

利用洛必达法则和泰勒公式求解一元函数的极限

李光洁

广东外语外贸大学数学与统计学院, 广东 广州

收稿日期: 2026年4月29日; 录用日期: 2026年5月23日; 发布日期: 2026年6月2日

摘要

极限思想是微积分及高等数学中不可缺少的重要方法。本文先介绍了一元函数极限的基础知识; 其次, 探讨了利用洛必达法则求一元函数的极限; 进一步, 本文讨论了利用泰勒公式求一元函数的极限。本文的探讨将为一元函数的极限求解的学习提供帮助。

关键词

洛必达法则, 泰勒公式, 一元函数, 极限

Solving Limits of Univariate Functions Using L'Hôpital's Rule and Taylor's Formula

Guangjie Li

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou Guangdong

Received: April 29, 2026; accepted: May 23, 2026; published: June 2, 2026

Abstract

The concept of limit is an indispensable and important method in calculus and advanced mathematics. Firstly, this paper introduces the basic knowledge of the limit of univariate functions; secondly, it discusses the application of L'Hôpital's rule to solving the limit of univariate functions; furthermore, this paper explores the use of Taylor's formula for computing the limit of univariate functions. The discussion in this paper will provide assistance for the study of solving the limit of univariate functions.

Keywords

L'Hôpital's Rule, Taylor's Formula, Univariate Function, Limits



1. 引言

极限是高等数学的重要学习内容之一，也是微积分和数学分析的重要学习内容。高等数学中的大多数概念都是建立在其之上或与其密切相关。因此，理解函数的极限并掌握其计算方法对学好高等数学、微积分和数学分析都十分重要[1]。

洛必达法则是一种高效求解未定式极限的方法，在计算未定式极限中扮演着十分重要的角色。蒲松和夏嫦通过实例归纳了洛必达法则使用过程中学生容易犯的错误，帮助学生深入理解洛必达法则使用时的注意事项，避免后续使用时再次出错[2]。杨雄和周立芬讨论了洛必达法则的内容和证明并给出了相关的推广法则，并辅以例子进行说明[3]。赵萍萍、王丽霞和刘贵贤总结了求一元函数未定式极限的一般思路，并结合例题进行了详细分析，避免学生选择错误方法导致解析错误[4]。马利伟等运用泰勒公式研究了一类数列极限问题，分析了解题策略的实质，并讨论了泰勒公式的两种应用类型[5]。张曹煦和卢爽研究了，泰勒公式在求极限的题目中的应用并总结了泰勒公式求极限时的一般原则和注意点[6]。凌焕章等探讨了利用高阶泰勒公式解决第十一届全国大学生数学竞赛决赛的一道试题，体现了泰勒公式在解决复杂竞赛题目中的应用[7]。本文旨在研究洛必达法则和泰勒公式在求一元函数极限中的应用，并通过例题分析两种方法的使用。

本文余下结构：第二部分阐述了一元函数极限的定义与性质；第三部分探讨了利用洛必达法则求一元函数的极限；第四部分继续讨论了利用泰勒公式求一元函数的极限。

2. 一元函数极限的定义与性质([8] [9])

(1) 当 x 趋于 ∞ 时一元函数的极限

定义 1 设函数 $f(x)$ 为定义在 R 上的函数， A 为定数。若对任意的 $\varepsilon > 0$ ，存在正数 M ，使得当 $|x| > M$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称当 x 趋于 ∞ 时函数 $f(x)$ 以 A 为极限，记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty)。$$

(2) 当 x 趋于 x_0 时函数的极限

定义 2 设函数 $f(x)$ 为定义在 $U^\circ(x_0, \delta')$ 上的函数， A 为定数。若对任意的 $\varepsilon > 0$ ，存在正数 δ ($\delta < \delta'$)，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称当 x 趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 以 A 为极限，记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x_0 \rightarrow b)。$$

