

# 基于HWENO格式的不同数值通量性能对比研究

魏晨嘉, 刘红霞

太原理工大学数学学院, 山西 太原

收稿日期: 2026年5月23日; 录用日期: 2026年6月17日; 发布日期: 2026年6月30日

## 摘要

为对比不同数值通量与HWENO格式结合的性能, 本文以一维及二维双曲守恒律方程为研究对象, 构造了基于多种典型数值通量的有限差分HWENO格式, 阐述了格式构造流程与各通量实现细节。通过多个经典算例, 从收敛阶数、计算效率与间断分辨率三方面定量对比了不同通量下的格式表现。结果表明, Godunov和EO通量格式间断分辨率最优但计算成本较高, 而LF通量格式成本最低但数值耗散最大。本研究为双曲守恒律高阶数值方法的通量选取提供了参考。

## 关键词

双曲守恒律, HWENO格式, 数值通量, 收敛精度, 间断分辨率

# Performance Comparison of Different Numerical Fluxes Based on HWENO Schemes

Chenjia Wei, Hongxia Liu

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: May 23, 2026; accepted: June 17, 2026; published: June 30, 2026

## Abstract

To compare the performance of HWENO schemes combined with different numerical fluxes, this paper takes one- and two-dimensional hyperbolic conservation laws as the research objects, constructs finite difference HWENO schemes based on several typical numerical fluxes, and elaborates the construction process of the schemes and the implementation details of each flux. Through several classical numerical examples, the performance of the schemes with different fluxes is quantitatively compared from three aspects: convergence order, computational efficiency and discontinuity

**resolution. The results show that the HWENO schemes with Godunov and EO fluxes have the best discontinuity resolution but high computational cost, while the LF flux scheme has the lowest cost but the largest numerical dissipation. This study provides a reference for the selection of numerical fluxes in high-order numerical methods for hyperbolic conservation laws.**

## Keywords

**Hyperbolic Conservation Laws, HWENO Schemes, Numerical Flux, Convergence Accuracy, Discontinuity Resolution**

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

双曲守恒律方程在流体力学、空气动力学等领域应用广泛, 其解常包含激波等间断结构, 对数值格式的精度和稳定性要求很高。高阶数值格式能在较少网格下获得高精度结果, 是当前的研究热点, 其中 WENO 格式因能稳定捕捉间断而被广泛使用。

HWENO 格式是 WENO 的改进形式, 它同时利用函数值和导数值进行重构, 模板更紧凑、效率更高, 适合复杂流动问题。数值通量是这类格式的关键部分, 不同通量[1]-[3] (如 LF、Godunov、EO、MUSTA 等)在耗散特性和计算效率上差异明显, 对比它们与 HWENO 格式结合的性能, 对提升求解效果很有意义。

本文以一维和二维双曲守恒律方程为研究对象, 介绍了有限差分 HWENO 格式的构造方法, 将多种典型数值通量嵌入格式中, 并扩展到二维问题。通过精度测试、黎曼问题等算例, 对比了不同通量下格式的收敛精度、计算效率和间断捕捉能力, 验证了方法的有效性, 为实际应用中选择合适的通量提供了参考。

## 2. 构造 HWENO 格式

本节将重点阐述守恒律问题的 HWENO 方法, 以及后续将与 HWENO 有限差分格式联合开展研究的数值通量。我们首先针对一维情形下的 HWENO 方法展开讨论。

考虑如下标量非线性双曲守恒律方程:

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (2.1)$$

这里  $f(u)$  是光滑的凸通量函数, 且其二阶导数  $f''(u) > 0$ 。对守恒律方程(2.1)关于空间坐标  $x$  求导, 并引入记号  $u_x = v$ , 可导出如下形式的耦合双曲方程组

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, & u(x, 0) = u_0(x) \\ v_t + g(u, v)_x = 0, & v(x, 0) = v_0(x). \end{cases} \quad (2.2)$$

其中,

$$g(u, v) = f'(u)u_x = f'(u)v. \quad (2.3)$$

根据式(2.3), 易知该导数方程的特征速度为  $f'(u)$ 。因此, 对于方程组(2.2)中的两个方程具有相同的特征速度, 这一结论将在后续用于构造求解方程组(2.2)的简单近似黎曼求解器[4] [5]。

定义网格为  $x_i = (i-1/2)\Delta x$ , 其中,  $\Delta x$  为空间步长。记以  $x_i$  为中心的离散单元为  $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ , 均匀单元尺寸由  $\Delta x$  定义。守恒律方程组(2.2)可写为如下常微分方程组(ODE):

$$\begin{cases} \frac{du_i(t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x}(\hat{f}_{i+1/2} - \hat{f}_{i-1/2}) \\ \frac{dv_i(t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta y}(\hat{g}_{i+1/2} - \hat{g}_{i-1/2}) \end{cases} \quad (2.4)$$

其中,  $u_i(t)$   $v_i(t)$  是方程组(2.2)的解在均匀网格节点处  $u(x_i, t)$ ,  $v(x_i, t)$  的数值近似。数值通量  $\hat{f}_{i+1/2}$  和  $\hat{g}_{i+1/2}$  基于精确或近似黎曼求解器构造, 需满足: 为关于相邻  $u_i(t)$   $v_i(t)$  的 Lipschitz 连续函数, 且与物理通量  $f(u)$  和  $g(u, v)$  相容。

具体而言, 我们将采用文献[6]中通量框架下的另一种方法, 构造高阶守恒型有限差分格式的数值通量。数值通量  $\hat{f}_{i+1/2}$  和  $\hat{g}_{i+1/2}$  需满足

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta x}(\hat{f}_{i+1/2} - \hat{f}_{i-1/2}) = f(u)_x|_{x=x_i} + O(\Delta x^r) \\ \frac{1}{\Delta x}(\hat{g}_{i+1/2} - \hat{g}_{i-1/2}) = g(u, v)_x|_{x=x_i} + O(\Delta x^{r-1}) \end{cases} \quad (2.5)$$

