

# 基于Hermite WENO格式的双曲守恒律高精度数值方法研究

王泽如, 刘红霞

太原理工大学数学学院, 山西 太原

收稿日期: 2026年5月23日; 录用日期: 2026年6月17日; 发布日期: 2026年6月23日

## 摘要

本文针对双曲守恒律方程, 构造并系统研究了有限差分Hermite WENO (HWENO)格式, 重点分析不同数值通量对格式精度、计算效率与间断分辨率的影响。在格式构造上, 将数值通量分解为低阶通量与高阶修正项, 采用HWENO重构得到半格点处的五阶精度近似, 并对高分辨率项进行中心差分与迎风分裂处理, 保证格式稳定性与收敛性。数值实验选取一维Euler方程的精度验证、Lax黎曼问题、Shu-Osher问题、双爆轰波相互作用等典型算例, 对比LF、LLF、HLL、HLLC、FORCE、FLIC等通量的性能。结果表明, HWENO格式具备良好的无振荡特性与激波分辨能力; LF通量计算成本最低但耗散最大、精度最差, HLL与HLLC通量在精度、间断分辨率和计算耗时之间达到最优平衡。本文所构建的HWENO格式可为流体力学问题提供高效可靠的数值模拟工具。

## 关键词

双曲守恒律, Hermite WENO格式, 数值通量, Euler方程, 高精度格式

# High-Order Numerical Method Based on Hermite WENO Scheme for Hyperbolic Conservation Laws

Zeru Wang, Hongxia Liu

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: May 23, 2026; accepted: June 17, 2026; published: June 23, 2026

## Abstract

In this paper, a finite difference Hermite WENO (HWENO) scheme is constructed and systematically

investigated for hyperbolic conservation laws, with a focus on analyzing the effects of different numerical fluxes on scheme accuracy, computational efficiency and discontinuity resolution. In the scheme construction, the numerical flux is decomposed into a low-order flux and a high-order correction term. Fifth-order accurate approximations at half-grid points are obtained via HWENO reconstruction, and central difference and upwind splitting are applied to high-resolution terms to ensure the stability and convergence of the scheme. Numerical experiments include typical cases such as accuracy test for one-dimensional Euler equations, Lax Riemann problem, Shu-Osher problem, double detonation wave interaction, where the performance of LF, LLF, HLL, HLLC, FORCE and FLIC fluxes is compared. The results demonstrate that the HWENO scheme exhibits excellent non-oscillatory behavior and shock-capturing capability. The LF flux has the lowest computational cost but the largest dissipation and the worst accuracy, while HLL and HLLC fluxes achieve the best balance among accuracy, discontinuity resolution and CPU time. The HWENO scheme developed in this paper can provide an efficient and reliable numerical simulation tool for problems in fluid mechanics.

## Keywords

Hyperbolic Conservation Laws, Hermite WENO Scheme, Numerical Flux, Euler Equations, High-Order Scheme

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

双曲守恒律方程是计算流体力学中的核心控制方程, 广泛应用于激波动力学、爆轰波传播、空气动力学等复杂流动问题的数值模拟[1] [2]。为准确捕获解中的间断结构并在光滑区域保持高阶精度, Liu、Osher 与 Chan [3]提出了加权本质无振荡(WENO)格式, 随后 Jiang 与 Shu [4]发展了经典的五阶有限差分 WENO 格式, 奠定了该领域的方法论基础[5]。在此基础上, Qiu 与 Shu [6] [7]提出了 Hermite WENO (HWENO)格式, 通过同时重构函数值及其导数值, 在更紧致的模板上实现了与传统 WENO 格式相当甚至更高的精度阶数, 有效降低了边界处理的复杂度, 适合长时间、高分辨率数值模拟[8]。

数值通量是有限差分格式的关键组成部分, 直接影响格式的耗散性、稳定性、计算效率与收敛特性。目前常用的数值通量包括: Lax 与 Friedrichs [9]提出的全局 Lax-Friedrichs (LF)通量及其局部变体(LLF), Harten、Lax 与 van Leer [10]提出的 HLL 通量, Toro、Spruce 与 Speares [11]发展的 HLLC 通量, 以及 Toro 与 Titarev [12]提出的 FORCE 和 FLIC 通量等。上述通量在传统 WENO 格式和 Godunov 型格式中已被广泛研究[2], 但在 HWENO 框架下, 不同数值通量对格式精度、间断分辨率与计算成本的综合影响仍缺乏系统的对比分析。

为弥补上述不足, 本文针对双曲守恒律方程构建五阶有限差分 HWENO 格式, 将数值通量分解为低阶通量与高阶修正项, 采用 HWENO 重构获得半格点处的五阶近似, 并结合迎风分裂与中心差分处理高分辨率项, 保证格式的稳定性与收敛性。时间推进采用三步 TVD Runge-Kutta 格式[13] [14]。通过一维 Euler 方程精度验证、Lax 黎曼问题[9]、Shu-Osher 问题[14]、双爆轰波相互作用等典型算例, 系统对比 LF、LLF、HLL、HLLC、FORCE、FLIC 六种通量的性能表现。结果表明, HLL 与 HLLC 通量在精度、耗散和计算效率之间达到最优平衡, 适用于复杂流动的高精度模拟。本文的研究可为双曲守恒律方程高精度数值方法的设计与通量选择提供理论与实践参考。

## 2. HWENO 格式的构造

本节主要描述求解守恒律的 HWENO 方法, 以及 HWENO 有限差分方法中所研究的数值通量。我们将重点讨论一维情况下的 HWENO 方法。

考虑如下标量非线性双曲守恒律:

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (1)$$

其中  $f(u)$  为凸光滑函数, 满足  $f''(u) \geq 0$ 。将方程(1)对  $x$  求导, 并记  $u_x = v$ , 得:

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, & u(x, 0) = u_0(x), \\ v_t + h(u, v)_x = 0, & v(x, 0) = v_0(x), \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$h(u, v) = f'(u)u_x = f'(u)v. \quad (3)$$

由式(3)可知, 导数方程的特征速度  $\frac{\partial h}{\partial v}$  即为  $f'(u)$ 。因此, 系统(2)中的两个方程具有相同的特征速度。这一结论为构造求解系统(2)的近似 Riemann 求解器提供了依据。