(3) 一元函数极限的性质

- (1) 唯一性：若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 存在，则能得出极限值 A 是唯一的。
- (2) 局部有界性：若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 存在，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某空心邻域 $U^\circ(x_0, \delta')$ 内有界。
- (3) 局部保号性：若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$ (或 < 0)，则对任意正数 $r < A$ (或 $r < -A$)，存在 $U^\circ(x_0)$ ，使得对任意 $x \in U^\circ(x_0)$ 有 $f(x) > r > 0$ (或 $f(x) < -r < 0$)。
- (4) 保不等式性：设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 都存在，且在点 x_0 的某个空心邻域 $U^\circ(x_0, \delta')$ 内有

$f(x) \leq g(x)$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)。$$

(5) 夹逼准则: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$, 且在点 x_0 的某个空心邻域 $U^\circ(x_0, \delta')$ 内有 $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A。$$

(6) 四则运算法则:

① 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 都存在, 则当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ 的极限也都存在且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)。$$

② 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$, 则当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)/g(x)$ 的极限存在且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}。$$

3. 利用洛必达法则求一元函数的极限

定理 1 ([8]) 若函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 满足如下条件:

- (1) 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 的极限都为 0 (或都为 ∞);
- (2) 在点 x_0 的某去心邻域 $U_0(x_0, \delta)$ 内, $f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x) \neq 0$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在,

则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{F'(x)}。$$

定理 2 ([8]) 若函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 满足如下条件:

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ (或为 ∞) 和 $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$ (或为 ∞);
- (2) 存在 $X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, $f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x) \neq 0$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在,

则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}。$$

注: 除了基本型未定式(0/0型和 ∞/∞ 型)还有其他型未定式(参阅[3]): $0 \cdot \infty$ 型、 $\infty - \infty$ 型、 0^0 型、 ∞^0 型、 1^∞ 型。常见的变形如下:

- 1) $0 \cdot \infty$ 型: $0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$ 或 $0 \cdot \infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$; 2) $\infty - \infty$ 型: 利用通分或提因式转化为 0/0 型和 ∞/∞ 型;

3) 0^0 型, ∞^0 型, 1^∞ 型: 采用取对数的方式, 转化成指数函数极限, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) \ln u(x)}$, 直接变成了求该函数的极限, 其中特别强调指数极限为 $0 \cdot \infty$ 型, 再化为 $0/0$ 型和 ∞/∞ 型的未定式进行计算。此外, 洛必达法则使用时的注意事项和常见误区可参阅文献[10]。

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$ 。

解 当 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时, $\sec x \rightarrow \infty$, $\tan x \rightarrow \infty$, 故此极限是一个 $\infty - \infty$ 型未定式。因为 $\sec x - \tan x = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$, 所以当 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时, 右端为 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 应用洛必达法则, 计算得

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0。$$

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$ 。

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x - \sin x \rightarrow 0$, $\sin^3 x \rightarrow 0$, 故此极限是一个 $\frac{0}{0}$ 型未定式。当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \sim x$, $\sin^3 x \sim x^3$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ 。利用洛必达法则和等价无穷小替换可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{2}。$$

4. 利用泰勒公式求一元函数的极限

对满足一定条件的未定式, 比如 $\frac{0}{0}$ 型、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型、 $0 \cdot \infty$ 型、 0^0 型、 1^∞ 型等, 洛必达法则具有较高的适用性, 但不太适合复杂函数的极限问题, 这是因为通常对分子分母同时求导, 反而使式子变得更加复杂, 针对这一类极限, 泰勒公式则表现出一定的优越性。

泰勒公式可将函数在某点展开为多项式形式[8] [9], 带有佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式内容为: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有 n 阶导数, 则在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内具有 $n+1$ 阶导数, 则对 $\forall x \in U(x_0)$, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

其中, x_0 为函数的展开点, $f^{(k)}(x_0)$ 表示函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的 k 阶导数 (k 从 0 到 n , $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$), $n!$ 为 n 的阶乘, $o((x - x_0)^n)$ 表示当 $x \rightarrow x_0$ 时, 比 $(x - x_0)^n$ 高阶的无穷小量。如果取 $x_0 = 0$, 那么可得带有佩亚诺余项的麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)。$$