当解光滑时, 守恒型差分格式(2.4)即为方程(2.2)的  $r$  阶近似。我们采用高阶通量的构造方式: 由低阶通量加上修正项构成[7], 形式如下:

$$\begin{cases} \hat{f}_{i+1/2} = \hat{f}_{i+1/2}^L + \hat{f}_{i+1/2}^H \\ \hat{g}_{i+1/2} = \hat{g}_{i+1/2}^L + \hat{g}_{i+1/2}^H \end{cases} \quad (2.6)$$

其中, 高阶修正项  $\hat{f}_{i+1/2}^H$  和  $\hat{g}_{i+1/2}^H$  通过泰勒展开得到:

$$\hat{f}_{i+1/2}^H = a_2 \Delta x^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{i+1/2} + a_4 \Delta x^4 \left( \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right)_{i+1/2} + \dots + O(\Delta x^{2m+1}), \quad (2.7)$$

$$\hat{g}_{i+1/2}^H = a_2 \Delta x^2 \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)_{i+1/2} + a_4 \Delta x^4 \left( \frac{\partial^4 g}{\partial x^4} \right)_{i+1/2} + \dots + O(\Delta x^{2m}), \quad (2.8)$$

常数  $a_2, a_4, \dots, a_{2m-2}, \dots$  的选取需保证数值通量(2.6)在式(2.5)中达到  $2m+1$  阶精度。下文将重点讨论低阶通量项  $\hat{f}_{i+1/2}^L$  和  $\hat{g}_{i+1/2}^L$ 。

具体而言, 数值通量  $\hat{f}_{i+1/2}^L$  和  $\hat{g}_{i+1/2}^L$  可采用任意形式的通量, 其中,  $u_{i+1/2}^\pm$  与  $v_{i+1/2}^\pm$  分别为  $u$  与  $v$  在界面  $x_{i+1/2}$  处的近似值。该数值通量构造方式的核心优势之一在于, 式(2.6)中的低分辨率数值通量  $\hat{f}_{i+1/2}^L$  和  $\hat{g}_{i+1/2}^L$  可采用任意单调通量, 而非局限于某一特定数值通量(如 LF 数值通量)。

我们可通过式(2.4)的半离散形式重写守恒律方程(2.1), 并采用式(2.6)的通量形式。若  $u_{i+1/2}^\pm$  与  $v_{i+1/2}^\pm$  分别为  $u$  与  $v$  在界面  $x_{i+1/2}$  处的五阶近似, 则结合式(2.7)~(2.8)中通量的式(2.4)为方程(2.2)的五阶近似(此时  $r=2$ )。在本文研究中, 半离散系统(2.4)将转化为常微分方程组, 因此采用文献[8]中的三阶 TVD 龙格-库塔格式进行时间积分。

## 2.1. HWENO 插值

在本文中, 前述高阶守恒型有限差分格式的替代构造方法中, 核心组成部分是以下 HWENO 插值流

程。给定分段光滑函数  $u(x)$  与  $v(x)$  的节点值  $u_i = u(x_i)$ ,  $v_i = v(x_i)$ , 我们需要在半节点  $x_{i+1/2}$  处对  $u(x)$  与  $v(x)$  进行高精度近似。在(2.4)中的数值通量也可通过五阶有限差分 HWENO 格式计算。为保证内容完整, 下文给出该 HWENO 格式的具体形式。通过五阶 HWENO 插值构造  $u_{i+1/2}^\pm$  与  $v_{i+1/2}^\pm$  的步骤如下:

HWENO 流程的第一步, 是基于不同模板构造目标值的低阶近似, 并基于所有小模板的并集构成的大模板构造目标值的高阶近似。在小模板  $s_0 = \{x_{i-1}, x_i\}$ ,  $s_1 = \{x_i, x_{i+1}\}$ ,  $s_2 = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$  上分别构造三次 Hermite 多项式  $p_r(x)$ , ( $r=0,1,2$ ), 并在大模板  $T = s_0 \cup s_1 \cup s_2$  上构造四次多项式  $q(x)$ , 即:

$$\begin{aligned} p_0(x_k) &= u_k, \quad k = i-1, i, \\ p_0'(x_{i-1}) &= v_{i-1}, \quad p_1(x_k) = u_k, \quad k = i, i+1, \\ p_1'(x_{i+1}) &= v_{i+1}, \quad p_2(x_k) = u_k, \quad k = i-1, i, i+1, \\ q(x_k) &= u_k, \quad k = i-1, i, i+1, \\ q'(x_k) &= v_k, \quad k = i-1, i+1. \end{aligned}$$

对函数  $u(x)$  在半节点处进行插值。由于我们仅需这些多项式在单元边界(即  $x_{i+1/2}$ )处的值, 因此可直接将  $p_r(x_{i+1/2})$  与  $q(x_{i+1/2})$  作为  $u(x_{i+1/2})$  的近似值。

$$\begin{aligned} p_0\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) &= -\frac{5}{4}u_{i-1} + \frac{9}{4}u_i - \frac{3}{4}\Delta x v_{i-1}, \\ p_1\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) &= \frac{1}{4}u_i + \frac{3}{4}u_{i+1} - \frac{1}{4}\Delta x v_{i+1}, \\ p_2\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) &= -\frac{1}{8}u_{i-1} + \frac{3}{4}u_i + \frac{3}{8}u_{i+1}, \\ q\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) &= -\frac{1}{8}u_{i-1} + \frac{9}{16}u_i + \frac{9}{16}u_{i+1} - \frac{3}{64}\Delta x(v_{i-1} + 3v_{i+1}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

HWENO 方法流程的第二步, 是确定一组常数  $\gamma_k$ , 这类常数在 HWENO 方法中通常被称为线性权重。这组常数的核心作用, 是保证由低阶模板多项式线性组合得到的近似值, 需要满足:

$$q\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) = \sum_{k=0}^2 \gamma_k p_k\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) \quad (2.10)$$

满足这几个线性权重的和为 1。对于五阶 HWENO 来说, 线性权重为:

$$\gamma_0 = \frac{1}{16}, \quad \gamma_1 = \frac{9}{16}, \quad \gamma_2 = \frac{3}{8}$$

