

奇黏度对基底上热毛细自润湿薄膜流动不稳定性的影响

包江山¹, 解智勇¹, 菅永军^{2*}

¹内蒙古大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特

²东华大学数学与统计学院, 上海

收稿日期: 2026年5月11日; 录用日期: 2026年6月5日; 发布日期: 2026年6月11日

摘要

本研究探讨了奇黏度对倾斜加热基底上自润湿薄膜流动不稳定性的影响。采用包含偶黏度和奇黏度的广义牛顿流体模型, 在润滑近似条件下推导出Benney型非线性演化方程。通过线性稳定性理论分析薄膜稳定性, 结果表明: 当加热基底时, 热毛细效应可稳定薄膜; 而在冷却条件下, 则会促进不稳定性。奇黏度能够降低扰动增长速率, 在两种热条件下均具有稳定薄膜的作用, 并降低临界Marangoni数。数值模拟进一步验证了这些结果, 显示奇黏度能够抑制界面波的振幅和频率。此外, 基底倾角、雷诺数和毛细数的变化对不稳定性有显著影响, 而缩短基底长度则有助于减轻不稳定性。本研究为利用奇黏度控制自润湿薄膜流动的稳定性提供了理论基础, 并为奇黏度与热毛细效应相互作用提供了新的研究视角。

关键词

奇黏度, 自润湿薄膜, 热毛细效应, 不稳定性分析

Effect of Odd Viscosity on Instability of Thermocapillary Self-Rewetting Thin Film Flows on a Substrate

Jiangshan Bao¹, Zhiyong Xie¹, Yongjun Jian^{2*}

¹School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia

²School of Mathematics and Statistics, Donghua University, Shanghai

Received: May 11, 2026; accepted: June 5, 2026; published: June 11, 2026

*通讯作者。

文章引用: 包江山, 解智勇, 菅永军. 奇黏度对基底上热毛细自润湿薄膜流动不稳定性的影响[J]. 应用数学进展, 2026, 15(6): 124-143. DOI: 10.12677/aam.2026.156272

Abstract

This study investigates the effect of odd viscosity on the stability of self-wetting thin-film flows on an inclined heated substrate. A generalized Newtonian model incorporating both even and odd viscosities is employed to derive a Benney-type nonlinear evolution equation under the lubrication approximation. The stability of the thin film is analyzed using linear stability theory, revealing that thermocapillary effects stabilize the film when heating the substrate, while promoting instability under cooling. Odd viscosity, which reduces disturbance growth rates, stabilizes the film in both thermal conditions, and lowers the critical Marangoni number. Numerical simulations support these findings, showing that odd viscosity suppresses the amplitude and frequency of interfacial waves. Additionally, variations in the substrate inclination, Reynolds number, and capillary number significantly influence the instability, while reducing the substrate length mitigates instability. This study lays the theoretical foundation for using odd viscosity to control the stability of self-wetting thin-film flows and presents new perspectives on the interaction between odd viscosity and thermocapillary effects.

Keywords

Odd Viscosity, Self-Rewetting Thin-Film, Thermocapillary Effects, Instability Analysis

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

薄液膜流动的稳定性是流体力学与传热学研究中的一个基础且重要的问题，并在诸多自然现象和工程应用中发挥关键作用，包括涂覆过程[1]、微流控器件[2]、热管理系统[3]以及生物流体动力学[4]。在倾斜或竖直基底上，重力驱动的薄液膜流动由于界面变形和外界扰动，容易产生表面波并失稳。这可能导致液膜破裂、液滴形成或传热效率下降，进而影响设备的性能与运行安全[5]。早期研究主要关注等温条件下的惯性-毛细失稳问题，其中 Benjamin [6]和 Yih [7]奠定了线性稳定性理论的基础，指出当雷诺数超过某一临界值时，液膜将发生长波失稳。随后，热毛细效应(Marangoni 效应)被引入液膜稳定性分析中。Pearson 的研究[8]表明，温度梯度会引起表面张力变化并驱动流体运动，从而可能增强或抑制失稳。Samantha 等人[9]采用加权残值法推导了具有滑移边界条件的薄液膜流动模型，分析了滑移对液膜失稳、波动特性以及传热传质过程的影响，并通过数值模拟验证了模型的准确性。Nakaya 研究了倾斜平面上薄液膜流动的长波问题，探讨了表面张力对非线性波的影响，并通过傅里叶级数分析得到了波动解[10]。

对于上述薄膜稳定性问题的研究，所涉及的通常均为表面张力随温度呈线性变化的常规牛顿流体。近年来，自润湿流体(*self-wetting fluids*) [11]为薄膜流动控制提供了新的研究视角。该现象最早由 Vochten 等人[12]通过实验发现，并将其称为“自润湿”效应。自润湿流体在涂覆过程中尤其具有优势，因为其能够有效减小干斑区域并提高涂层均匀性[3]。这类流体通常是长链醇(如丁醇和戊醇)的稀水溶液，其显著特征在于表面张力对温度的依赖关系呈非单调变化。具体而言，当温度超过某一阈值后，表面张力会随温度进一步升高而增大[13]。因此，这类流体已广泛应用于热管理系统、冷却剂及微流控系统中[14][15]。然而，自润湿流体的稳定性仍取决于多个相互关联的因素，包括表面张力梯度、温度变化以及流体黏度，这些因素共同决定了液膜的稳定性[16][17]。

随着研究的深入,越来越多的学者开始关注自润湿流体薄膜流动的失稳问题。Batson 等人[18]推导了自润湿液膜的演化方程,并通过数值模拟研究了次级表面张力对界面波的影响。研究表明,通过适当调节温度可以诱发液膜失稳,而这种热调控能够防止液膜破裂并促使形成周期性流动。Ma 等人[19]研究了自润湿流体的演化行为及其指状失稳,发现该类流体的表面张力随温度呈非单调变化。当界面温度高于 T_0 时,温度升高会导致表面张力增大,从而稳定液膜流动;而当界面温度低于 T_0 时, Marangoni 效应则会增强流动失稳。Zubair 等人[20]研究了倾斜加热基底上自润湿液膜的动力学行为,发现自润湿流体在热毛细作用下会表现出两种不同的 Marangoni 效应:常规 Marangoni 效应会加剧液膜失稳,而反常 Marangoni 效应则有助于稳定液膜流动,并抑制由惯性引起的失稳。