利用泰勒公式可对形如 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} \right)$ 的 $\frac{0}{0}$ 型未定式求极限, 其中需要满足“上下同阶”的前提

条件, 也就是需让 $f(x)$ 扩展得到项 x^k , 且同时满足分母同次幂这一条件, 而对 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式求极限, 其

中需要的条件则变成“幂次最低”，换言之，将 $f(x)$ 和 $g(x)$ 扩展到 x 的最低次幂，且需要保证其最低次幂的系数不相等。

例 3 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right)$ 。

解 方法一(连续 3 次洛必达法则 + 等价无穷小替换)

当 $x \rightarrow 0$ 时， $\frac{1}{x^2} \rightarrow \infty$ ， $\frac{1}{\tan^2 x} \rightarrow \infty$ ，这是一个 $\infty - \infty$ 型的未定式，通分可化为 $\frac{0}{0}$ 型的未定式，且当 $x \rightarrow 0$ 时， $\tan x \sim x$ 。计算得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x - x^2}{x^2 \tan^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x - x^2}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x \sec^2 x - 2x}{4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \sec^2 x - x}{2x^3}, \end{aligned}$$

第二次使用洛必达法则，分子分母分别求导得

分子的导数： $\sec^2 x \cdot \sec^2 x + \tan x \cdot 2 \sec x \cdot \sec x \tan x - 1 = \sec^4 x + 2 \tan^2 x \sec^2 x - 1$ ；

分母的导数： $6x^2$ ，

第三次使用洛必达法则，分子分母继续分别求导得

分子的导数： $4 \sec^3 x \cdot \sec x \tan x + 4 \tan x \cdot \sec^2 x \cdot \sec^2 x + 2 \tan^2 x \cdot 2 \sec x \cdot \sec x \tan x$ ，
 $= 8 \sec^4 x \tan x + 4 \tan^3 x \sec^2 x$

分母的导数： $12x$ ，

结合 $\tan x \sim x (x \rightarrow 0)$ ，可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \arctan x}{\sin x - \tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x \sec^4 x + 4x^3 \sec^2 x}{12x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \sec^4 x + 4x^2 \sec^2 x}{12} \\ &= \frac{8}{12} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

方法二(利用泰勒公式)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x - x^2}{x^2 \tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x - x^2}{x^4},$$

因为 $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ ，所以 $\tan^2 x = x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$ ，

从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{2}{3}.$$

注：本题方法一中利用了 3 次洛必达法则和等价无穷小计算该极限，计算过程较为复杂，且容易出错。方法二中利用泰勒公式进行求解过程比较简单且能快速得出结果。

例 4 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \arctan x}{\sin x - \tan x}$ 。

解 方法一(连续 3 次洛必达法则)

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arcsin x \rightarrow 0$, $\arctan x \rightarrow 0$, $\sin x \rightarrow 0$ 且 $\tan x \rightarrow 0$, 故是一个 $\frac{0}{0}$ 型的未定式, 连续 2 次利用洛必达法则可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \arctan x}{\sin x - \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+x^2}}{\cos x - \sec^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} + \frac{2x}{(1+x^2)^2}}{-\sin x - 2\sec^2 x \tan x},$$

利用 2 次洛必达法则后, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 分子分母的极限此时仍然同为 0, 故还是一个 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 继续第 3 次利用洛必达法则求解得

$$\text{分子的导数: } \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{5/2}} + \frac{2-6x^2}{(1+x^2)^3};$$

$$\text{分母的导数: } -\cos x - 2\sec^4 x - 4\sec^2 x \tan^2 x,$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \arctan x}{\sin x - \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{5/2}} + \frac{2-6x^2}{(1+x^2)^3}}{-\cos x - 2\sec^4 x - 4\sec^2 x \tan^2 x} = \frac{1+2}{-1-2} = -1。$$