HWENO 方法流程的第三步, 是将线性权重  $\gamma_k$  转化为非线性权重  $w_r$ 。这一步的核心目的, 是让格式在函数光滑区域仍能保持高精度, 同时当至少一个小模板包含函数  $u(x)$  的间断时, 能够实现无振荡的数值表现。其中, 非线性权重的定义方式为:

$$w_r = \frac{\bar{w}_r}{\sum_k \bar{w}_k}, \quad \bar{w}_k = \frac{\gamma_k}{(\beta_k + \varepsilon)^2}, \quad r = 0, 1, 2 \quad (2.11)$$

这里取  $\varepsilon = 10^{-6}$ , 引入该参数是为了避免分母为零的情况。即  $\beta_r$  为模板  $s_r$  的光滑度指标, 用于衡量函数  $u(x)$  在对应模板上的光滑性。参照文献[8]中原始 HWENO 格式的定义, 我们给出

$$\beta_r = \sum_{k=1}^2 \int_{I_i} \Delta x^{2k-1} \left( \frac{\partial^k}{\partial x^k} p_r(x) \right)^2 dx \quad (2.12)$$

满足

$$\begin{aligned}\beta_0 &= (-2u_{i-1} + 2u_i - \Delta x v_{i-1})^2 + \frac{13}{3}(-u_{i-1} + u_i - \Delta x v_{i-1})^2, \\ \beta_1 &= (-2u_i + 2u_{i+1} - \Delta x v_{i+1})^2 + \frac{13}{3}(u_i - u_{i+1} + \Delta x v_{i+1})^2, \\ \beta_2 &= \frac{1}{4}(-u_{i-1} + u_{i+1})^2 + \frac{13}{12}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})^2.\end{aligned}\quad (2.13)$$

那么, 我们得到 HWENO 在  $u(x_{i+1/2})$  处的多项式

$$u_{i+1/2}^- \approx \sum_{k=0}^2 w_k p_k \left( x_{i+1/2} \right) \quad (2.14)$$

$u_{i+1/2}^+$  的重构过程与前文所述  $u_{i+1/2}^-$  的重构过程关于界面  $x_{i+1/2}$  镜像对称。

接下来讨论导数值  $v_{i+1/2}^\pm$  的重构过程。导数值  $v_{i+1/2}^\pm$  的重构同样分为四步, 但其关键区别在于重构所用的模板不同。给定节点值  $u_i$  与  $v_i$ , 我们分别在小模板  $s_0 = \{x_{i-1}, x_i\}$ ,  $s_1 = \{x_i, x_{i+1}\}$ ,  $s_2 = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$  上构造三次 Hermite 多项式  $p_r(x)$ , ( $r=0,1,2$ ), 并在大模板  $T = s_0 \cup s_1 \cup s_2$  上构造四次多项式  $q(x)$ , 满足

$$\begin{aligned}p_0(x_k) &= u_k, \\ p_0'(x_k) &= v_k, k = i-1, i, \\ p_1(x_k) &= u_k, p_1'(x_k) = v_k, k = i, i+1, \\ p_2(x_k) &= u_k, k = i-1, i, i+1, \\ p_2'(x_i) &= v_i, q(x_k) = u_k, \\ q'(x_k) &= v_k, k = i-1, i, i+1.\end{aligned}$$

经过重构计算得到

$$\begin{aligned}p_0 \left( x_{i+1/2} \right) &= \frac{9}{2\Delta x}(u_{i-1} - u_i) + \frac{7}{4}v_{i-1} + \frac{15}{4}v_i, \\ p_1 \left( x_{i+1/2} \right) &= \frac{3}{2\Delta x}(-u_i + u_{i+1}) - \frac{1}{4}v_i - \frac{1}{4}v_{i+1}, \\ p_2 \left( x_{i+1/2} \right) &= \frac{1}{8\Delta x}(u_{i-1} - u_i + 7u_{i+1}) + \frac{1}{4}v_i, \\ q' \left( x_{i+1/2} \right) &= \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{3}{64}u_{i-1} - \frac{3}{2}u_i + \frac{93}{64}u_{i+1} \right) + \frac{1}{64}(v_{i-1} - 12v_i - 15v_{i+1}).\end{aligned}\quad (2.15)$$

此时, 线性权重满足

$$\gamma_0 = \frac{1}{112}, \quad \gamma_1 = \frac{15}{16}, \quad \gamma_2 = \frac{3}{56} \quad (2.16)$$

在这个过程中, 非线性权重计算如下:

$$w_j = \frac{\bar{w}_j}{\sum_k \bar{w}_k}, \quad \bar{w}_k = \frac{\gamma_k}{(\beta_k + \varepsilon)^2}, \quad k = 0, 1, 2$$

定义此时的光滑指示子

$$\beta_j = \sum_{k=2}^3 \int_{I_i} \Delta x^{2k-1} \left( \frac{\partial^k}{\partial x^k} p_j(x) \right)^2 dx \tag{2.17}$$

需要注意的是,光滑度指标的求和项从二阶导数项开始,而非一阶导数项,详见文献[8]。五阶 HWENO 格式的光滑度指标定义如下:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{13}{12} (12(u_{i-1} - u_i) + 6\Delta x(v_{i-1} + v_i))^2 + (6(u_{i-1} - u_i) + \Delta x(2v_{i-1} + 4v_i))^2, \\ \beta_1 &= \frac{13}{12} (12(u_i - u_{i+1}) + 6\Delta x(v_i + v_{i+1}))^2 + (-6(u_i - u_{i+1}) - \Delta x(4v_i + 2v_{i+1}))^2, \\ \beta_2 &= \frac{13}{12} (-3u_{i-1} + 3u_{i+1} - 6\Delta x v_i)^2 + (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})^2. \end{aligned}$$