然而,以上关于自润湿流体失稳的研究仅关注了具有偶黏度(经典黏度)的流体,而忽略了奇黏度的影响。自 Avron 于 1998 年开创性地开展相关研究以来[21],人们认识到:对于某些经典流体,当时间反演对称性被破坏时,其黏性张量可分解为对称部分和反对称部分。其中,对称部分对应通常的经典黏度,即偶黏度;而反对称部分则对应奇黏度。偶黏度与能量耗散和摩擦力有关,而奇黏度则不依赖于能量耗散[22]。大多数传统薄膜流动理论建立在牛顿流体模型基础之上,因而忽略了流体的非牛顿效应。然而,随着非牛顿流体研究的不断深入,尤其是奇黏度流体概念的引入,传统薄膜稳定性理论正面临新的挑战[23]。在薄膜流动中,奇黏度的引入会改变流体本构关系,从而影响失稳阈值及其非线性演化行为。

Kirkinis 等人[24]利用长波理论分析了奇黏度对热毛细失稳的影响,发现奇黏度能够抑制表面波,从而起到稳定作用。Banerjee 等人[25]研究了手性活性流体中的奇黏度效应,探讨了其在非平衡稳态下对流体动力学、涡旋行为、冲击波传播等现象的影响。Lapa 等人[26]考察了二维流体中奇黏度对低雷诺数游动物体运动的影响,发现奇黏度会显著影响游动物体的运动特性,尤其体现为由面积变化所诱导的力矩效应。Bao 等人[27]研究了电场作用下奇黏度的影响,结果表明奇黏度能够削弱电场引起的失稳效应。

在更复杂的情况下,例如滑移基底或柔性基底上,奇黏度与惯性力、毛细力的耦合作用会引发丰富的动力学现象。例如, Chattopadhyay 等人[28]发现,在滑移基底上奇黏度能够减弱热毛细失稳; Mukhopadhyay 等人[29]研究了倾斜滑移基底上具有奇黏度薄液膜的流体动力学失稳,结果表明奇黏度具有稳定作用,可提高临界雷诺数并减少失稳模态,而滑移效应则表现为促稳性的相反作用,即增强液膜失稳。Zhao 等人[30]考察了奇黏度对倾斜平面上黏弹性薄膜流动稳定性的影响,发现奇黏度可通过提高临界雷诺数来稳定流动,而黏弹性通常会降低临界雷诺数,从而增强失稳。上述研究表明,奇黏度作为一种新兴控制参数,在薄膜流动调控中具有重要潜力。

本文所考虑的奇黏度自润湿流体可理解为一种兼具自润湿效应与时间反演对称性破缺特征的连续介质模型。对于经典流体体系,手性活性流体、主动旋转颗粒悬浮液以及受外场驱动的微转子体系均被认为是产生有效奇黏度的重要物理条件[25][27]。基于这一思路,后续实验中可考虑以长链醇水溶液等自润湿流体作为基液,并引入磁性手性颗粒、外场驱动或主动旋转胶体等方式,从而构造同时具有自润湿特性和奇黏度的复合悬浮液体系。奇偶黏度比 $\mu = \mu^o/\mu^e$ 可被视为衡量该类复合自润湿体系中奇黏度效应强弱的有效无量纲参数,通常可取 $O(10^{-1}) \sim O(1)$ [30]。尽管对于自润湿流体与奇黏度的研究已取得一定进展,但二者对薄膜流动稳定性的耦合作用尚未得到充分阐明。本文研究了在惯性效应作用下,奇黏度对沿倾斜加热基底流动的自润湿液膜流动不稳定性影响。本文并不深入讨论奇黏度的产生机理,而是着重考察其对当前问题的作用机制。通过理论建模与数值模拟,系统分析了奇黏度对加热基底上自润湿液膜流动失稳特性的影响。本文强调研究思路的逻辑严密性,从基本理论出发,逐步引入问题的复杂性,最终揭示了奇黏度与热毛细效应耦合作用下的物理机制。

2. 数学模型

如图 1 所示,考虑一种自润湿液膜在倾斜基底上流动,呈现时间反演对称性破缺。为模拟此流动,

采用二维笛卡尔坐标系 (x, z) ，其中 x 表示沿固体表面的方向， z 表示法线方向。液体沿与水平面成 β 角的倾斜基底流动， $\beta=0$ 代表水平状态。下基底保持恒定温度 $T=T_w$ 。环境空气温度为 T_∞ 。液层的自由表面由 $z=h(x, t)$ 描述，其中 $h(x, t)$ 表示薄膜的局部厚度，初始厚度为 h_0 。

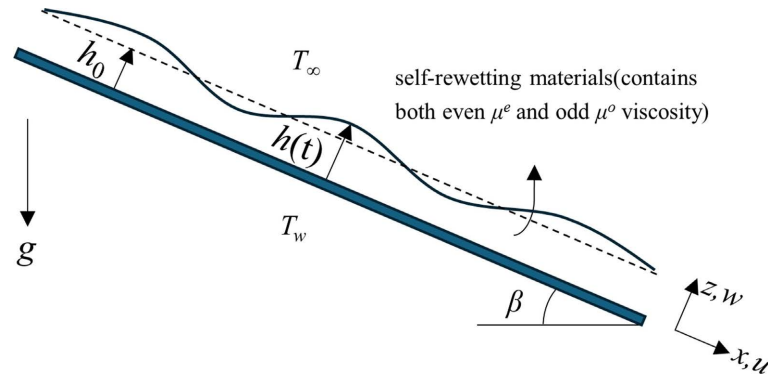


Figure 1. Schematic diagram illustrating the downslope flow of an odd-viscosity self-wetting fluid on an inclined plate at constant temperature

