Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2026, 15(6), 68-73**
Published Online June 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.156267

多项式理论在初等数学中的应用

——高次方程组与不等式的求解方法探究

杨佰可，张　妍

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连

收稿日期：2026年5月4日；录用日期：2026年5月29日；发布日期：2026年6月5日

摘　要

多项式理论是代数学的核心基础，其方法在初等数学问题的求解中具有广泛应用。本文以多项式整除、辗转相除法及对称多项式等核心理论为依托，探究其在初等数学高次方程组求解与不等式证明中的具体应用。通过典型例题的解析，展现多项式方法化繁为简、直击问题本质的解题优势，为高次方程组与不等式的求解构建系统化思路，同时直观体现高等代数与初等数学的深度衔接及内在关联。

关键词

高次方程组，对称多项式，不等式

Applications of Polynomial Theory in Elementary Mathematics

—An Exploration of Methods for Solving Higher-Degree Systems of Equations and Inequalities

Baike Yang, Yan Zhang

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: May 4, 2026; accepted: May 29, 2026; published: June 5, 2026

Abstract

Polynomial theory serves as the fundamental cornerstone of algebra, with its methodologies widely applied in solving elementary mathematics problems. Building upon core concepts such as polynomial divisibility, method of successive division, and symmetric polynomials, this study explores their practical applications in solving higher-order systems of equations and proving inequalities

文章引用：杨佰可，张妍．多项式理论在初等数学中的应用[J]．应用数学进展, 2026, 15(6): 68-73.
DOI: 10.12677/aam.2026.156267

in elementary mathematics. Through detailed analysis of representative examples, the research demonstrates the advantages of polynomial methods in simplifying complex problems and addressing core mathematical issues. It establishes a systematic approach for solving higher-order equations and inequalities while visually illustrating the profound connections and intrinsic relationships between advanced algebra and elementary mathematics.

Keywords

System of Higher-Order Equations, Symmetric Polynomials, Inequality

1. 引言

在初等数学研究中，高次方程组与对称不等式的求解及证明一直是教学与解题的重点与难点。传统方法多依赖代数变形、配方、换元等技巧，虽能解决部分问题，但面对结构复杂、次数较高的多元问题时往往缺乏统一思路。近年来，不少学者尝试将高等代数理论下沉至初等数学应用场景，为相关问题提供更具系统性的解法。

在二元高次方程组解法研究中，李武保以结式理论为依据，建立多项式公根与方程组解的联系，给出了二元高次方程组的一般代数解法，为初等数学中高次方程组求解提供了理论方法[1]。孟凡通、杜家祥针对传统结式计算繁琐的问题，运用方程组同解原理、整系数多项式有理根定理与综合除法实现降次消元，方法更简便，更贴合初等数学解题需求[2]。赵昌成提出将方程组转化为系数矩阵，通过拟初等变换实现降次化简，把二元高次方程组求解转化为矩阵运算与单变量方程求解，步骤规范、可操作性强，丰富了初等数学中高次方程组的解法体系[3]。

在不等式方面，周根娇引入中学不等式证明，把约束条件下的最值问题转化为多元函数极值问题，实现了从技巧依赖到系统建模的思维转型，为多元不等式的程序化证明提供了重要借鉴[4]。田彦武系统研究了拉维换元法在三变量对称不等式中的应用，通过将三角形三边关系转化为对称代数结构，有效简化了分式不等式、整式不等式与几何不等式的证明过程，凸显了对称变换在处理多元不等式中的优势[5]。

上述研究分别从不同角度为高次方程组与不等式的求解提供了有效方法，极大拓展了初等数学的解题路径。多项式理论作为代数学的核心内容，其整除性、辗转相除法、对称多项式等工具同样具备强大的应用潜力。

各类方法在求解二元高次方程组时各具特点，但在计算复杂度与理解难度方面存在明显差异。结式方法基于消元理论，通过构造行列式形式的结式实现变量消去，具有严格的代数理论基础，但在实际运算中往往涉及高阶行列式展开，计算量较大，对初学者而言理解门槛较高。矩阵方法则通过将方程组转化为系数矩阵，借助拟初等变换实现降次与消元，步骤规范、形式统一，但其本质仍依赖线性代数框架，对初等数学背景的学生而言抽象性较强。相比之下，辗转相除法以多项式带余除法为基础，通过反复消元实现次数降低，其运算过程具有计算步骤清晰、操作性强的特点，更易于在初等数学层面推广应用。同时，该方法能够直接体现多项式整除结构，使解题过程具有较强的直观性与可解释性。