最终, 计算得到的  $v_{i+1/2}^-$  表示为

$$v_{i+1/2}^- \approx \sum_{k=0}^2 w_k P_k \left( x_{i+1/2} \right)$$

前文已详细阐述了五阶 HWENO 有限差分格式的重构过程。对于气体动力学欧拉方程等方程组问题, 为抑制数值振荡, 需在局部特征方向上, 基于节点值  $u_i$  与  $v_i$ , 对界面值  $u_{i+1/2}^-$ ,  $v_{i+1/2}^-$  进行重构。

### 2.2. 高分辨率项的重构

为达到式(2.5)中  $r = 5$  的五阶精度, 可采用式(2.7)~(2.8)中的前两项。式(2.7)~(2.8)中数值通量的高分辨率项系数至少含  $\Delta x^2$ , 因此仅需低阶近似, 且对伪振荡的贡献较小。因此, 我们可采用简单的中心近似或具有合适精度的单点迎风偏置近似来近似这些剩余项, 无须使用计算成本更高的 HWENO 方法。

接下来对  $\hat{f}_{i+1/2}^H$  与  $\hat{g}_{i+1/2}^H$  进行离散。考虑到格式稳定性, 将通量  $f$  与  $g$  分别分解为两部分:  $f = f^+ + f^-$  与  $g = g^+ + g^-$ , 其中

$$\begin{aligned} f^+ &= \frac{1}{2}(f(u) + \alpha u), f^- = \frac{1}{2}(f(u) - \alpha u), \\ g^+ &= \frac{1}{2}(g(u, v) + \alpha v), g^- = \frac{1}{2}(g(u, v) - \alpha v). \end{aligned}$$

满足  $\alpha = \max |f'(u)|$ , 能够得到

$$\frac{d}{du} f^+ \geq 0, \quad \frac{d}{du} f^- \leq 0, \quad \frac{\partial}{\partial v} g^+ \geq 0, \quad \frac{\partial}{\partial v} g^- \leq 0.$$

点值满足  $f_i^+ = 1/2(f(u_i) + \alpha u_i)$ ,  $f_i^- = 1/2(f(u_i) - \alpha u_i)$ ,  $g_i^+ = 1/2(g(u_i) + \alpha v_i)$ ,  $g_i^- = 1/2(g(u_i) - \alpha v_i)$ , 令

$$\begin{aligned} \hat{f}_{i+1/2}^H &= \hat{f}_{i+1/2}^+ + \hat{f}_{i+1/2}^- = (\hat{f}_1^+)_{i+1/2} + (\hat{f}_1^-)_{i+1/2} + (\hat{f}_2^+)_{i+1/2} + (\hat{f}_2^-)_{i+1/2}, \\ \hat{g}_{i+1/2}^H &= \hat{g}_{i+1/2}^+ + \hat{g}_{i+1/2}^- = (\hat{g}_1^+)_{i+1/2} + (\hat{g}_1^-)_{i+1/2} + (\hat{g}_2^+)_{i+1/2} + (\hat{g}_2^-)_{i+1/2}. \end{aligned}$$

那么,

$$\begin{aligned}
a_2 \Delta x^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{i+\frac{1}{2}} &\approx a_2 (\hat{f}_1^+)_{i+\frac{1}{2}} + a_2 (\hat{f}_1^-)_{i+\frac{1}{2}}, \\
a_4 \Delta x^4 \left( \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right)_{i+\frac{1}{2}} &\approx a_4 (\hat{f}_2^+)_{i+\frac{1}{2}} + a_4 (\hat{f}_2^-)_{i+\frac{1}{2}}, \\
a_2 \Delta x^2 \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)_{i+\frac{1}{2}} &\approx a_2 (\hat{g}_1^+)_{i+\frac{1}{2}} + a_2 (\hat{g}_1^-)_{i+\frac{1}{2}}, \\
a_4 \Delta x^4 \left( \frac{\partial^4 g}{\partial x^4} \right)_{i+\frac{1}{2}} &\approx a_4 (\hat{g}_2^+)_{i+\frac{1}{2}} + a_4 (\hat{g}_2^-)_{i+\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

此时, 满足

$$\begin{aligned}
(\hat{f}_1^-)_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{5}{4} f_{i-1}^+ - f_i^+ - \frac{1}{4} f_{i+1}^+ + \frac{1}{2} g_{i-1}^+ + g_{i+1}^+, \\
(\hat{f}_1^+)_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{5}{4} f_{i+2}^- - f_{i+1}^- - \frac{1}{4} f_i^- - \frac{1}{2} g_{i+2}^- - g_i^-, \\
(\hat{f}_2^-)_{i+\frac{1}{2}} &= -12(f_{i-1}^+ - 2f_i^+ + f_{i+1}^+) - 6(g_{i-1}^+ - g_{i+1}^+), \\
(\hat{f}_2^+)_{i+\frac{1}{2}} &= -12(f_{i-1}^- - 2f_i^- + f_{i+1}^-) - 6(g_{i-1}^- - g_{i+1}^-), \\
(\hat{g}_1^-)_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4}(39f_{i-1}^+ - 48f_i^+ + 9f_{i+1}^+ + 21g_{i-1}^+ + 12g_i^+ - 3g_{i+1}^+), \\
(\hat{g}_1^+)_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4}(-9f_{i-1}^- + 48f_i^- - 39f_{i+1}^- - 3g_{i-1}^- + 12g_i^- + 21g_{i+1}^-), \\
(\hat{g}_2^-)_{i+\frac{1}{2}} &= 90(f_{i-1}^+ - f_{i+1}^+) + 30(g_{i-1}^+ + 4g_i^+ + g_{i+1}^+), \\
(\hat{g}_2^+)_{i+\frac{1}{2}} &= 90(f_{i-1}^- - f_{i+1}^-) + 30(g_{i-1}^- + 4g_i^- + g_{i+1}^-).
\end{aligned}$$

接下来, 我们将列出本文所考虑的数值通量, 并在下一小节中对它们的性能进行对比分析。

### 2.3. 低分辨率项的通量形式

本文采用式(2.6)的形式构造双曲型方程的数值通量。尽管该形式相比标准形式计算成本更高, 但具有多个显著优势: 其中最重要的一点是, 该框架下可兼容任意单调通量, 而传统的通量重构方法仅适用于光滑通量分裂情形。下文将列出文献中几种常用的数值通量形式。