图 1. 恒温条件下，奇黏度自润湿流体沿倾斜平板顺坡流动的示意图

我们考察一种时间反演对称性被破坏的自润湿液体，此时流体中会出现奇黏度。因此，总黏度由偶黏度系数 μ^e 和奇黏度系数 μ^o 共同构成。这两个因素在影响流动稳定性方面起着关键作用。对于这类时间反演对称性被破坏的液体，其 Cauchy 应力张量 S 可表示为[31] [32]

$$S_{ij} = S_{ij}^e + S_{ij}^o, \quad (1)$$

$$S_{ij}^e = -p\delta_{ij} + \mu^e \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2)$$

$$S_{ij}^o = -\mu^o \left(\delta_{i1}\delta_{j1} - \delta_{i2}\delta_{j2} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \mu^o \left(\delta_{i1}\delta_{j2} + \delta_{i2}\delta_{j1} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right), i, j = 1, 2 \quad (3)$$

其中， S^o 表示由于时间反演对称性破缺而产生的 Cauchy 应力张量的奇部分，而 S^e 表示 Cauchy 应力张量的常规偶部分。

该流动的控制方程为不可压缩 Navier-Stokes 方程以及能量方程。

$$u_x + w_z = 0, \quad (4)$$

$$\rho(u_t + uu_x + ww_z) = -p_x + \rho g \sin \beta + \mu^e (u_{xx} + u_{zz}) - \mu^o (w_{xx} + w_{zz}), \quad (5)$$

$$\rho(w_t + uw_x + ww_z) = -p_z - \rho g \cos \beta + \mu^e (w_{xx} + w_{zz}) + \mu^o (u_{xx} + u_{zz}), \quad (6)$$

$$T_t + uT_x + wT_z = \kappa (T_{xx} + T_{zz}) \quad (7)$$

其中， ρ 表示液体密度， p 表示压力， T 表示温度， g 表示重力加速度。液体的热扩散率 κ 定义为热导率 k_{th} 与密度 ρ 和定压比热容 c_p 乘积之比。

对于边界条件，在倾斜平板底部施加无滑移和无穿透边界条件，其表达式为

$$u = 0, \quad w = 0, \quad T = T_w \text{ 在 } z = 0 \text{ 处} \quad (8)$$

在 $z = h(x, t)$ 处，需要满足以下两个应力平衡条件。

$$\begin{aligned} & \mu^e \left[(u_z + w_x)(1 - h_x^2) - 2(u_x - w_z)h_x \right] + \mu^o \left[(u_x - w_z)(1 - h_x^2) + 2(u_z + w_x)h_x \right] \\ & = (\sigma_x + h_x \sigma_z)(1 + h_x^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & p_a - p + \left\{ 2\mu^e \left[u_x h_x^2 - (u_z + w_x)h_x + w_z \right] + \mu^o \left[(u_z + w_x)(1 - h_x^2) - 2(u_x - w_z)h_x \right] \right\} (1 + h_x^2)^{-1} \\ & = \sigma(T) h_{xx} (1 + h_x^2)^{-3/2}, \end{aligned} \quad (10)$$

此外, 自由表面的运动学条件以及能量平衡条件可由牛顿冷却定律给出

$$w = h_t + u h_x, \quad (11)$$

$$k_{th} (T_z - h_x T_x) (1 + h_x^2)^{-1/2} + k_g (T - T_\infty) = 0, \quad (12)$$

其中, 环境空气与液膜之间的换热速率由换热系数 k_g 表征, 大气压记为 P_a , σ 表示液-气界面处的表面张力。对于自润湿流体, 表面张力 σ 通常被表示为温度 T 的二次函数, 如文献[33]所示

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_T (T - T_0)^2, \quad (13)$$

其中, σ_0 表示在 $T = T_0$ 时达到的最小表面张力, $\sigma_T = (1/2)d^2\sigma/dT^2$ 为表面张力的一个正参数[33]。与常规流体相比, 该流体的物性特征如下面图 2 所示。

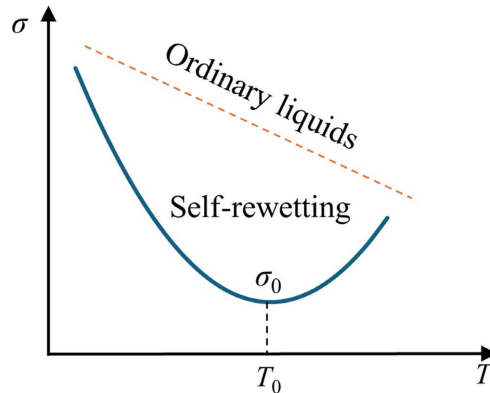


Figure 2. Comparison of the physical properties of ordinary liquids and self-rewetting liquids

图 2. 常规流体与自润湿流体物理性质的比较

为将控制方程和边界条件无量纲化, 我们采用如下特征尺度:

$$\begin{aligned} (x, z, h) &= h_0 (X, Z, H), \quad t = \frac{l_v t_v}{h_0} \tau, \quad (u, w) = U_0 (U, W), \\ p &= p_a + (\rho l_v h_0 / t_v^2) P, \quad T = T_\infty + \theta (T_w - T_\infty), \end{aligned} \quad (14)$$

其中, $U_0 = h_0^2 / (l_v t_v)$ [34]。本文选取黏性重力长度尺度 $l_v = (v^2 / g \sin \beta)^{1/3}$ 及其相应的时间尺度 $t_v = (v / (g \sin \beta)^2)^{1/3}$, $v = \mu^e / \rho$ 表示运动黏度[28]。

将式(14)中的无量纲变量代入后, 可将控制方程(4)~(7)改写为

$$U_x + W_z = 0, \quad (15)$$

$$3Re(U_\tau + UU_x + WU_z) = -P_x + 1 + U_{xx} + U_{zz} - \mu(W_{xx} + W_{zz}), \quad (16)$$

$$3Re(W_\tau + UW_x + WW_z) = -P_z - \cot \beta + W_{xx} + W_{zz} + \mu(U_{xx} + U_{zz}), \quad (17)$$

$$3RePr(\theta_\tau + U\theta_x + W\theta_z) = \theta_{xx} + \theta_{zz}, \quad (18)$$

