001394)的资助。

参考文献

- [1] Chvátal, V. (1973) Tough Graphs and Hamiltonian Circuits. *Discrete Mathematics*, **5**, 215-228. [https://doi.org/10.1016/0012-365x\(73\)90138-6](https://doi.org/10.1016/0012-365x(73)90138-6)
- [2] Bauer, D., Broersma, H.J. and Veldman, H.J. (2000) Not Every 2-Tough Graph Is Hamiltonian. *Discrete Applied Mathematics*, **99**, 317-321. [https://doi.org/10.1016/s0166-218x\(99\)00141-9](https://doi.org/10.1016/s0166-218x(99)00141-9)
- [3] Bauer, D., Broersma, H. and Schmeichel, E. (2006) Toughness in Graphs—A Survey. *Graphs and Combinatorics*, **22**, 1-35. <https://doi.org/10.1007/s00373-006-0649-0>
- [4] Tutte, W.T. (1956) A Theorem on Planar Graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, **82**, 99-116. <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1956-0081471-8>
- [5] Böhme, T., Harant, J. and Tkáč, M. (1999) More than One Tough Chordal Planar Graphs Are Hamiltonian. *Journal of Graph Theory*, **32**, 405-410. [https://doi.org/10.1002/\(sici\)1097-0118\(199912\)32:4<405::aid-jgt8>3.0.co;2-z](https://doi.org/10.1002/(sici)1097-0118(199912)32:4<405::aid-jgt8>3.0.co;2-z)
- [6] Kabela, A. and Kaiser, T. (2017) 10-Tough Chordal Graphs Are Hamiltonian. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **122**, 417-427. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2016.07.002s>
- [7] Jung, H.A. (1978) On a Class of Posets and the Corresponding Comparability Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **24**, 125-133. [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(78\)90013-8](https://doi.org/10.1016/0095-8956(78)90013-8)
- [8] Broersma, H.J., Li, B. and Zhang, S. (2016) Forbidden Subgraphs for Hamiltonicity of 1-Tough Graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **36**, 915-929. <https://doi.org/10.7151/dmgt.1897>
- [9] Broersma, H., Patel, V. and Pyatkin, A. (2014) On Toughness and Hamiltonicity of $2K_2$ -Free Graphs. *Journal of Graph Theory*, **75**, 244-255. <https://doi.org/10.1002/jgt.21734>
- [10] Shan, S. (2019) Hamiltonian Cycles in 3-Tough $2K_2$ -Free Graphs. *Journal of Graph Theory*, **94**, 349-363. <https://doi.org/10.1002/jgt.22526>
- [11] Ota, K. and Sanka, M. (2022) Hamiltonian Cycles in 2-Tough $2K_2$ -Free Graphs. *Journal of Graph Theory*, **101**, 769-781. <https://doi.org/10.1002/jgt.22852>
- [12] Shan, S. (2021) Hamiltonian Cycles in Tough $(P_2 \cup P_3)$ -Free Graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **28**, P1.36. <https://doi.org/10.37236/8657>
- [13] Gao, Y. and Shan, S. (2022) Hamiltonian Cycles in 7-Tough $(P_2 \cup P_3)$ -Free Graphs. *Discrete Mathematics*, **345**, Article ID: 113069. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2022.113069>
- [14] Shi, L. and Shan, S. (2022) A Note on Hamiltonian Cycles in 4-Tough $(P_2 \cup P_3)$ -Free Graphs. *Discrete Mathematics*, **345**, Article ID: 113081. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2022.113081>
- [15] Xu, L., Li, C. and Zhou, B. (2024) Hamiltonicity of 1-Tough $(P_2 \cup P_3)$ -Free Graphs. *Discrete Mathematics*, **347**, Article ID: 113755. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2023.113755>
- [16] Ota, K. and Sanka, M. (2024) Some Conditions for Hamiltonian Cycles in 1-Tough $(K_2 \cup kK_1)$ -Free Graphs. *Discrete Mathematics*, **347**, Article ID: 113841. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2023.113841>

-
- [17] Ozeki, K. (2009) A Degree Sum Condition for Graphs to Be Prism Hamiltonian. *Discrete Mathematics*, **309**, 4266-4269. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2008.12.028>
- [18] Král, D. and Stacho, L. (2007) Closure for the Property of Having a Hamiltonian Prism. *Journal of Graph Theory*, **54**, 209-220. <https://doi.org/10.1002/jgt.20203>
- [19] Ellingham, M.N. and Salehi Nowbandegani, P. (2020) The Chvátal-Erdős Condition for Prism-Hamiltonicity. *Discrete Mathematics*, **343**, Article ID: 111709. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2019.111709>
- [20] Špacapan, S. (2024) Polyhedra without Cubic Vertices Are Prism-Hamiltonian. *Journal of Graph Theory*, **106**, 380-406. <https://doi.org/10.1002/jgt.23078>
- [21] Biebighauser, D.P. and Ellingham, M.N. (2008) Prism-Hamiltonicity of Triangulations. *Journal of Graph Theory*, **57**, 181-197. <https://doi.org/10.1002/jgt.20276>
- [22] Kaiser, T., Ryjáček, Z., Král, D., Rosenfeld, M. and Voss, H. (2007) Hamilton Cycles in Prisms. *Journal of Graph Theory*, **56**, 249-269. <https://doi.org/10.1002/jgt.20250>
- [23] Ellingham, M.N., Nowbandegani, P.S. and Shan, S. (2020) Toughness and Prism-Hamiltonicity of p_4 -Free Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **284**, 201-206. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2020.03.035>
- [24] Kratsch, D., Lehel, J. and Müller, H. (1996) Toughness, Hamiltonicity and Split Graphs. *Discrete Mathematics*, **150**, 231-245. [https://doi.org/10.1016/0012-365x\(95\)00190-8](https://doi.org/10.1016/0012-365x(95)00190-8)
- [25] Hall, P. (1935) On Representatives of Subsets. *Journal of the London Mathematical Society*, **1**, 26-30. <https://doi.org/10.1112/jlms/s1-10.37.26>