#### 2.3.1. Lax-Friedrichs (LF)通量与局部 Lax-Friedrichs (LLF)通量

LF 通量是文献中最简单、应用最广泛的数值通量之一。然而, 在所有单调通量中, LF 通量的数值耗散最大, 随着时间推进, 会抹平解中许多有用的细节信息。

LF 或 LLF 通量的定义如下:

$$\hat{f}^{LF}(u^-, u^+) = \frac{1}{2} \left[ (f(u^-) + f(u^+)) - \alpha(u^+ - u^-) \right] \quad (2.18)$$

$$g^{LF}(u^-, u^+; v^-, v^+) = \frac{1}{2} \left[ (g(u^-, v^-) + g(u^+, v^+)) - \alpha(v^+ - v^-) \right]. \quad (2.19)$$

其中, 对于 LF 通量, 标量情形下的取为  $\alpha = \max |f'(u)|$  在整个定义域上的上界, 方程组情形下则取为雅

可比矩阵特征值绝对值的上界; 对于 LLF 通量,  $\alpha$  取为  $u^-$  与  $u^+$  之间的局部上界。在 HWENO 格式求解过程中, 导数方程的数值通量与原方程取相同的  $\alpha$  值, 这是因为二者具有相同的特征速度。

### 2.3.2. Godunov 通量

Godunov 通量基于精确黎曼求解器构造, 在标量情形下, 它是所有单调通量中数值耗散最小的; 但在方程组情形下, 其计算成本通常很高, 因为它往往缺乏显式公式, 求解过程依赖迭代算法。Godunov 通量的定义为:

$$\hat{f}^G(u^-, u^+) = f(u(0))$$

其中,  $u(0)$  是局部黎曼问题在  $x/t = 0$  处的解(由于黎曼问题具有自相似性, 其解仅为单变量  $x/t$  的函数), 即守恒律方程(2.2)在以下初始条件下的精确解:

$$u(x, 0) = \begin{cases} u^- & \text{for } x < 0, \\ u^+ & \text{for } x > 0. \end{cases}$$

对于标量守恒律情形, Godunov 通量可表示为如下闭合形式:

$$\hat{f}^G(u^-, u^+) = \begin{cases} \min_{u^- \leq u \leq u^+} f(u) & \text{if } u^- \leq u^+, \\ \max_{u^+ \leq u \leq u^-} f(u) & \text{if } u^- \geq u^+. \end{cases}$$

对于大多数非线性方程组, Godunov 通量不存在闭合形式, 其求解通常需要迭代算法。因此, 对于导数方程中的数值通量  $\hat{g}_{i\pm 1/2}$ , 我们采用冻结系数法和线性双曲系统理论来更新变量  $v$ 。

### 2.3.3. Engquist-Osher (EO)通量与 Osher-Solomon 通量

标量情形下的 Engquist-Osher(EO)通量及其在方程组情形下的推广(通常称为 Osher-Solomon 通量), 相比 Godunov 通量更为平滑, 数值耗散却与之几乎相当。同时, EO 通量的优势在于: 标量情形以及可压缩气体动力学欧拉方程等常见物理方程组情形下, 均存在显式计算公式, 因此计算成本远低于依赖迭代求解的 Godunov 通量。

标量情形下的 EO 通量定义为:

$$\hat{f}^{EO}(u^-, u^+) = \frac{1}{2} [f(u^-) + f(u^+)] - \int_{u^-}^{u^+} |f'(u)| du$$

一维方程组情形下, 欧拉方程的 Osher-Solomon 通量存在显式公式, 详见文献[9], 此处不再赘述。

对于导数方程的数值通量  $\hat{g}_{i\pm 1/2}$ , 由于原双曲方程与其导数方程具有相同的特征速度, 因此同样采用冻结系数法结合线性双曲系统理论进行求解。

### 2.3.4. 多步预测 - 校正(MUSTA)通量

MUSTA 通量是一种多步预测 - 校正型数值通量。本文采用文献[9]的方法, 以 FORCE 通量作为预测步通量。 $L$  阶 MUSTA 通量的计算流程如下: 初始步  $l = 0$  时, 设置  $u_0^- = u^-$ ,  $u_0^+ = u^+$  随后按以下步骤迭代:

1) 基于第  $l$  步的数据, 计算 FORCE 通量:

$$\hat{f}_l^{FORCE} = \hat{f}^{FORCE}(u_l^-, u_l^+)$$

2) 若已达到目标总步数  $L$ , 则 MUSTA 通量计算完成, 最终通量为:

$$u_{l+1}^- = u_l^- - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{f}_l^{FORCE} - f(u_l^-)), \quad u_{l+1}^+ = u_l^+ - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(u_l^+) - \hat{f}_l^{FORCE})$$

否则, 按以下公式更新下一步状态:

并返回步骤 1 继续迭代。

本文采用文献[10]建议的步数  $L = 2$ 。

## 2.4. 高维扩展

为说明前述数值通量的高维推广, 我们以二维守恒律为例进行讨论:

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in (0, \infty), \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

其中,  $f(u(x, y, t))$  与  $g(u(x, y, t))$  分别为  $x$  方向和  $y$  方向的通量。定义  $v = u_x$ ,  $w = u_y$ , 对二维耦合方程组分别关于  $x, y$  求导, 可得:

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0, \\ v_t + h(u, v)_x + r(u, v)_y = 0, \\ w_t + q(u, w)_x + s(u, w)_y = 0. \end{cases}$$

其中,

$$h(u, v) = f'(u)v, \quad r(u, v) = g'(u)v, \quad q(u, w) = f'(u)w, \quad s(u, w) = g'(u)w$$