并结合式(13), 可得到无量纲边界条件(8)~(12)。

$$U = 0, \quad W = 0, \quad \theta = 1 \text{ 在 } z = 0 \text{ 处}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & (U_z + W_x)(1 - H_x^2) - 2(U_x - W_z)H_x + \mu[(U_x - W_z)(1 - H_x^2) + 2(U_z + W_x)H_x] \\ & = Ma(\theta_i - \theta_0)(\theta_{ix} + H_x\theta_{iz})(1 + H_x^2)^{1/2} \text{ at } Z = H(X, \tau), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} P = & \left\{ 2[U_x H_x^2 - (U_z + W_x)H_x + W_z] + \mu[(U_z + W_x)(1 - H_x^2) - 2(U_x - W_z)H_x] \right\} (1 + H_x^2)^{-1} \\ & - (Ca^{-1} + 1/2 Ma(\theta_i - \theta_0)^2) H_{xx} (1 + H_x^2)^{-3/2}, \end{aligned} \text{ 在 } Z = H(X, \tau) \text{ 处} \quad (21)$$

无量纲化后, 自由表面的运动学条件和能量平衡条件。

$$W = H_\tau + UH_x, \quad (22)$$

$$(\theta_{iz} - H_x\theta_{ix})(1 + H_x^2)^{-1/2} + Bi\theta_i = 0, \quad (23)$$

其中, $Re = gh_0^3 \sin \beta / 3\nu^2$ 为雷诺数, 表示惯性力与黏性力之比; $\mu = \mu^o/\mu^e$ 为奇偶黏度比。 $Ma = 2\sigma_\tau(T_w - T_\infty)^2 / \mu^e U_0 = 2\sigma_\tau(T_w - T_\infty)^2 / h_0^2$ 为 Marangoni 数, 用以表征热毛细应力与由重力诱导的黏性法向应力之比。本文仅考虑由温度梯度引起的热毛细 Marangoni 应力, 而忽略曲率效应。 $Pr = \nu/\kappa$ 为 Prandtl 数, 表征动量扩散率与热扩散率之比; $Ca = \mu^e U_0 / \sigma_0$ 为毛细数, 表示黏性力与表面张力之比; $Bi = k_g h_0 / k_{lh}$ 为 Biot 数, 表征自由表面处的传热强弱。其中, θ_i 表示液-气界面温度, 它是 X , Z 和 H 的函数。对于典型液膜, Marangoni 效应仅由界面温度 θ_i 决定; 而对于自润湿液膜, 其不仅取决于界面温度 θ_i , 还与 θ_i 和 θ_0 之间的差值有关。其中, $\theta_0 = (T_0 - T_\infty) / (T_w - T_\infty)$ 为表面张力达到最小值时所对应的无量纲温度[20]。

我们假设液膜足够薄, 以致流体沿厚度方向的运动受到强烈约束; 因此, 由温差引起的密度变化不足以驱动显著的自然对流, 这就使得忽略浮力效应成为合理近似, 同时将液体视为非挥发性流体。根据长波理论, 界面斜率在时间和空间上均变化缓慢。于是, 引入小参数 $\varepsilon = h_0 / L^* \sim \partial_\tau \sim \partial_x \ll 1$ 。因此, 采用如下近似变换。

$$(\partial_\tau, \partial_x) \rightarrow \varepsilon(\partial_\tau, \partial_x), \quad \partial_{xx} \rightarrow \varepsilon^2 \partial_{xx}, \quad W \rightarrow \varepsilon W. \quad (24)$$

将式(24)代入式(15)~(23), 并忽略式(20)、(21)和(23)中的高阶非线性项 H_x^2 后, 可得到如下控制方程:

$$U_x + W_z = 0, \quad (25)$$

$$3\varepsilon Re(U_\tau + UU_x + WU_z) = -\varepsilon P_x + 1 + \varepsilon^2 U_{xx} + U_{zz} - \mu(\varepsilon^3 W_{xx} + \varepsilon W_{zz}), \quad (26)$$

$$3\varepsilon^2 Re(W_\tau + UW_x + WW_z) = -P_z - \cot \beta + \varepsilon^3 W_{xx} + \varepsilon W_{zz} + \mu(\varepsilon^2 U_{xx} + U_{zz}), \quad (27)$$

$$3\varepsilon RePr(\theta_\tau + U\theta_x + W\theta_z) = \varepsilon^2 \theta_{xx} + \theta_{zz}, \quad (28)$$

边界条件为

$$U = 0, \quad W = 0, \quad \theta = 1 \text{ 在 } z = 0 \text{ 处}, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & U_z + \varepsilon^2 W_x - 2(\varepsilon U_x - \varepsilon W_z)\varepsilon H_x + \mu[\varepsilon U_x - \varepsilon W_z + 2(U_z + \varepsilon^2 W_x)\varepsilon H_x] \\ & = \varepsilon Ma(\theta_i - \theta_0)(\theta_{ix} + H_x\theta_{iz}) \quad Z = H(X, \tau), \end{aligned} \quad (30)$$

$$P = \left\{ 2 \left[\varepsilon W_Z - (U_Z + \varepsilon^2 W_X) \varepsilon H_X \right] + \mu \left[U_Z + \varepsilon^2 W_X - 2(\varepsilon U_X - \varepsilon W_Z) \varepsilon H_X \right] \right\} \Big|_{Z=H(X,\tau)} - \left(Ca^{-1} + \frac{1}{2} Ma(\theta_i - \theta_0)^2 \right) \varepsilon^2 H_{XX} \quad (31)$$