设定网格节点  $x_i = \left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta x$ , 其中  $\Delta x$  称为空间步长。定义离散单元  $I_i = \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right]$ , 其中心为  $x_i$ 。均匀网格的单元尺寸定义为  $\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ 。守恒律(2)可写作如下格式:

$$\begin{cases} \frac{du_i(t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} \left( \hat{f}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}} \right) \\ \frac{dv_i(t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} \left( \hat{h}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{h}_{i-\frac{1}{2}} \right) \end{cases} \quad (4)$$

其中,  $u_i(t), v_i(t)$  是均匀网格上解(2)在节点值  $u(x_i, t)$  和  $v(x_i, t)$  的数值近似。数值通量  $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}$  和  $\hat{h}_{i+\frac{1}{2}}$  基于精确或近似 Riemann 求解器, 且要求它们是相邻网格值  $u_i, v_i$  的 Lipschitz 连续函数, 并与物理通量  $f(u), h(u, v)$  保持一致。

具体而言, 我们采用一种替代方法来构造通量框架下的高阶保守有限差分格式数值通量。设计数值通量  $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}$  和  $\hat{h}_{i+\frac{1}{2}}$  满足:

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta x} \left( \hat{f}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}} \right) = \left. \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right|_{x=x_i} + O(\Delta x^r) \\ \frac{1}{\Delta x} \left( \hat{h}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{h}_{i-\frac{1}{2}} \right) = \left. \frac{\partial h(u, v)}{\partial x} \right|_{x=x_i} + O(\Delta x^{r-1}) \end{cases} \quad (5)$$

则当解光滑时, 保守差分格式(4)将是方程(2)的  $r$  阶近似。我们采用高阶通量, 其形式为低阶通量与修正项之和, 即:

$$\begin{cases} \hat{f}_{i+\frac{1}{2}} = \hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^L + \hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^H \\ \hat{h}_{i+\frac{1}{2}} = \hat{h}_{i+\frac{1}{2}}^L + \hat{h}_{i+\frac{1}{2}}^H \end{cases} \quad (6)$$

其中,  $\hat{f}^H$  和  $\hat{h}^H$  由 Taylor 展开生成:

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^H = -\frac{1}{24}\Delta x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{i+\frac{1}{2}} + \frac{7}{5760}\Delta x^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \Big|_{i+\frac{1}{2}} + O(\Delta x^6), \tag{7}$$

$$\hat{h}_{i+\frac{1}{2}}^H = -\frac{1}{24}\Delta x^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \Big|_{i+\frac{1}{2}} + \frac{7}{5760}\Delta x^4 \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \Big|_{i+\frac{1}{2}} + O(\Delta x^6). \tag{8}$$

我们可将守恒律(1)重写为(4)的半离散形式, 并采用(6)形式的通量。若  $u_{i+\frac{1}{2}}^+$  和  $v_{i+\frac{1}{2}}^+$  分别是  $u$  和  $v$  在  $x_{i+\frac{1}{2}}$  处的五阶近似, 则带有通量(7)~(8)的公式(4)将是方程(2)的五阶近似(此时  $r=5$ )。在本文中, 半离散系统(4)转化为常微分方程系统, 因此时间积分通过三步 TVD Runge-Kutta 格式完成。

### 2.1. 低阶通量项的构造

为构造低阶通量项  $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^L$  与  $\hat{h}_{i+\frac{1}{2}}^L$ , 需首先对单元界面处的变量值  $u_{i+\frac{1}{2}}^+$  与  $v_{i+\frac{1}{2}}^+$  进行重构。以下详细阐述由单元节点值  $u_i, v_i$  得到半格点处五阶精度 HWENO 插值结果的过程。变量  $u$  和  $v$  在半格点  $x = x_{i+\frac{1}{2}}$  处, 可分别通过左侧模板  $S^- = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$  和右侧模板  $S^+ = \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}$  进行加权重构, 得到界面处的左右近似值  $u_{i+\frac{1}{2}}^+$  与  $v_{i+\frac{1}{2}}^+$ 。以左侧近似值  $u_{i+\frac{1}{2}}^-$  和  $v_{i+\frac{1}{2}}^-$  为例说明构造方法, 右侧近似值  $u_{i+\frac{1}{2}}^+$  和  $v_{i+\frac{1}{2}}^+$  可通过镜像对称方式获得。

完整的五阶 HWENO 重构过程可表示为:

$$U_{i+\frac{1}{2}}^\pm \approx \sum_{j=0}^2 \omega_j p_j \left( x_{i+\frac{1}{2}} \right), \tag{9}$$

其中  $U = (u, v)^T$ ,  $p_j \left( x_{i+\frac{1}{2}} \right)$  为定义在半格点处的插值多项式, 其根据重构对象的不同, 在对应小模板上满足特定的插值性质。此外,  $\omega_j$  为非线性权重, 满足  $\omega_j \geq 0$  且  $\sum_{j=0}^2 \omega_j = 1$ 。

非线性权重  $\omega_j$  的具体表达式如下:

$$\omega_j = \frac{\bar{\omega}_j}{\sum_k \bar{\omega}_k}, \quad \bar{\omega}_k = \frac{\gamma_k}{(\beta_k + \varepsilon)^2}, \quad j, k = 0, 1, 2, \tag{10}$$

其中  $\gamma_j$  为线性权重, 满足一致性条件  $q \left( x_{i+\frac{1}{2}} \right) = \sum_{j=0}^2 \gamma_j p_j \left( x_{i+\frac{1}{2}} \right)$  且  $\sum_{j=0}^2 \gamma_j = 1$ 。  $q \left( x_{i+\frac{1}{2}} \right)$  为在偏置大模板上定义的插值多项式。  $\varepsilon$  为任意可避免分母为零的正实数, 本文中取  $\varepsilon = 10^{-6}$ 。  $\beta_j$  为光滑指示子, 采用如下定义:

$$\beta_j = \sum_{l=k}^r \int_{I_l} \Delta x^{2l-1} \left( \frac{\partial^l}{\partial x^l} p_j(x) \right)^2 dx, \tag{11}$$