因此，从“计算效率 - 认知负担”的综合角度来看，辗转相除法在处理结构适当的二元高次方程组时，更具初等化优势。以多项式理论为工具，可将高次方程组的消元、对称结构的化简转化为规范的代

数运算，有效降低解题难度，凸显高等代数与初等数学之间的内在联系。

为将高等代数中的多项式理论有效融入初等数学的解题实践，本文以多项式整除性、最大公因式、对称多项式等核心概念为理论根基，综合运用辗转相除法、对称多项式换元法等经典方法，结合具体典型例题，系统且深入地探究多项式理论在二元高次方程组求解、二元及三元对称不等式证明中的实际应用路径与解题技巧。通过化繁为简、化难为易的解题思路，将抽象的高等代数理论与具体的初等数学问题深度结合，搭建起高等代数与初等数学之间的衔接桥梁，不仅为初等数学中高次方程组与对称不等式相关问题的解决提供了新颖的思路，也为初等数学解题方法的拓展与创新提供了有益的探索。

2. 预备知识

定义 1 [6] 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $\mathbb{F}[x]$ 中两个多项式，如果存在 $\mathbb{F}[x]$ 中的多项式 $g(x)$，使 $f(x)=g(x)q(x)$，即称 $g(x)$ 整除 $f(x)$，记为 $g(x)\mid f(x)$，并称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的一个因式，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的倍式。

定义 2 [6] 如果 $h(x)$ 既是 $f(x)$ 的因式，又是 $g(x)$ 的因式，则称 $h(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式。

零次多项式都是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式。

定义 3 [6] 设 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式，若是 $d(x)$ 能被 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的每一个公因式整除，则称 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式。用 $(f(x),g(x))$ 表示多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的首系数为 1 的最大公因式。

定义 4 [6] 辗转相除法求最大公因式

$$\begin{aligned}
&f(x)=g(x)g_1(x)+r_1(x)\\
&g(x)=r_1(x)g_2(x)+r_2(x)\\
&r_1(x)=r_2(x)g_3(x)+r_3(x)\\
&\qquad\vdots\\
&r_{k-3}(x)=r_{k-2}(x)q_{k-1}(x)+r_{k-1}(x)\\
&r_{k-2}(x)=r_{k-1}(x)q_k(x)+r_k(x)\\
&r_{k-1}(x)=r_k(x)q_{k+1}(x)
\end{aligned}$$

则 $(f(x),g(x))=cr_k(x)$，其中 c 是使 $cr_k(x)$ 首系数为 1 的 F 中非零数。

定义 5 [6] 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是数环 R 上的一个 n 元多项式，如果对于这 n 个文字 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的指标集 $\{1,2,\cdots,n\}$ 施行任意一个置换后，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 都不改变，那么称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 R 上的一个 n 元对称多项式。

定义 6 [6] 称以下 n 个 n 元多项式

$$\begin{aligned}
&s_1=x_1+x_2+\cdots+x_n\\
&s_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n\\
&\quad\vdots\\
&s_{n-1}=x_1x_2\cdots x_{n-1}+x_1x_2\cdots x_{n-2}x_n+x_2x_3\cdots x_n\\
&s_n=x_1x_2\cdots x_n
\end{aligned}$$

为 n 元初等对称多项式。

在多项式理论中，一元多项式是最基础的研究对象。设 F 为数域，$F[x]$ 表示系数在中的 F 所有关于文字 x 的一元多项式构成的集合。本文在处理二元高次方程组时，将二元多项式 $f(x,y)$ 视为以 y 为参数、关于 x 的一元多项式，即把 $f(x,y)$ 写成：$f(x,y)=a_n(y)x^n+a_{n-1}(y)x^{n-1}+\cdots+a_0(y)$，其中系数 $a_i(y)$ 是

关于 y 的一元多项式。

这样处理后，一元多项式的整除、带余除法、最大公因式、辗转相除法等定义与性质，可直接推广应用到二元多项式，即可自然完成从一元到二元的概念过渡。

3. 多项式在解高次方程组与不等式中的应用

1、用辗转相除法解复函数二元高次方程组

定理 1 [6] (多项式带余除法核心规则)对多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ （$g(x)$ 非零)，存在唯一的商 $q(x)$ 和余式 $r(x)$，使得 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$，其中 $\deg r(x)<\deg g(x)$ 或 $r(x)=0$。

例 1 解方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases}$.