$$W = H_\tau + UH_X, \quad (32)$$

$$\theta_{iz} - \varepsilon^2 H_X \theta_{ix} + Bi\theta_i = 0, \quad (33)$$

本研究选取一种常见的自润湿流体进行分析, 其体积分数为 5 vol% (总量为 4 μl), 其物性参数为: 密度 $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, 黏度 $\eta = 10^{-4} \sim 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, 表面张力 $\sigma \approx 3 \times 10^{-2} \text{ N/m}$, 表面张力参数 $\sigma_T \approx 2.2 \times 10^{-6} \text{ N/m}\cdot\text{K}$ 。本文数值模拟中所采用的参数取自 Mamalis 等[35]报道的实验数据。在温差 $T_w - T_\infty \approx 10 \text{ K}$ 、特征速度 $U_0 = 10^{-1} \text{ m/s}$ 的条件下, 估算得到雷诺数 Re 的取值范围为 1~10, 毛细数 Ca 的取值范围为 $10^{-3} \sim 10^{-2}$, Marangoni 数 Ma 的取值范围为 0~4, Biot 数 Bi 的取值范围为 0.01~1。本文取 $Bi = 1$, 这对应于牛顿冷却边界条件仍然适用时的上限情形, 代表了相对较强的界面换热条件。此外, 由于 $Pe = RePr \ll 1$, 因此在能量方程(28)中忽略对流传热项[31]。本文所考虑的奇偶黏度比范围为 0~1.5 [36]。

在本研究中, 我们首先基于小参数对各物理场进行正则摄动展开, 并重点求解至一阶近似。

$$\begin{aligned} U &= U^0 + \varepsilon U^1 + O(\varepsilon^2), & W &= W^0 + \varepsilon W^1 + O(\varepsilon^2) \\ P &= P^0 + \varepsilon P^1 + O(\varepsilon^2), & \theta &= \theta^0 + \varepsilon \theta^1 + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (34)$$

主导阶下的控制方程为

$$U_X^0 + W_Z^0 = 0, \quad U_{ZZ}^0 + 1 = 0, \quad \theta_{ZZ}^0 = 0, \quad P_Z^0 + \cot \beta - \mu U_{ZZ}^0 = 0, \quad (35)$$

边界处的条件为

$$U^0 = 0, \quad W^0 = 0, \quad \theta^0 = 1 \text{ 在 } Z = 0 \text{ 处}, \quad (36)$$

$$U_Z^0 = 0, \quad \theta_{iz}^0 + Bi\theta_i^0 = 0, \quad P^0 = \mu U_Z^0 - \varepsilon^2 H_{XX} \left[Ca^{-1} \frac{1}{2} + Ma(\theta_i^0 - \theta_0)^2 \right] \text{ 在 } Z = H(X, \tau), \quad (37)$$

我们认为毛细数 Ca 足够小, 这与已有薄膜稳定性研究中的处理是一致的[9] [37] [38]。

主导阶解

$$U^0 = HZ - \frac{Z^2}{2}, \quad (38)$$

$$W^0 = -\frac{1}{2} Z^2 H_X, \quad (39)$$

$$\theta^0 = 1 - \frac{BiZ}{1 + BiH}, \quad (40)$$

$$P^0 = (\mu + \cot \beta)(H - Z) - \varepsilon^2 Ca^{-1} H_{XX} - \frac{1}{2} \varepsilon^2 Ma(\theta_i^0 - \theta_0)^2 H_{XX}, \quad (41)$$

主导阶自由表面温度为 $\theta_i^0 = \frac{1}{1 + BiH}$

一阶近似下的控制方程为

$$U_X^1 + W_Z^1 = 0, \quad (42)$$

$$3Re(U_\tau^0 + U^0 U_X^0 + W^0 U_Z^0) = -P_Z^0 + U_{ZZ}^1 - \mu W_{ZZ}^0, \quad (43)$$

$$P_z^1 - W_{zz}^0 - \mu U_{zz}^1 = 0, \quad (44)$$

$$\theta_{zz}^1 = 0, \quad (45)$$

边界条件为

$$U^1 = 0; \quad W^1 = 0; \quad \theta^1 = 0 \text{ at } Z = 0, \quad (46)$$

在 $Z = H$ 处,

$$U_z^1 + \mu(U_x^0 - W_z^0 + 2U_z^0 H_x) = Ma(\theta_i^0 - \theta_0) \theta_{ix}^0, \quad (47)$$

$$P^1 = 2(W_z^0 - U_z^0 H_x) + \mu U_z^1, \quad (48)$$

$$\theta_{iz}^1 + Bi \theta_{iz}^1 = 0, \quad (49)$$

一阶解如下:

$$U^1 = \left(-H_x \cot \beta + \varepsilon^2 Ca^{-1} H_{xxx} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 Ma (\theta_i^0 - \theta_0)^2 H_{xxx} + \varepsilon^2 Ma (\theta_i^0 - \theta_0) \theta_{ix} H_{xx} \right) \left(HZ - \frac{Z^2}{2} \right) + 3ReHH_x \left(\frac{1}{24} Z^4 - \frac{1}{6} HZ^3 + \frac{1}{3} H^3 Z \right) - (\theta_i^0 - \theta_0) \frac{MaBiH_x}{(1+BiH)^2} Z - 2\mu HH_x Z. \quad (50)$$

利用运动学边界条件的守恒形式

$$H_\tau + \partial X \left(\int_0^H U dZ \right) = 0, \quad (51)$$

将 $U = U^0 + \varepsilon U^1$ 代入式(51), 可得

$$H_\tau + H^2 H_x + \varepsilon \left[\frac{1}{3} H^3 (-H_x \cot \beta + \varepsilon^2 Ca^{-1} H_{xxx}) + \frac{1}{2} Ma (\theta_i^0 - \theta_0) \theta_{ix}^0 H^2 + \frac{2}{5} ReH^6 H_x - \mu H^3 H_x \right]_x = 0 \quad (52)$$

该方程是基于伸缩变量 (X, τ) 而非物理坐标 (x, t) 建立的。为将其恢复到物理空间中的表达形式, 采用变量变换 $\varepsilon(\partial_x, \partial_\tau) = (\partial_x, \partial_t)$

$$H_t + H^2 H_x + \left[\frac{2}{5} ReH^6 H_x + \frac{1}{3} H^3 (-H_x \cot \beta + Ca^{-1} H_{xxx}) - \frac{MaBi}{2(1+BiH)^2} (\theta_i^0 - \theta_0) H_x H^2 - \mu H^3 H_x \right]_x = 0 \quad (53)$$