其中求和上限  $r$  为多项式  $p_j(x)$  的次数, 下限  $k$  取决于重构对象: 重构  $u_{i+\frac{1}{2}}^+$  时取  $k=1$ , 重构  $v_{i+\frac{1}{2}}^+$  时取  $k=2$ 。

#### 2.1.1. $u_{i+\frac{1}{2}}^-$ 的构造

各子模板插值多项式及大模板多项式在半格点处的函数值为:

$$\begin{cases} p_0\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{4}\left(-5u_{i-1}+9u_i-3\Delta xv_{i-1}\right), \\ p_1\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{4}\left(u_i+3u_{i+1}-\Delta xv_{i+1}\right), \\ p_2\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{8}\left(-u_{i-1}+6u_i+3u_{i+1}\right), \\ q\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{64}\left(-8u_{i-1}+36u_i+36u_{i+1}-3\Delta xv_{i-1}-9\Delta xv_{i+1}\right). \end{cases} \quad (12)$$

对应的线性权重为  $\gamma_0 = \frac{1}{16}, \gamma_1 = \frac{9}{16}, \gamma_2 = \frac{3}{8}$ 。各子模板光滑指示子  $\beta_j$  的具体表达式可由式(11)直接计算得到, 详见文献[6]。

### 2.1.2. $v_{i+\frac{1}{2}}^-$ 的构造

各子模板插值多项式及大模板多项式在半格点处的函数值为:

$$\begin{cases} p_0\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{4\Delta x}\left(18u_{i-1}-18u_i+7\Delta xv_{i-1}+15\Delta xv_i\right), \\ p_1\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{4\Delta x}\left(-6u_i+6u_{i+1}-\Delta xv_i-\Delta xv_{i+1}\right), \\ p_2\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{8\Delta x}\left(u_{i-1}-8u_i+7u_{i+1}+2\Delta xv_i\right), \\ q\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{64\Delta x}\left(3u_{i-1}-96u_i+93u_{i+1}+\Delta xv_{i-1}-12\Delta xv_i-15\Delta xv_{i+1}\right). \end{cases} \quad (13)$$

对应的线性权重为  $\gamma_0 = \frac{1}{112}, \gamma_1 = \frac{15}{16}, \gamma_2 = \frac{3}{56}$ 。光滑指示子  $\beta_j$  的表达式同样由式(11)计算, 详见文献[6]。

至此, 完成了  $u_{i+\frac{1}{2}}^\pm$  和  $v_{i+\frac{1}{2}}^\pm$  的 HWENO 重构过程。将重构得到的界面值代入第 2.3 节中相应的数值通量公式, 即可完成低阶通量项  $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^L$  和  $\hat{h}_{i+\frac{1}{2}}^L$  的计算。

## 2.2. 高分辨率项的构造

本文采用简单的中心差分或单点偏迎风近似来构造这些项, 以保证精度的同时避免计算量较大的 HWENO 重构过程。

接下来对高分辨率项  $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^H$  和  $\hat{h}_{i+\frac{1}{2}}^H$  进行离散。为保证格式稳定性, 首先对通量  $f$  和  $h$  进行迎风分裂, 令  $f = f^+ + f^-$ 、 $h = h^+ + h^-$ , 其中

$$\begin{aligned} f^+ &= \frac{1}{2}(f(u) + \alpha u), & f^- &= \frac{1}{2}(f(u) - \alpha u), \\ h^+ &= \frac{1}{2}(h(u, v) + \alpha v), & h^- &= \frac{1}{2}(h(u, v) - \alpha v), \end{aligned}$$

其中  $\alpha = \max|f'(u)|$ 。由定义易知:

$$\frac{d}{du} f^+ \geq 0, \frac{d}{du} f^- \leq 0, \frac{\partial}{\partial v} h^+ \geq 0, \frac{\partial}{\partial v} h^- \leq 0.$$

定义节点值:

$$f_i^+ = \frac{1}{2}(f(u_i) + \alpha u_i), f_i^- = \frac{1}{2}(f(u_i) - \alpha u_i), h_i^+ = \frac{1}{2}(h(u_i, v_i) + \alpha v_i), h_i^- = \frac{1}{2}(h(u_i, v_i) - \alpha v_i).$$

此时, 二阶导数项与四阶导数项可近似为:

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^H = -\frac{1}{24}(\hat{f}_1^+)_{i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{24}(\hat{f}_1^-)_{i+\frac{1}{2}} + \frac{7}{5760}(\hat{f}_2^+)_{i+\frac{1}{2}} + \frac{7}{5760}(\hat{f}_2^-)_{i+\frac{1}{2}} + O(\Delta x^6), \tag{14}$$

$$\hat{h}_{i+\frac{1}{2}}^H = -\frac{1}{24}(\hat{h}_1^+)_{i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{24}(\hat{h}_1^-)_{i+\frac{1}{2}} + \frac{7}{5760}(\hat{h}_2^+)_{i+\frac{1}{2}} + \frac{7}{5760}(\hat{h}_2^-)_{i+\frac{1}{2}} + O(\Delta x^6). \tag{15}$$

其中各分量的具体表达式为:

$$\left\{ \begin{aligned} (\hat{f}_1^-)_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{5}{4} f_{i-1}^+ - f_i^+ - \frac{1}{4} f_{i+1}^+ + \frac{1}{2} h_{i-1}^+ + h_{i+1}^+, \\ (\hat{f}_1^+)_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{5}{4} f_{i+2}^- - f_{i+1}^- - \frac{1}{4} f_i^- - \frac{1}{2} h_{i+2}^- - h_i^-, \\ (\hat{f}_2^-)_{i+\frac{1}{2}} &= -12(f_{i-1}^+ - 2f_i^+ + f_{i+1}^+) - 6(h_{i-1}^+ - h_{i+1}^+), \\ (\hat{f}_2^+)_{i+\frac{1}{2}} &= -12(f_{i-1}^- - 2f_i^- + f_{i+1}^-) - 6(h_{i-1}^- - h_{i+1}^-), \\ (\hat{h}_1^-)_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4}(39f_{i-1}^+ - 48f_i^+ + 9f_{i+1}^+ + 21h_{i-1}^+ + 12h_i^+ - 3h_{i+1}^+), \\ (\hat{h}_1^+)_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4}(-9f_{i-1}^- + 48f_i^- - 39f_{i+1}^- - 3h_{i-1}^- + 12h_i^- + 21h_{i+1}^-), \\ (\hat{h}_2^-)_{i+\frac{1}{2}} &= 90(f_{i-1}^+ - f_{i+1}^+) + 30(h_{i-1}^+ + 4h_i^+ + h_{i+1}^+), \\ (\hat{h}_2^+)_{i+\frac{1}{2}} &= 90(f_{i-1}^- - f_{i+1}^-) + 30(h_{i-1}^- + 4h_i^- + h_{i+1}^-). \end{aligned} \right. \tag{16}$$