使用均匀的网格, 网格中心  $(x_i, y_i) = (1/2(x_{i+1/2} + x_{i-1/2}), 1/2(y_{i+1/2} + y_{i-1/2}))$ , 网格大小  $x_{i+1/2} - x_{i-1/2} = \Delta x$ ,  $y_{i+1/2} - y_{i-1/2} = \Delta y$ 。每一个单元记为  $I_{ij} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{i-1/2}, y_{i+1/2}]$ 。我们将(2.19)重新写为离散形式:

$$\begin{cases} \frac{du_{i,j}(t)}{dt} + \frac{1}{\Delta x} \left( \hat{f}_{i+\frac{1}{2},j} - \hat{f}_{i-\frac{1}{2},j} \right) + \frac{1}{\Delta y} \left( \hat{g}_{i,j+\frac{1}{2}} - \hat{g}_{i,j-\frac{1}{2}} \right) = 0, \\ \frac{dv_{i,j}(t)}{dt} + \frac{1}{\Delta x} \left( \hat{h}_{i+\frac{1}{2},j} - \hat{h}_{i-\frac{1}{2},j} \right) + \frac{1}{\Delta y} \left( \hat{r}_{i,j+\frac{1}{2}} - \hat{r}_{i,j-\frac{1}{2}} \right) = 0, \\ \frac{dw_{i,j}(t)}{dt} + \frac{1}{\Delta x} \left( \hat{q}_{i+\frac{1}{2},j} - \hat{q}_{i-\frac{1}{2},j} \right) + \frac{1}{\Delta y} \left( \hat{s}_{i,j+\frac{1}{2}} - \hat{s}_{i,j-\frac{1}{2}} \right) = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

二维情形下, 我们采用逐维方法处理通量项  $\hat{f}_{i\pm 1/2,j}$ ,  $\hat{g}_{i,j\pm 1/2}$ ,  $\hat{h}_{i\pm 1/2,j}$ ,  $\hat{s}_{i,j\pm 1/2}$ ; 混合导数项  $\hat{r}_{i,j\pm 1/2}$  和  $\hat{q}_{i,j\pm 1/2}$  则采用经典 WENO 格式。HWENO 格式的优势之一是具有紧致性, 因此为了保持整体格式的紧致性, 用 WENO 格式重构混合导数项时, 所用节点数必须与前文 HWENO 格式的节点数保持一致。这导致我们的格式相比标准 WENO 格式精度降了一阶, 为四阶精度。

混合导数项的通量重构  $\hat{q}_{i,j\pm 1/2}$  计算如下:

$$\hat{q}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2} \left( q \left( u_{i+\frac{1}{2},j}^+, w_{i+\frac{1}{2},j}^+ \right) + q \left( u_{i+\frac{1}{2},j}^-, w_{i+\frac{1}{2},j}^- \right) \right) - \frac{\alpha}{2} \left( w_{i+\frac{1}{2},j}^+ - w_{i+\frac{1}{2},j}^- \right) - \frac{1}{24} \Delta x^2 \left( \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right)_{i+\frac{1}{2},j}$$

其中,  $\alpha = \max |f'(u)|$ 。边界处的值  $u_{i\pm 1/2}^{\pm}$  的重构方法已在 2.1 节给出。为保持格式的紧致性, 我们采用三阶 WENO 重构计算  $w_{i\pm 1/2,j}^{\pm}$ , 这使得整体格式达到四阶精度。对于二阶导数项  $\Delta x^2 \left( \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right)_{i\pm 1/2,j}$ , 我们采用与

2.2 节相同的方式进行离散。差分近似格式如下:

$$\Delta x^2 \left( \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right)_{i+\frac{1}{2},j} \approx q_{i-1,j} - 2q_{i,j}^+ + q_{i+1,j}^+ + q_{i,j}^- - 2q_{i+1,j}^- + q_{i+2,j}$$

$$q_{i,j}^+ = \frac{1}{2}(q(u_{i,j}, w_{i,j}) + \alpha w_{i,j}), \quad q_{i,j}^- = \frac{1}{2}(q(u_{i,j}, w_{i,j}) - \alpha w_{i,j})$$

其中,  $\alpha$  的系数与 2.2 节中保持一致。

### 3. 数值算例

本节将通过多个算例, 验证基于 HWENO 格式的不同数值通量在精度、CPU 耗时及分辨率方面的性能表现。所有数值算例中, 一维与二维问题的 CFL 数均取为 0.2。

首先, 我们采用本文 HWENO 格式求解一维欧拉方程。笛卡尔坐标系下, 一维欧拉方程的控制方程为:

$$\begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix}_x = 0$$

其中,  $\rho$  为密度,  $u$  为  $x$  方向速度,  $E$  为总能量,  $p$  为压力。压力与总能量的关系为:  $E = p/(\gamma - 1) + (1/2)\rho u^2$ , 其中  $\gamma = 1.4$ 。

#### 算例 1 精度测试

第一个测试问题用于验证格式的有效精度阶数。我们求解式上述欧拉所示的一维非线性欧拉方程。初始条件设置为:

$$\rho(x, 0) = 1 + 0.2 \sin(\pi x), \quad v(x, t) = 1, \quad p(x, t) = 1$$

并采用 2-周期边界条件。该问题的解析解为:

$$\rho(x, 0) = 1 + 0.2 \sin(\pi(x - t)), \quad v(x, t) = 1, \quad p(x, t) = 1$$

我们将解推进至  $t = 2$  时刻。可以看到, 所有格式均达到了其设计的理论精度阶数(表 1)。

**Table 1.** Accuracy analysis with different fluxes  
**表 1.** 不同通量下的精度分析

		(a)		
$N(G)$	$L^1$ 误差	阶	$L^\infty$ 误差	阶
10	5.42E-03	-	7.82E-03	-
20	2.37E-04	4.52	3.71E-04	4.40
40	9.11E-06	5.06	1.31E-05	4.82
80	2.18E-07	5.03	4.09E-07	5.00
160	6.69E-09	5.02	1.22E-08	5.07
320	2.00E-10	5.06	3.42E-10	5.16
		(b)		
$N(EO)$	$L^1$ 误差	阶	$L^\infty$ 误差	阶
10	2.72E-03	-	3.86E-03	-
20	9.98E-05	4.77	1.77E-04	4.44
40	9.11E-06	5.08	5.48E-06	5.02
80	9.08E-08	5.02	1.71E-07	5.00
160	2.80E-09	5.02	5.01E-09	5.09
320	8.41E-11	5.06	1.43E-10	5.13