3. 线性稳定性分析

为分析基态解的线性稳定性, 将液膜厚度 H 表示为基态解 $H=1$ 与一个小时空扰动 H^* 之和, 即表示为

$$H(x, t) = 1 + H^*(x, t), \quad (54)$$

将式(54)代入式(53), 并忽略 H^* 的所有非线性项, 可得到如下扰动线性方程:

$$H_t^* + H_x^* + \left[\frac{2}{5} ReH_x^* - \frac{1}{3} (H_x^* \cot \beta - Ca^{-1} H_{xxx}^*) - \mu H_x^* - \frac{MaBi}{2(1+Bi)^2} (\theta_i^0 - \theta_0) H_x^* \right] = 0. \quad (55)$$

我们假设薄液膜存在如下正弦形式的扰动:

$$H^*(x, t) = \tilde{H} \exp(ikx + \omega t), \quad (56)$$

其中, k 表示波数, ω 为复频率, \tilde{H} ($\tilde{H} \ll 1$) 表示扰动振幅。在上述假设下, 所得色散关系

$$\omega = -ik - \frac{1}{3}k^2 \cot \beta - \frac{1}{3}k^4 Ca^{-1} - \frac{MaBi}{2(1+Bi)^2}(\theta_i^0 - \theta_0)k^2 + \frac{2}{5}Rek^2 - \mu k^2. \quad (57)$$

复频率可表示为 $\omega = \omega_r + i\omega_i$ ，其中实部 ω_r 表示振幅的线性增长率，虚部 ω_i 表示振荡频率。由于表面张力受界面温度 θ_i 与表面张力达到最小值时对应温度 θ_0 之差的影响，在以下表达式中定义热参数 $\Theta = \theta_i - \theta_0$ 。因此， $\Theta > 0$ 和 $\Theta < 0$ 分别表示 θ_i 高于或低于 θ_0 ，对应于基底加热和冷却两种情形。热参数 Θ 的取值范围为 $[-1, 1]$ [33]。

根据式(57)，实部 ω_r 可表示为

$$\omega_r = -\frac{1}{3}k^2 \cot \beta - \frac{1}{3}k^4 Ca^{-1} - k^2 \frac{MaBi}{2(1+Bi)^2} \Theta + \frac{2}{5}Rek^2 - \mu k^2. \quad (58)$$

当 $\omega_r > 0$ 时，系统呈线性失稳；当 $\omega_r < 0$ 时，系统保持稳定；而当 $\omega_r = 0$ 时，系统处于中性稳定状态。通过施加中性稳定条件 $\omega_r = 0$ ，可得到截止波数 k_c ，其用于划分稳定区与失稳区之间的边界。

$$k_c = \sqrt{Ca \left(-\cot \beta - \frac{3MaBi}{2(1+Bi)^2} \Theta + \frac{6}{5}Re - 3\mu \right)}. \quad (59)$$

通过施加条件 $d\omega_r/dk = 0$ ，可确定与最大增长率对应的波数 k_m ，即最不稳定扰动模态所对应的波数。

$$k_m = \sqrt{Ca \left(-\frac{1}{2} \cot \beta - \frac{3MaBi}{4(1+Bi)^2} \Theta + \frac{3}{5}Re - \frac{3}{2}\mu \right)} \quad (60)$$

在忽略奇黏度影响($\mu = 0$)的情况下，我们将时间增长率 ω_r 随波数 k 变化的曲线与文献[20]中的结果进行了比较。图 3 表明，本文结果与 Zubair 等的结果吻合良好。

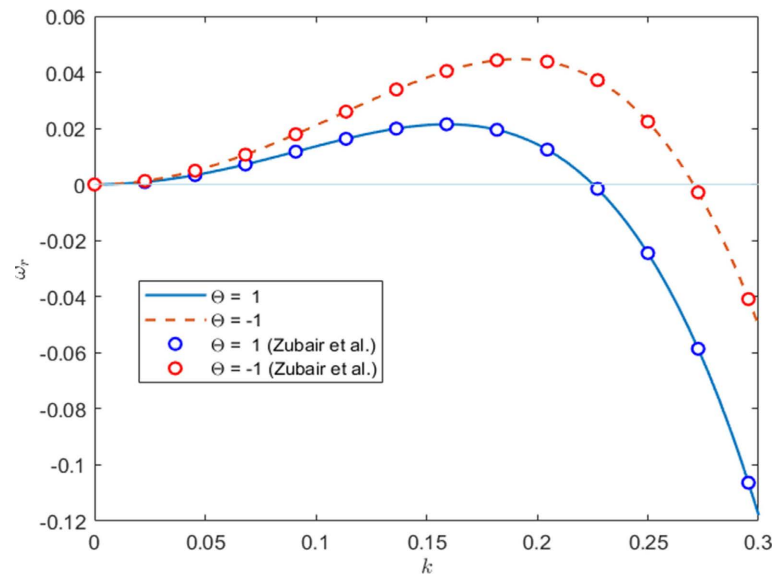


Figure 3. By setting the dimensionless parameters as $Re = 6$, $Ca = 0.01$, $Ma = 3$, $Bi = 1$, $\beta = \pi/4$, $\Theta = 1$, and $\Theta = -1$, a comparison is made between the temporal growth rate ω_r as a function of the wavenumber k from Zubair *et al.* and the present study

图 3. 取无量纲参数 $Re = 6$, $Ca = 0.01$, $Ma = 3$, $Bi = 1$, $\beta = \pi/4$, 以及 $\Theta = 1$ 和 $\Theta = -1$ 时，将 Zubair 等的时间增长率 ω_r 随波数 k 的变化关系与本文结果进行了比较