后续将列出本文所采用的数值通量形式, 并在下一小节对不同通量的数值表现进行对比分析。

### 2.3. 常用数值通量格式

在式(6)所建立的通量分解框架下, 低阶通量项可灵活选取任意单调数值通量。以下给出本文所考察的几类典型数值通量。

#### 2.3.1. Lax-Friedrichs (LF)通量与局部 Lax-Friedrichs (LLF)通量

LF 通量与 LLF 通量的表达式为:

$$\hat{f}^{LF}(u^-, u^+) = \frac{1}{2}[(f(u^-) + f(u^+)) - \alpha(u^+ - u^-)], \tag{17}$$

$$\hat{h}^{LF}(u^-, u^+; v^-, v^+) = \frac{1}{2}[(h(u^-, v^-) + h(u^+, v^+)) - \alpha(v^+ - v^-)]. \tag{18}$$

LF 通量中  $\alpha$  取  $|f'(u)|$  的全局上界, LLF 通量中  $\alpha$  仅取界面两侧的局部最大特征速度。导数方程沿用相同的  $\alpha$  值。

### 2.3.2. Harten-Lax-Van Leer (HLL) 通量

HLL 通量假设 Riemann 问题的解仅包含两列波, 将流场划分为三个常数状态区域。其定义为:

$$\hat{f}^{\text{HLL}}(u^-, u^+) = \begin{cases} f(u^-), & 0 \leq s^-, \\ \frac{s^+ f(u^-) - s^- f(u^+) + s^+ s^- (u^+ - u^-)}{s^+ - s^-}, & s^- \leq 0 \leq s^+, \\ f(u^+), & s^+ \leq 0, \end{cases} \quad (19)$$

$$\hat{h}^{\text{HLL}}(u^-, u^+; v^-, v^+) = \begin{cases} h(u^-, v^-), & 0 \leq s^-, \\ \frac{s^+ h(u^-, v^-) - s^- h(u^+, v^+) + s^+ s^- (v^+ - v^-)}{s^+ - s^-}, & s^- \leq 0 \leq s^+, \\ h(u^+, v^+), & s^+ \leq 0. \end{cases} \quad (20)$$

波速  $s^-$  与  $s^+$  的估计采用文献[2]中基于压力 - 速度的方法。HLL 格式未考虑接触间断, 对接触面的数值耗散偏大。

### 2.3.3. HLLC 通量

HLLC 通量在 HLL 基础上引入中间波速  $s^*$ , 恢复了接触间断与剪切波。其定义为:

$$\hat{f}^{\text{HLLC}}(u^-, u^+) = \begin{cases} f(u^-), & 0 \leq s^-, \\ f(u^-) + s^-(u^{*-} - u^-), & s^- \leq 0 \leq s^*, \\ f(u^+) + s^+(u^{*+} - u^+), & s^* \leq 0 \leq s^+, \\ f(u^+), & s^+ \leq 0, \end{cases} \quad (21)$$

其中  $\rho_x^K$ 、 $E_x^K$  为密度和总能量关于  $x$  的导数在  $K$  侧的取值。波速估计同 HLL 通量[2]。

导数方程通量  $\hat{h}^{\text{HLLC}}$  采用与  $\hat{f}^{\text{HLLC}}$  相同的三波结构, 代入  $h(u, v)$  与半格点导数值  $v^-$ 、 $v^+$ :

$$\hat{h}^{\text{HLLC}} = \begin{cases} h(u^-, v^-), & 0 \leq s^-, \\ h(u^-, v^-) + s^-(v^{*-} - v^-), & s^- \leq 0 \leq s^*, \\ h(u^+, v^+) + s^+(v^{*+} - v^+), & s^* \leq 0 \leq s^+, \\ h(u^+, v^+), & s^+ \leq 0. \end{cases}$$

中间导数状态  $v^{*K}$  与  $u^{*K}$  按相同 Riemann 结构定义, 波速  $s^-, s^+, s^*$  与  $\hat{f}^{\text{HLLC}}$  保持一致。

### 2.3.4. FORCE 通量与 FLIC 通量

FORCE 通量为 LF 通量与 Richtmyer 通量的算术平均:

$$\hat{f}^{\text{FORCE}}(u^-, u^+) = \frac{1}{2}(\hat{f}^{\text{LF}}(u^-, u^+) + \hat{f}^{\text{R}}(u^-, u^+)), \quad (22)$$

$$\hat{f}^{\text{R}}(u^-, u^+) = f(u^*), \quad u^* = \frac{1}{2}\left(u^- + u^+ - \frac{\Delta t}{\Delta x}(f(u^+) - f(u^-))\right). \quad (23)$$

导数方程通量  $\hat{h}^{\text{FORCE}}$  与  $\hat{h}^{\text{R}}$  的构造方式完全类似:

$$\hat{h}^{\text{FORCE}}(u^-, u^+; v^-, v^+) = \frac{1}{2}(\hat{h}^{\text{LF}}(u^-, u^+; v^-, v^+) + \hat{h}^{\text{R}}(u^-, u^+; v^-, v^+)), \quad (24)$$

$$\hat{h}^R(u^-, u^+; v^-, v^+) = h(u^*, v^*), \quad v^* = \frac{1}{2} \left( v^- + v^+ - \frac{\Delta t}{\Delta x} (h(u^+, v^+) - h(u^-, v^-)) \right). \quad (25)$$

FLIC 通量通过限制器在 FORCE 通量与 Richtmyer 通量之间自适应切换:

$$\hat{f}^{\text{FLIC}}(u^-, u^+) = \hat{f}^{\text{FORCE}}(u^-, u^+) + \phi_{i+1/2} \left[ \hat{f}^R(u^-, u^+) - \hat{f}^{\text{FORCE}}(u^-, u^+) \right], \quad (26)$$