续表

$N$ (MUSTA)	$L^1$ 误差	(c)		
		阶	$L^\infty$ 误差	阶
10	3.38E-03	-	4.42E-03	-
20	1.34E-04	4.66	2.27E-04	4.28
40	3.99E-06	5.06	7.39E-05	4.94
80	1.23E-07	5.02	2.30E-07	5.00
160	3.78E-09	5.02	6.78E-09	5.09
320	1.13E-10	5.06	1.93E-10	5.14

## 算例 2 Lax 黎曼问题

初始条件为:

$$(\rho, v, p) = \begin{cases} (0.445, 0.698, 3.528) & \text{if } x \leq 0 \\ (0.5, 0, 0.571) & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

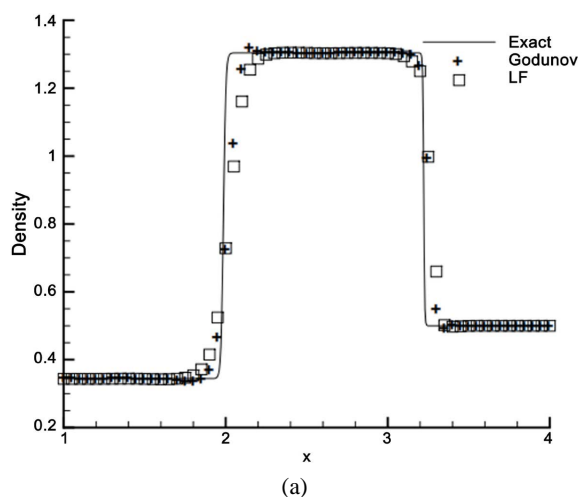
本算例用于验证前述数值格式在捕捉间断时的伪振荡特性。计算域取 $[-5, 5]$ ，划分 200 个网格，最终计算时刻为 $t=1.3$ 。在图 1 中，我们绘制密度的参考解，展示了接触间断激波的区域 $[-1, 4]$ 。从结果可以看出，在间断分辨率方面，其余所有格式的计算结果则与 HWENO-LF 格式的结果相近。

## 算例 3 双激波相互作用问题

我们求解式欧拉方程的双激波相互作用黎曼问题，计算域为 $[0, 1]$ ，初始条件为:

$$(\rho, v, p) = \begin{cases} (1, 0, 1000) & 0 \leq x \leq 0.1 \\ (1, 0, 0.01) & 0.1 \leq x \leq 0.9 \\ (1, 0, 100) & 0.9 \leq x \end{cases}$$

采用反射边界条件。 $t = 0.038$  时，在 400 网格下绘制密度场，并与 2000 网格的五阶 WENO 参考解及同网格 HWENO-LF 解对比(图 2 中 $[0.53, 0.88]$ 放大图展示间断结构)。相同硬件环境下统计 CPU 耗时，以 LF 为基准(1.00)，Godunov、EO、MUSTA 相对耗时分别为 2.48、1.96、1.71。结果验证：LF 效率最高但耗散最大；Godunov 成本最高(依赖迭代黎曼求解器)；EO 具显式公式，成本显著较低；MUSTA 介于两者之间。