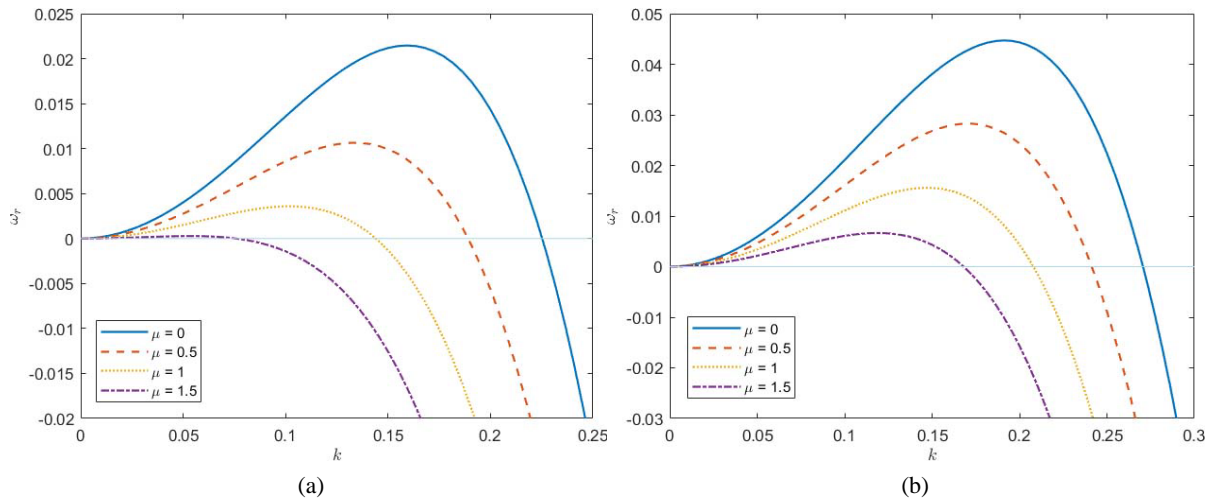


Figure 4. The rate of temporal growth ω_r is a function of the wavenumber k and exhibits variations for different values of μ : (a) higher interface temperature, $\Theta = 1$; (b) lower interface temperature, $\Theta = -1$. The results for the normal film ($\mu = 0$) are also depicted for reference. Here, $\beta = \pi/4$, $Ca = 0.01$, $Bi = 1$, and $Re = 6$

图 4. 时间增长率 ω_r 随波数 k 的变化关系在不同奇偶黏度比 μ 下的表现: (a) 较高界面温度, $\Theta = 1$; (b) 较低界面温度, $\Theta = -1$ 。同时给出了普通液膜($\mu = 0$)的结果作为对比。这里, $\beta = \pi/4$, $Ca = 0.01$, $Bi = 1$, $Re = 6$

图 4 给出了奇黏度对自润湿液膜失稳特性的影响。图中绘制了时间增长率 ω_r 随波数 k 的变化曲线, 并分别考察了在基底加热和冷却条件下奇偶黏度比 μ 变化所产生的影响。可以看出, 具有奇黏度的自润湿液膜对应的曲线始终位于牛顿流体曲线之下。随着奇偶黏度比的增大, 两幅图中的曲线均进一步偏离牛顿流体曲线。具体而言, 截止波数 k_c 和最大增长率 ω_m 均随 μ 的增大而减小, 这表明较大的奇黏度有助于提高流动稳定性。此外, 还可观察到, 在相同 μ 取值下, 图 4(a) 中的增长率低于图 4(b) 中的增长率, 这说明当 $\Theta < 0$ 时, 热毛细应力会促进流动失稳。当不考虑 μ 的影响时, 本文结果与文献[20]中的结论在定性上是一致的。

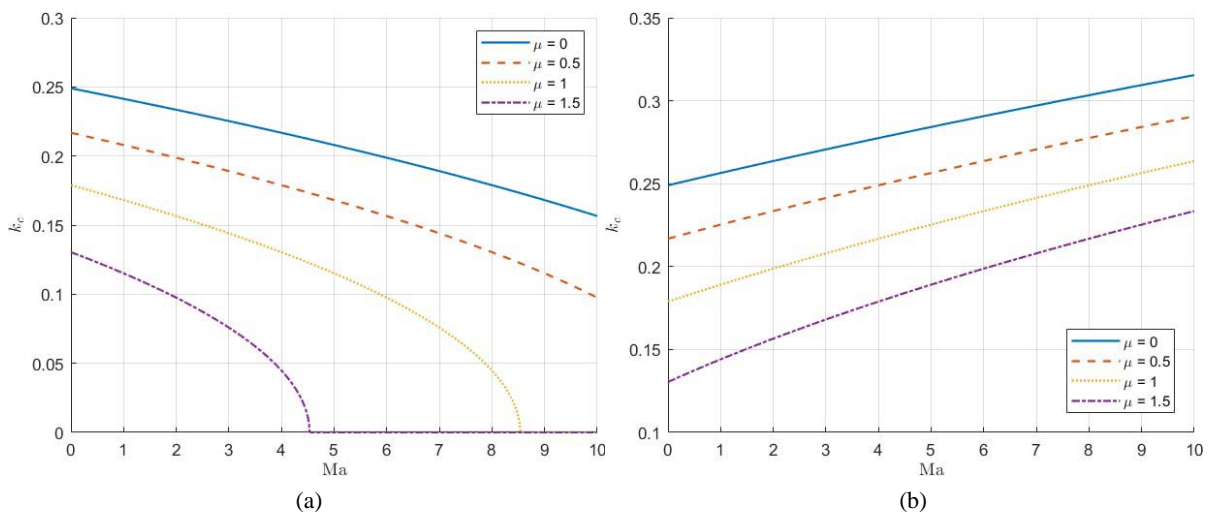


Figure 5. When $\mu = 0, 0.5, 1$, and 1.5 , the stability boundaries separating the stable and unstable regions of the film in the $Ma-k_c$ plane are shown for (a) Substrate with heating ($\Theta > 0$) and (b) substrate with cooling ($\Theta < 0$). Here, $Re = 6$, $Bi = 1$, $Ca = 0.01$, and $\beta = \pi/4$