其中限制器  $\phi_{i+1/2} = \min(\phi(r_{i-1/2}^-), \phi(r_{i+1/2}^+))$ ,  $r_{i-1/2}^- = \Delta q_{i-1/2} / \Delta q_{i+1/2}$ ,  $r_{i+1/2}^+ = \Delta q_{i+3/2} / \Delta q_{i+1/2}$ ,  $\Delta q_{i-1/2} = \bar{q}_i - \bar{q}_{i-1}$ ,  $q = E$ 。本文采用 minbee 限制器:

$$\phi(r) = \begin{cases} 0, & r \leq 0, \\ r, & 0 \leq r \leq 1, \\ 1, & r \geq 1. \end{cases}$$

导数方程采用相同的限制器。以上各类通量均可作为本文 HWENO 格式的低阶通量分量。

FORCE 导数通量为  $\hat{h}^{\text{LF}}$  与 Richtmyer 通量  $\hat{h}^R$  的平均值:

$$\hat{h}^{\text{FORCE}} = \frac{1}{2} (\hat{h}^{\text{LF}} + \hat{h}^R),$$

其中  $\hat{h}^R = h(u^*, v^*)$ ,  $v^*$  由一阶预测得到,  $v^-$ 、 $v^+$  为 HWENO 重构值。FLIC 通量  $\hat{h}^{\text{FLIC}}$  在  $\hat{h}^{\text{FORCE}}$  基础上加入限制器修正,  $v^-, v^+, v^*$  定义与 FORCE 一致。

### 3. 数值结果

本节通过若干典型数值算例, 系统比较基于 HWENO 格式的不同数值通量在计算精度、CPU 耗时及流动结构分辨能力方面的表现。首先采用本文构造的 HWENO 格式求解一维 Euler 方程。在笛卡尔坐标系下, 一维 Euler 方程的守恒形式为:

$$\begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix}_x = 0, \quad (27)$$

其中,  $\rho$  为密度,  $u$  为  $x$  方向的速度,  $E$  为总能量,  $p$  为压力。压力与总能量的关系为:

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u^2,$$

其中比热比  $\gamma = 1.4$ 。

#### 3.1. 格式精度验证算例

第一个测试算例为格式的有效精度验证问题。我们对一维非线性 Euler 方程组(27)进行求解, 初始条件设置为

$$\rho(x, 0) = 1 + 0.2 \sin(\pi x), \quad u(x, 0) = 1, \quad p(x, 0) = 1,$$

并采用周期边界条件。该问题的精确解为

$$\rho(x, t) = 1 + 0.2 \sin(\pi(x - t)), \quad u(x, t) = 1, \quad p(x, t) = 1.$$

数值计算推进至  $t = 2$ 。表 1 给出了不同通量的 CPU 耗时对比, 表 2 展示了密度  $\rho$  的数值误差与收敛阶数。LLF 通量的误差与 LF 基本一致, 故表中省略。由表 1 和表 2 可知, 所有通量均达到了五阶设计精度。HWENO-LF 与 HWENO-LLF 格式耗时最低但误差最大; HWENO-HLL 与 HWENO-HLLC 格式误差

约为HWENO-LF的40%~55%,耗时仅略有增加;HWENO-FLIC格式在 $L_1$ 范数下误差最小,仅为HWENO-LF的7%~10%,但耗时多约9%。可见在光滑问题中,不同通量的耗散差异对误差水平有显著影响。

**Table 1.** CPU time for HWENO methods with different fluxes

**表 1.** 不同通量下 HWENO 方法的 CPU 时间比较

LF	LLF	HLL	HLLC	FORCE	FLIC
61.7051	61.9344	62.9382	67.0252	66.5397	67.2668

**Table 2.** Comparison of density errors and convergence orders for Euler equations with different fluxes

**表 2.** 不同通量下 Euler 方程密度误差与收敛阶对比

$N$	Flux	$L_1$ error	$L_1$ order	error ratio	$L_\infty$ error	$L_\infty$ order	Error ratio
10	LF	5.42E-03		1.0000	7.82E-03		1.0000
	HLL	3.06E-03		0.5646	4.25E-03		0.5434
	HLLC	2.73E-03		0.5037	3.89E-03		0.4974
	FORCE	1.92E-03		0.3542	2.99E-03		0.3824
	FLIC	1.81E-03		0.3339	2.70E-03		0.3453
20	LF	2.37E-04	4.52	1.0000	3.71E-04	4.40	1.0000
	HLL	1.17E-04	4.71	0.4937	2.11E-04	4.33	0.5687
	HLLC	1.00E-04	4.77	0.4219	1.78E-04	4.45	0.4798
	FORCE	5.86E-05	5.03	0.2473	1.13E-04	4.73	0.3046
	FLIC	3.86E-05	5.55	0.1629	9.56E-05	4.82	0.2577
40	LF	7.11E-06	5.06	1.0000	1.31E-05	4.82	1.0000
	HLL	3.48E-06	5.07	0.4895	6.87E-06	4.94	0.5244
	HLLC	2.95E-06	5.08	0.4149	5.48E-06	5.02	0.4183
	FORCE	1.69E-06	5.12	0.2377	3.44E-06	5.03	0.2626
	FLIC	6.72E-07	5.84	0.0945	2.57E-06	5.21	0.1962
80	LF	2.18E-07	5.03	1.0000	4.09E-07	5.00	1.0000
	HLL	1.07E-07	5.02	0.4908	2.18E-07	4.98	0.5330
	HLLC	9.08E-08	5.02	0.4165	1.71E-07	5.00	0.4181
	FORCE	5.17E-08	5.03	0.2372	9.99E-08	5.11	0.2443
	FLIC	1.61E-08	5.38	0.0739	8.40E-08	4.94	0.2054
160	LF	6.69E-09	5.02	1.0000	1.22E-08	5.07	1.0000
	HLL	3.30E-09	5.02	0.4933	6.47E-09	5.07	0.5303
	HLLC	2.80E-09	5.02	0.4185	5.01E-09	5.09	0.4107
	FORCE	1.59E-09	5.02	0.2377	2.84E-09	5.14	0.2328
	FLIC	4.59E-10	5.13	0.0686	2.65E-09	4.99	0.2172
320	LF	2.00E-10	5.06	1.0000	3.42E-10	5.16	1.0000
	HLL	9.89E-11	5.06	0.4945	1.82E-10	5.15	0.5322
	HLLC	8.41E-11	5.06	0.4205	1.43E-10	5.13	0.4181
	FORCE	4.80E-11	5.05	0.2400	8.11E-11	5.13	0.2371
	FLIC	1.38E-11	5.06	0.0690	9.17E-11	4.85	0.2681