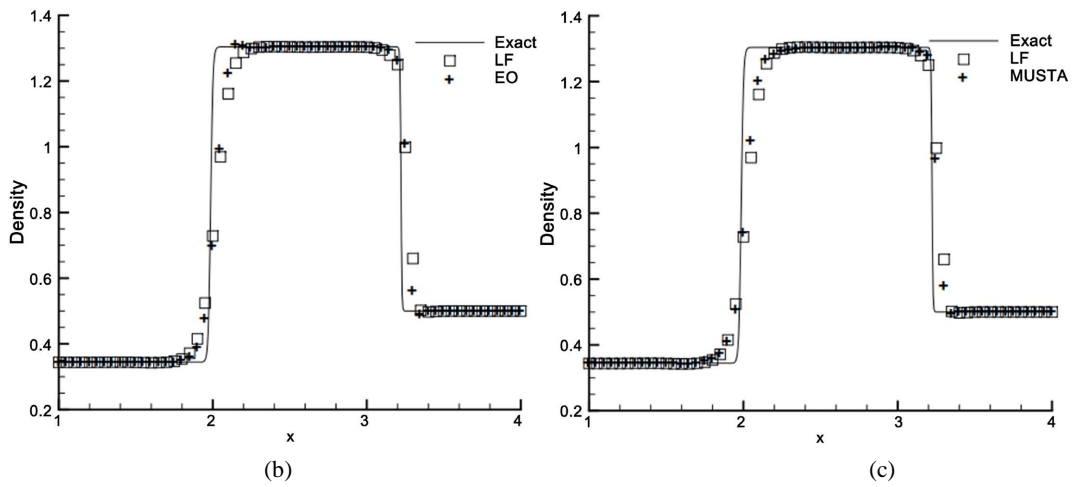


Figure 1. Comparison of numerical solutions and exact solutions at  $t = 1.3$

图 1. 在  $t = 1.3$  时数值解与精确解对比图

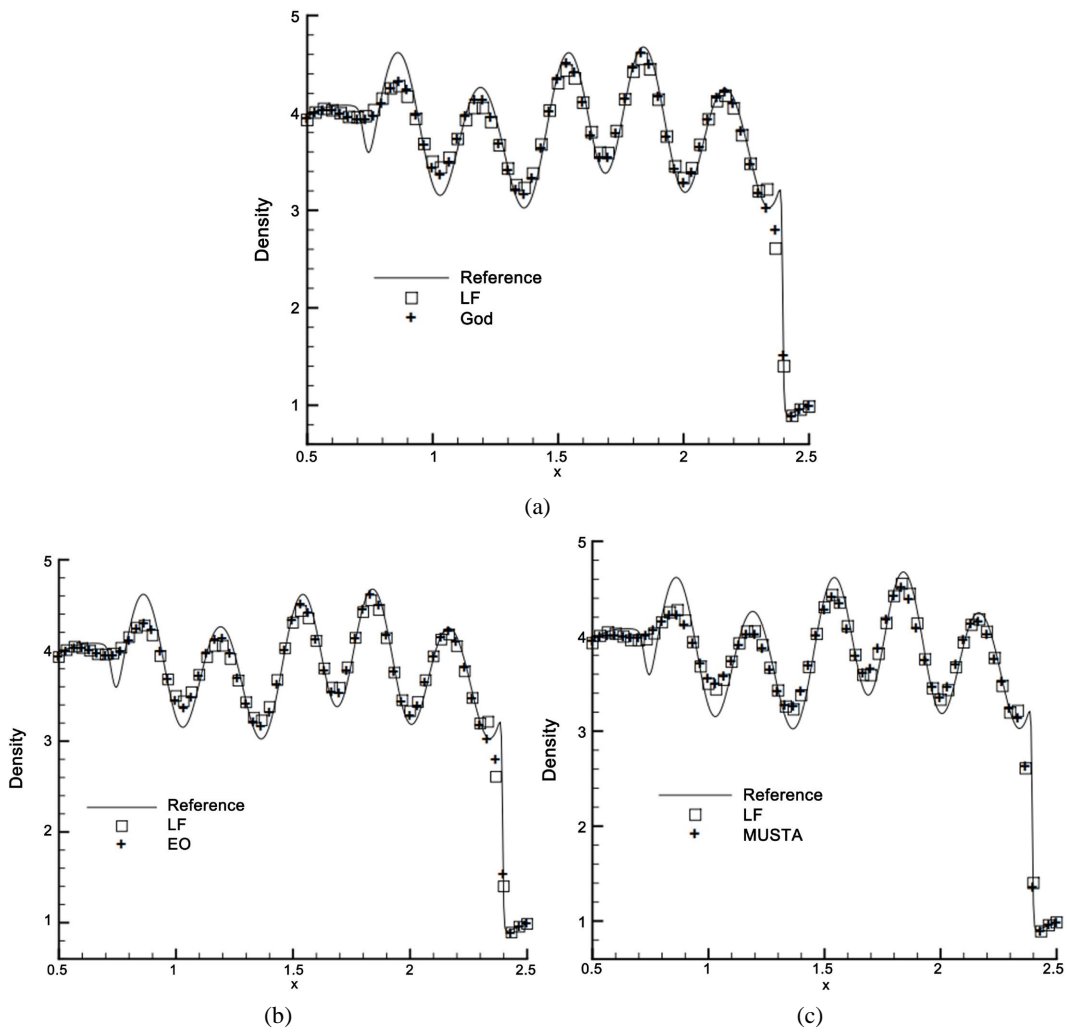


Figure 2. Comparison of numerical solutions and exact solutions at  $t = 0.038$

图 2. 在  $t = 0.038$  时数值解与精确解对比图

## 4. 总结

本文构建并对比了基于 LF、Godunov(G)、Engquist-Osher(EO)三种数值通量的 HWENO 格式。通过精度验证、Lax 黎曼问题及双激波相互作用等经典算例测试。结果显示, HWENO-LF 格式的分辨率在所有方案中最差。进一步对比高分辨率通量(Godunov 与 EO): 在 Lax 黎曼问题的接触间断区域, Godunov 通量数值解更贴近精确解, 而在激波波前处 EO 通量略有过冲; 在双激波相互作用问题的复杂波系结构中, EO 通量在局部极值点处的耗散略低于 Godunov 通量, 两者均明显优于 LF 通量。综合间断分辨率与计算效率(Godunov、EO、MUSTA、LF 的相对 CPU 耗时分别为 2.48、1.96、1.71、1.00), EO 通量在分辨率和效率的平衡上最优; 若追求极致间断分辨率且计算资源充足, Godunov 通量仍可作为首选; LF 通量适用于效率优先、精度要求适中的问题; MUSTA 通量可作为折中方案。上述量化和细化结论为 HWENO 格式的工程应用提供了更全面的参考。

## 参考文献

- [1] Liu, H. and Qiu, J. (2016) Finite Difference Hermite WENO Schemes for Conservation Laws, II: An Alternative Approach. *Journal of Scientific Computing*, **66**, 598-624. <https://doi.org/10.1007/s10915-015-0041-4>
- [2] Qiu, J., Khoo, B.C. and Shu, C. (2006) A Numerical Study for the Performance of the Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Method Based on Different Numerical Fluxes. *Journal of Computational Physics*, **212**, 540-565. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.07.011>
- [3] Qiu, J. and Shu, C. (2005) Hermite WENO Schemes and Their Application as Limiters for Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Method II: Two Dimensional Case. *Computers & Fluids*, **34**, 642-663. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2004.05.005>
- [4] Shu, C. and Osher, S. (1988) Efficient Implementation of Essentially Non-Oscillatory Shock-Capturing Schemes. *Journal of Computational Physics*, **77**, 439-471. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(88\)90177-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(88)90177-5)
- [5] Titarev, V.A. and Toro, E.F. (2002) ADER: Arbitrary High Order Godunov Approach. *Journal of Scientific Computing*, **17**, 609-618. <https://doi.org/10.1023/a:1015126814947>
- [6] Toro, E.F. (1997) Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-03490-3>
- [7] Toro, E.F. (2001) Shock Capturing Methods for Free Surface Shallow Flows. Wiley.
- [8] Toro, E.F. (2003) Multi-Stage Predictor-Corrector Fluxes for Hyperbolic Equations. Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, University of Cambridge.
- [9] Osher, S. and Solomon, F. (1982) Upwind Difference Schemes for Hyperbolic Systems of Conservation Laws. *Mathematics of Computation*, **38**, 339-374. <https://doi.org/10.1090/s0025-5718-1982-0645656-0>
- [10] Pirozzoli, S. (2002) Conservative Hybrid Compact-Weno Schemes for Shock-Turbulence Interaction. *Journal of Computational Physics*, **178**, 81-117. <https://doi.org/10.1006/jcph.2002.7021>