解：方程组看作关于 x 的多项式：$\begin{cases} f(x)=x^2+y^2-25=0 \\ g(x)=x+y-7=0 \end{cases}$.

用辗转相除法消去 x：按多项式带余除法规则，用 $f(x)$ 除以 $g(x)$，最终得到商为 $x-y+7$，余式为 $2y^2-14y+24$，余式为 0 时，即

$$2y^2-14y+24=0$$

解得 $y=3$ 或 $y=4$，代入 $g(x)=0$ 得 $x=4$ 或 $x=3$。即方程组解为 $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$.

评注：辗转相除法解二元高次方程组的核心为消元降次，将方程组视为关于某一变量的多项式，通过带余除法消去高次项转化为低次方程求解，此方法适用于各类可整理为多项式形式的二元高次方程组，具有较强普适性。

例 2 解方程组 $\begin{cases} x^4-2x^2y^2+y^4=16 \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$.

解：令 $u=x^2, v=y^2$，原方程组转化为变为关于 u 的一元多项式方程组 $\begin{cases} f(u)=u^2-2uv+v^2-16=0 \\ g(u)=u+v-8=0 \end{cases}$.

用辗转相除法消去 u，根据带余除法规则，用 $g(u)$ 除 $f(u)$ 得到余式 $r(u)=(v^2-16)+(3v-8)(v-8)$.

令 $r(u)=0$，得 $v=2$ 或 $v=6$ (即 $y^2=2$ 或 $y^2=6$)，回代求 u.

由 $g(u)=u+v-8=0$，得 $u=8-v$；当 $v=2$ 时，$u=6$，即 $x=\pm\sqrt{6}, y=\pm\sqrt{2}$，当 $v=6$ 时，$u=2$，即 $x=\pm\sqrt{2}, y=\pm\sqrt{6}$.

综上，方程组解为 $\begin{cases} x=\pm\sqrt{6} \\ y=\pm\sqrt{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\pm\sqrt{2} \\ y=\pm\sqrt{6} \end{cases}$.

2、用对称多项式基本定理解对称的二元方程组

定理 2 [6] (对称多项式基本定理)任何一个多元对称多项式，都可以唯一地表示为初等对称多项式的多项式。

一个二元方程组 $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$，若 $f(x,y)=f(y,x), g(x,y)=g(y,x)$，则称它为关于 x,y 对称的二元方程组。

例 3 解方程组 $\begin{cases} x+y+x^2+y^2=18 \\ xy+x^2+y^2=19 \end{cases}$.

解：此方程组关于 x, y 是对称的，根据对称多项式基本定理，令 $s = x + y, p = xy$，即

$$\begin{cases} s + s^2 - 2p = 18 & (1) \\ s^2 - p = 19 & (2) \end{cases}$$

由(2)式，$p = s^2 - 19$ 代入(1)，即 $s^2 - s - 20 = 0$，解得 $s_1 = 5, s_2 = -4$.
再将其代入(2)，解得 $p_1 = 6, p_2 = -3$.

从而有 $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = -4 \\ xy = -3 \end{cases}$.

解得方程组解为 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2 + \sqrt{7} \\ y = -2 - \sqrt{7} \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2 - \sqrt{7} \\ y = -2 + \sqrt{7} \end{cases}$.

评注：对称多项式基本定理是解对称方程组的核心工具，通过将二元对称多项式转化为初等对称多项式的运算，把复杂方程组求解转化为一元方程求解，体现了化繁为简的代数思想，是对称方程组的程序化解法。

对某些不对称的方程组，可经过适当变换，化为对称方程组。

例 4 解方程组 $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17 \\ x - y = 3 \end{cases}$.

解：原方程组关于 x, y 不对称，但若令 $y_1 = -y, x_1 = x$，原方程变为 $\begin{cases} x_1^4 + y_1^4 = 17 \\ x_1 + y_1 = 3 \end{cases}$.

此方程关于 x_1, y_1 对称。设 $s = x_1 + y_1, q = x_1 y_1$；即

$$\begin{cases} s^4 - 4s^2 q + 2q^2 = 17 \\ s = 3 \end{cases}.$$

解得 $\begin{cases} s = 3 \\ q = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} s = 3 \\ q = 16 \end{cases}$. 从而 $\begin{cases} x_1 + y_1 = 3 \\ x_1 y_1 = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1 + y_1 = 3 \\ x_1 y_1 = 16 \end{cases}$.

解得 $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{55}}{2} i \\ y_1 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{55}}{2} i \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{55}}{2} i \\ y_1 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{55}}{2} i \end{cases}$.