### 3.2. Lax 黎曼问题

第二个测试算例为 Lax 提出的经典黎曼问题, 初始条件为:

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (0.445, 0.698, 3.528), & x \leq 0, \\ (0.5, 0, 0.571), & x > 0. \end{cases}$$

本算例用于检验不同格式对非物理振荡的抑制能力。计算域为  $[-5, 5]$ , 单元数为 200, 终止时间为  $t = 1.3$ 。图 1 中绘制了密度  $\rho$  的计算结果与参考解的对比, 并给出了包含接触间断和激波的  $[-1, 4]$  区域的局部放大图。结果表明, HWENO-HLL 与 HWENO-HLLC 格式对间断的分辨率略优于 HWENO-LF 格式, 其余格式的表现则与 HWENO-LF 格式相近。

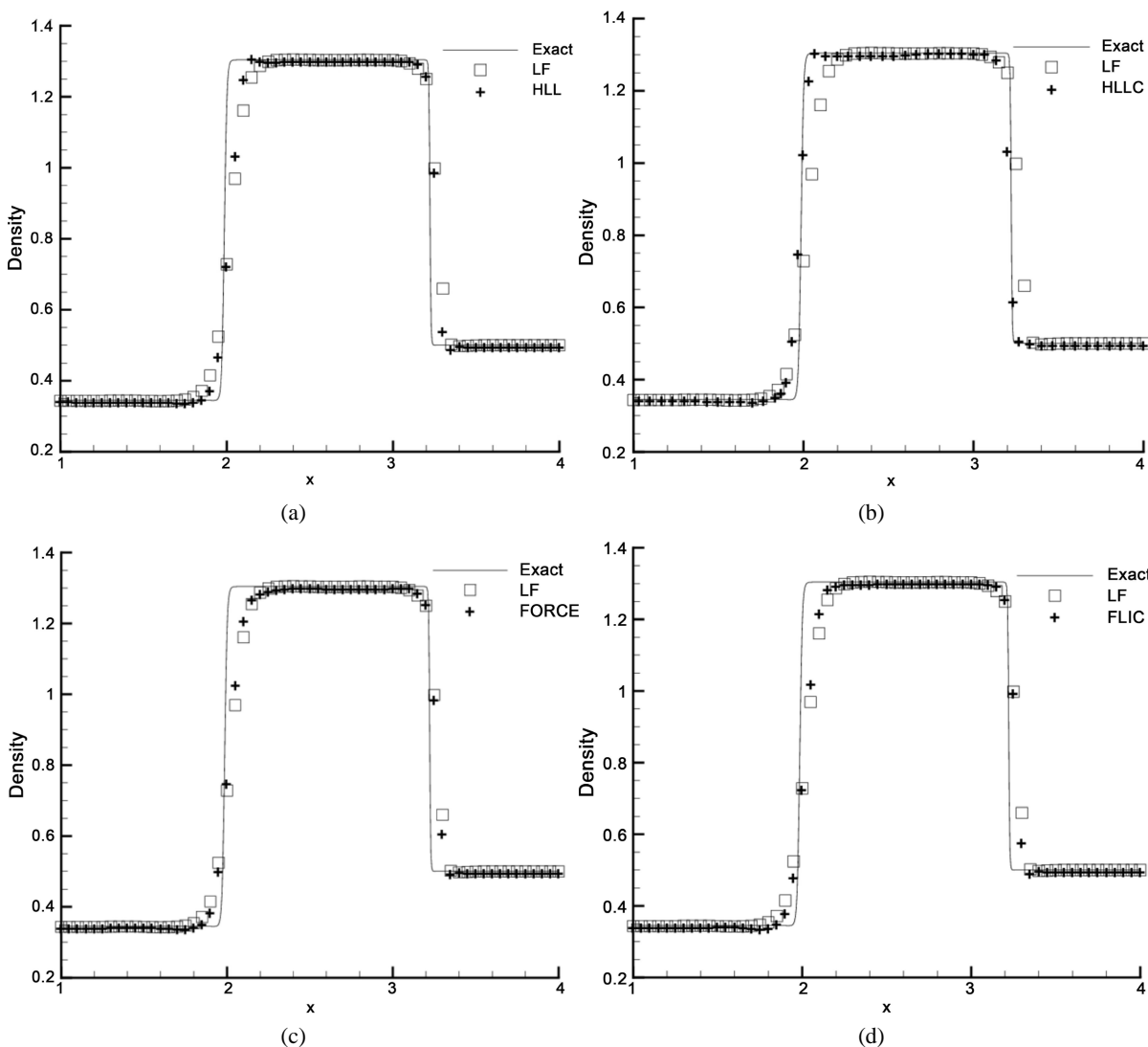


Figure 1. Comparison of density profiles for the Lax Riemann problem  
图 1. Lax 黎曼问题密度分布对比

### 3.3. Shu-Osher 问题

本算例求解 Euler 方程(27), 模拟马赫数为 3 的移动激波与密度正弦波的相互作用, 即经典的 Shu-

Osher 问题。该问题的解同时包含激波与复杂的光滑结构, 能够有效检验不同高阶格式的高分辨率特性。初始条件为:

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (3.857143, 2.629369, 10.333333), & x < -4, \\ (1 + \varepsilon \sin 5x, 0, 1), & x \geq -4. \end{cases}$$

其中  $\varepsilon = 0.2$ 。计算域为  $[-5, 5]$ , 单元数为 300。图 2 中绘制了  $t = 1.8$  时刻的密度  $\rho$  分布, 并与采用 2000 个网格点的五阶 WENO 格式计算得到的参考解进行对比, 同时给出了光滑区域内复杂波形结构的  $[0.5, 2.5]$  局部放大图。对比结果显示, 其余五种通量对该算例中复杂波结构的分辨率均优于 HWENO-LF 格式, 且彼此间表现相近。