方法二(连续 2 次洛必达法则 + 等价无穷小代换)

第 1 次利用洛必达法则可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \arctan x}{\sin x - \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+x^2}}{\cos x - \sec^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2) - \sqrt{1-x^2}}{(\cos x - \sec^2 x)(1+x^2)\sqrt{1-x^2}},$$

代入 $x=0$, 化简得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \arctan x}{\sin x - \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2) - \sqrt{1-x^2}}{\cos x - \sec^2 x},$$

继续使用第 2 次洛必达法则, 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \arctan x}{\sin x - \tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{-\sin x - 2\sec^2 x \tan x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{-\sin x - 2\sec^3 x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(2 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)}{-\sin x (1 + 2\sec^3 x)}, \end{aligned}$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$, 故原式进一步化简为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \arctan x}{\sin x - \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-(1+2\sec^3 x)} = \frac{2+1}{-(1+2)} = -1。$$

方法三(利用泰勒公式)

由于分子和分母中的 $\arcsin x, \arctan x, \sin x$ 和 $\tan x$ 都能展成三阶的麦克劳林公式:

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3), \arcsin x = x + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3);$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3), \arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)。$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \arctan x}{\sin x - \tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - \left[x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \right]}{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - \left[x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} = -1. \end{aligned}$$

注: (1) 使用洛必达法则需逐次验证 $\frac{0}{0}$ 型的条件是否满足, 本题方法一中需连续使用 3 次洛必达法则才得到非不定式结果。计算过程较为繁琐且容易出错。

(2) 方法二中利用了 2 次洛必达法则和等价无穷小计算该极限, 计算过程比 3 次使用洛必达法则稍简单, 但计算过程中需注意边代入边计算化简且需要熟悉等价无穷小代换。

(3) 方法三中利用泰勒公式进行求解过程简单且易得出结果。对于此类含反三角函数的极限, 利用泰勒公式法进行求解通常更简便。

基金项目

广东省本科高校教学质量与教学改革工程建设项目“经管类大学数学课程教研室”(2023 年)、“数学思维与应用课程教研室”(2022 年), 校级本科课程思政改革示范项目“经管类大学数学课程思政示范团队”(2024 年), 校级教学研究与改革立项建设项目“新文科背景下大学数学课程群数智化改革与实践”(2024 年)。

参考文献

- [1] 李玉玲. 极限概念的建立及其重要作用[J]. 宝鸡文理学院学报(社会科学版), 2012, 32(S1): 142-144.
- [2] 蒲松, 夏嫦. 例谈高等数学中洛必达法则应用中的几个问题[J]. 数学学习与研究, 2016(13): 122.
- [3] 杨雄, 周立芬. 洛必达法则证明及其应用探讨[J]. 焦作师范高等专科学校学报, 2024, 40(4): 71-76.
- [4] 赵萍萍, 王丽霞, 刘贵贤. 一元函数未定式求极限的方法探讨[J]. 高等数学研究, 2025, 28(5): 16-18.
- [5] 马利伟, 聂于清, 付依柔, 等. 泰勒公式方法在一类数列极限求解中的应用[J]. 高等数学研究, 2025, 28(6): 35-37+40.
- [6] 张曹煦, 卢爽. 泰勒公式在复杂函数极限求解中的应用[J]. 高等数学研究, 2024, 27(5): 1-2, 12.
- [7] 凌焕章, 刘鑫旺, 沈艳. 利用高阶泰勒公式解决一类和式极限问题——以一道全国大学生数学竞赛试题为例[J]. 高等数学研究, 2022, 25(6): 51-54.

- [8] 华东师范大学数学系编. 数学分析(上册) [M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- [9] 同济大学数学科学院编. 高等数学(上册) [M]. 第 8 版. 北京: 高等教育出版社, 2023.
- [10] 李光洁, 王军威, 杨超. 浅谈洛必达法则及其在高中数学解题中的应用[J]. 理论数学, 2025, 15(12): 41-47.