代入 $y_1 = -y, x_1 = x$，

求得原方程组解为 $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{55}}{2} i \\ y = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{55}}{2} i \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{55}}{2} i \\ y = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{55}}{2} i \end{cases}$.

3、用初等对称多项式换元法解二元、三元对称不等式

由均值不等式 $a^2 + b^2 \ge 2ab$，易推出不等式 $(a+b)^2 \ge 4ab$，其中 a, b 是实数，当且仅当 $a = b$ 时等号成立。

若令 $s_1 = a + b, s_2 = ab$，则 $s_1^2 \ge 4s_2$，利用此关系可以解决一些有关二元对称不等式的问题。

例 5 已知 $a, b > 0$，且 $a + b = 1$，求证 $a^4 + b^4 \ge \dfrac{1}{8}$.

解：设 $s = a + b, p = ab$.

则 $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2 b^2 = (s^2 - 2p)^2 - 2p^2 = s^4 - 4s^2 p + 2p^2$.

代入 $s=1$，$a^4+b^4=1-4p+2p^2$，由于 $s^2\geq 4p$，则 $0\leq p\leq\frac{1}{4}$.

设 $f(p)=1-4p+2p^2$，在 $p\leq\frac{1}{4}$ 时递减(因为 $f(p)$ 的导数 $=-4+4p<0$)，则最小值在 $p=\frac{1}{4}$，$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$，即 $a^4+b^4\geq\frac{1}{8}$ 得证。

对于三元对称不等式，设 $s_1=a+b+c,s_2=ab+ac+bc,s_3=abc$，由 $(a+b+c)^2$ 展开可推得 $s_1^2\geq 3s_2$，利用此关系可以解决一些有关三元对称不等式的问题。

例 6 设 $a,b,c>0$，且 $ab+ac+bc=3$，求证：$a+b+c\geq 3$.

解：设 $s_1=a+b+c,s_2=ab+ac+bc,s_3=abc$，由于 $s_1^2\geq 3s_2=9$，则 $s_1\geq 3$，即 $a+b+c\geq 3$ 得证。

评注：三元对称不等式的证明可类比二元思路，通过初等对称多项式换元将多元问题转化为已知条件下的代数式推导，规避了多元不等式证明中变量交叉的繁琐性，体现了多项式理论在不等式证明中结构化、系统化的解题优势，适用于各类齐次、对称的多元不等式证明。

4. 结论与展望

多项式理论为高次方程组的求解与对称不等式的证明提供了系统化的代数解决方法。本文通过具体例题验证，辗转相除法可对高次方程组实现高效的消元降次，对称多项式基本定理则能将复杂的多项式结构转化为初等对称多项式的简易处理，两种方法均凸显出程序化解题的显著优势，让高次、对称类数学问题的求解更具规律性与可操作性。

相较于初等数学中偏重技巧性的零散解法，基于多项式理论的解题方法更具一般性与普适性，能够深入揭示问题求解过程的本质逻辑，同时直观展现出高等代数与初等数学之间一脉相承的内在衔接与知识关联。在中学数学教学中渗透多项式的相关思想与方法，不仅能为学生解决高次方程组、对称不等式等难点问题提供新的思路，更有助于逐步培养学生的代数抽象素养与逻辑推理能力，夯实其数学思维基础。

基金项目

辽宁师范大学教师指导本科生科研训练项目(项目编号为 JSZDBKSXM2025007)；辽宁师范大学“师范教育协同提质计划”基础教育专项课题(项目编号为 XTTZJCJY2026009)。

参考文献

[1] 李武保. 结式与二元高次方程组的解[J]. 延安教育学院学报, 1997(2): 28-31.

[2] 孟凡通, 杜家祥. 二元高次方程组的另种解法[J]. 宿州教育学院学报, 2009, 12(6): 165-166.

[3] 赵昌成. 用矩阵法解二元高次方程组[J]. 数学通报, 1992(9): 27-30.

[4] 周根娇. 拉格朗日乘数法在中学不等式证明中的创新应用[J]. 赣南师范大学学报, 2025, 46(6): 93-100.

[5] 田彦武. 拉维换元法: 一种处理三变量对称不等式的利器[J]. 中学数学研究(华南师范大学版), 2025(17): 9-12.

[6] 北京大学数学系前代数小组, 编, 王萼芳, 石生明, 王立中, 修订. 高等代数[M]. 第 6 版. 北京: 高等教育出版社, 2025.