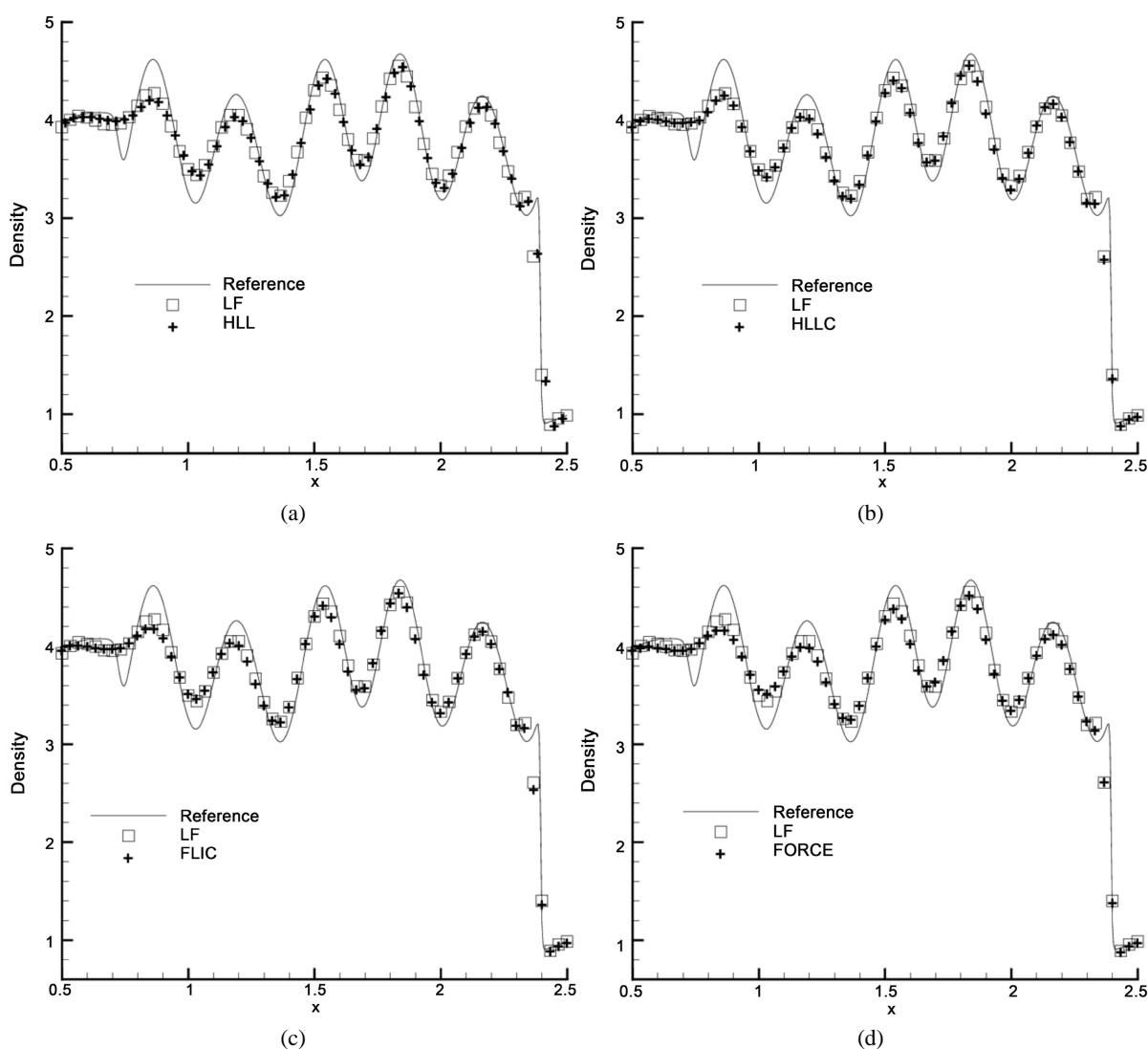


Figure 2. Comparison of density profiles for the Shu-Osher problem

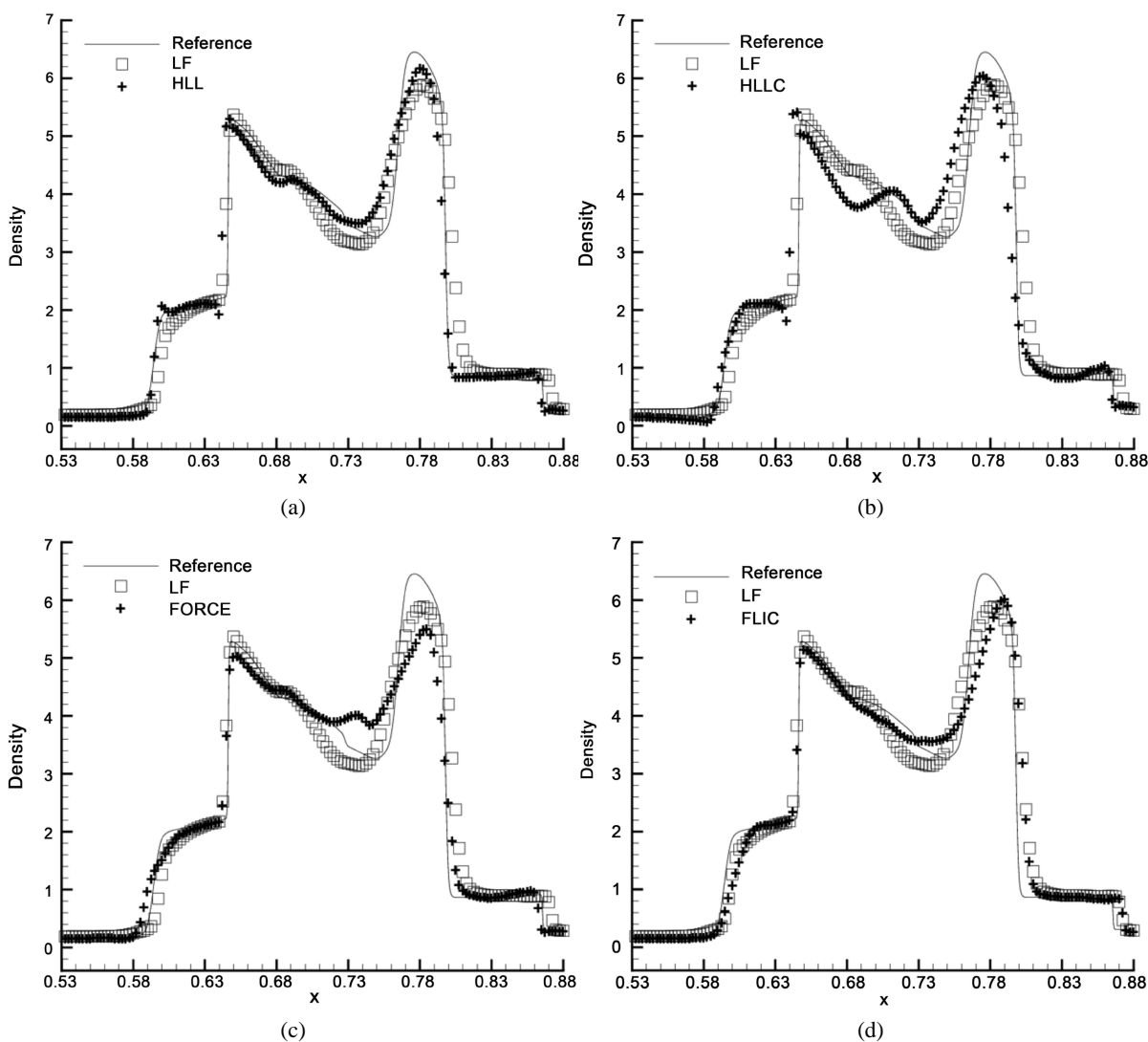
图 2. Shu-Osher 问题密度分布对比

### 3.4. 双爆轰波相互作用问题

本算例求解 Euler 方程(27)描述的双爆轰波相互作用黎曼问题, 计算域为  $[0, 1]$ , 初始条件为:

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0, 1000), & 0 \leq x < 0.1, \\ (1, 0, 0.01), & 0.1 \leq x < 0.9, \\ (1, 0, 100), & 0.9 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

计算域两端均采用反射边界条件。在  $t = 0.038$  时刻, 绘制了采用 400 个单元的密度分布, 并与采用 2000 个网格点的五阶 WENO 格式参考解进行对比, 同时给出了包含接触间断和激波的  $[0.53, 0.88]$  区域的局部放大图。如图 3 所示, 对比结果表明, HWENO-LF 格式的分辨率最差; HWENO-HLL 和 HWENO-HLLC 格式的表现相对更优。综合前述算例的分析, HWENO-HLL 和 HWENO-HLLC 格式在求解双曲守恒律方程时表现更佳。



**Figure 3.** Comparison of density profiles for the double detonation wave interaction  
**图 3.** 双爆轰波相互作用问题密度分布对比

#### 4. 结论

本文构造了求解双曲守恒律方程的五阶有限差分 HWENO 格式, 将数值通量分解为低阶通量与高阶

修正项, 并采用 HWENO 重构实现半格点处的高精度近似。通过多个典型算例, 系统对比了 LF、LLF、HLL、HLLC、FORCE、FLIC 六种数值通量的精度、耗散、间断分辨率与计算效率。数值结果表明, HWENO 格式具有优异的无振荡特性与激波捕获能力; LF 通量计算成本最低但耗散最大、精度较差; HLL 与 HLLC 通量在精度、间断分辨率和计算效率之间达到最优平衡, 更适合复杂流动模拟。本文所构建的 HWENO 格式可为流体力学相关问题提供高效可靠的高精度数值模拟方法。本文结论主要基于一维问题, 后续将把所提方法推广至多维双曲守恒律问题。

## 参考文献

- [1] LeVeque, R.J. (2002) *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511791253>
- [2] Toro, E.F. (2009) *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. 3rd Edition, Springer.
- [3] Liu, X.D., Osher, S. and Chan, T. (1994) Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes. *Journal of Computational Physics*, **115**, 200-212. <https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1187>
- [4] Jiang, G.S. and Shu, C.W. (1996) Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes. *Journal of Computational Physics*, **126**, 202-228. <https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0130>
- [5] Shu, C.W. (1998) Essentially Non-Oscillatory and Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. In: Cockburn, B., et al., Eds., *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations*, Springer, 325-432. <https://doi.org/10.1007/bfb0096355>
- [6] Qiu, J.X. and Shu, C.W. (2004) Hermite WENO Schemes and Their Application as Limiters for Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Method: One-Dimensional Case. *Journal of Computational Physics*, **193**, 115-135. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.07.026>
- [7] Qiu, J. and Shu, C. (2005) Hermite WENO Schemes and Their Application as Limiters for Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Method II: Two Dimensional Case. *Computers & Fluids*, **34**, 642-663. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2004.05.005>
- [8] Zhao, Z. and Qiu, J.X. (2020) A Hermite WENO Method with Modified Ghost Fluid Method for Compressible Two-Medium Flow Problems. *Communications in Computational Physics*, **28**, 743-773.
- [9] Lax, P.D. (1954) Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **7**, 159-193. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160070112>
- [10] Harten, A., Lax, P.D. and Leer, B.V. (1983) On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *SIAM Review*, **25**, 35-61. <https://doi.org/10.1137/1025002>
- [11] Toro, E.F., Spruce, M. and Speares, W. (1994) Restoration of the Contact Surface in the HLL-Riemann Solver. *Shock Waves*, **4**, 25-34. <https://doi.org/10.1007/bf01414629>
- [12] Toro, E.F. and Titarev, V.A. (2006) MUSTA Fluxes for Systems of Conservation Laws. *Journal of Computational Physics*, **216**, 403-429. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.12.012>
- [13] Gottlieb, S. and Shu, C. (1998) Total Variation Diminishing Runge-Kutta Schemes. *Mathematics of Computation*, **67**, 73-85. <https://doi.org/10.1090/s0025-5718-98-00913-2>
- [14] Shu, C.W. and Osher, S. (1989) Efficient Implementation of Essentially Non-Oscillatory Shock-Capturing Schemes, II. *Journal of Computational Physics*, **83**, 32-78. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(89\)90222-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(89)90222-2)