图 5. 当 $\mu = 0, 0.5, 1$, 和 1.5 时, $Ma-k_c$ 平面内液膜稳定区与失稳区的分界曲线如图所示: (a) 基底加热($\Theta > 0$); (b) 基底冷却($\Theta < 0$)。其中, $Re = 6$, $Bi = 1$, $Ca = 0.01$, $\beta = \pi/4$

图 5 中的中性稳定曲线表明, 随着奇黏度参数 μ 的增大, 截止波数减小, 从而使失稳波数带变窄, 液膜稳定性增强。更重要的是, 图 5 表明热毛细效应既可能起稳定作用, 也可能起失稳作用, 这取决于 $\Theta = \theta_i - \theta_0$ 的符号。这种相反的行为来源于自润湿流体表面张力对温度的非单调依赖关系。在本文模型中, $d\sigma/dT = 2\sigma_T(T - T_0)$, 其符号在 $T = T_0$ 处发生改变[39]。在当前热模型下, 液膜局部变薄会导致界面温度升高。因此, 当 $\Theta > 0$ 时, 有 $d\sigma/dT > 0$, 此时较热且较薄区域具有更大的表面张力。由此产生的 Marangoni 应力会驱动液体流向该区域, 从而补充局部变薄并抑制扰动增长。因此, 随着 Ma 的增大, 失稳区逐渐缩小; 当 Ma 超过某一临界值 Ma_c 时, 液膜将达到线性稳定。此外, Ma_c 随 μ 的增大而减小, 这表明奇黏度进一步增强了这种稳定作用。相反, 当 $\Theta < 0$ 时, 有 $d\sigma/dT < 0$, 在这一温度区间内, 表面张力随温度升高而减小, 这与普通流体情形相同。此时, 较热且较薄区域具有较低的表面张力, Marangoni 应力会驱动液体远离该区域, 从而加剧膜厚的不均匀性并促进失稳。因此, 热毛细效应之所以会发生“促稳-促失稳”的转换, 其根本原因在于 $d\sigma/dT$ 符号的改变使 Marangoni 应力方向发生反转; 而奇黏度则主要通过减小截止波数并削弱扰动增长, 为系统提供额外的稳定作用。奇黏度项在式(53)中表现为通量中的 $-\mu H^3 H_x$, 将其代入质量守恒形式后, 该项等效于一个由奇黏度诱导的膜厚梯度扩散机制。在线性化后的扰动方程中, 它贡献出 $-\mu k^2$ 的增长率修正项, 即无论基底加热还是冷却, 只要 $\mu > 0$, 该项始终为负。因此, 奇黏度能够直接抵消惯性项 $2/5 Re k^2$ 所带来的失稳增长; 在 $\Theta < 0$ 时, 它还可以部分抵消促进失稳的 Marangoni 项; 在 $\Theta > 0$ 时, 则与稳定型 Marangoni 项共同作用, 进一步压低扰动增长率。这解释了为什么随着 μ 增大, 图 4 中的增长率曲线整体下移, 截止波数和最大增长率均减小, 图 6~14 中自由表面波动的振幅和频率也随之降低。

4. 数值模拟

由于难以直接获得用于确定液膜厚度的非线性演化方程(53)的显式解析解, 因此本文采用数值方法来捕捉其时空演化行为。为此, 首先需要将式(53)改写为如下形式:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (61)$$

$$Q = \frac{1}{3} H^3 - \frac{1}{3} H^3 (H_x \cot \beta - Ca^{-1} H_{xxx}) - \frac{Ma Bi H^2}{2(1 + Bi H)^2} H_x \Theta + \frac{2}{5} Re H^6 H_x - \mu H^3 H_x. \quad (62)$$

在本研究中, 液膜的演化由一个四阶薄膜方程所控制, 因此需要给定四个边界条件[40]。

$$\frac{\partial H}{\partial x}(0, t) = 0, \quad (63a)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}(L^*, t) = 0, \quad (63b)$$

$$\frac{\partial^3 H}{\partial x^3}(0, t) = 0, \quad (63c)$$

$$\frac{\partial^3 H}{\partial x^3}(L^*, t) = 0, \quad (63d)$$

这些边界条件保证了液膜轮廓在计算区域边界处能够平滑过渡到平坦且均匀的液膜, 其中 L^* 表示区域的无量纲长度。初始条件取为与最不稳定波数 k_m 对应的扰动。

$$H = 1 + 0.05 \cos k_m x. \quad (64)$$

我们将该非线性演化方程在均匀空间网格上进行离散, 其中 $x_i = (i-1)\Delta x$ ($i=1, \dots, N$), 且 $\Delta x = L^*/N$ 。各网格点处的液膜厚度记为 H_i , 其为时间的函数, 并满足一组含 N 个一阶常微分方程。

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} = -\frac{Q_{i+1/2} - Q_{i-1/2}}{\Delta x}, \quad (65)$$

其中, $Q_{i\pm 1/2}$ 表示函数 Q 在网格点 x_i 与 x_{i+1} 之间中点处的取值, 即 $x_{i\pm 1/2} = x_i \pm \Delta x/2$ 对于内部节点 $i = 3, \dots, N-2$, 中点处的 $Q_{i\pm 1/2}$ 可表示为

$$Q_{i+1/2} = \frac{H_{i+1}^3 + H_i^3}{6} - \frac{(H_{i+1}^3 + H_i^3) \cot \beta (H_{i+1} - H_i)}{6\Delta x} + \frac{Ca^{-1}(H_{i+1}^3 + H_i^3)}{6} \frac{H_{i+2} - 3H_{i+1} + 3H_i - H_{i-1}}{\Delta x^3} - \frac{MaBi\Theta(H_{i+1}^2 + H_i^2)}{4(1 + Bi(H_{i+1} + H_i)/2)^2} \frac{H_{i+1} - H_i}{\Delta x} + \frac{1}{5} Re(H_{i+1}^6 + H_i^6) \frac{H_{i+1} - H_i}{\Delta x} - \frac{\mu(H_{i+1}^3 + H_i^3)(H_{i+1} - H_i)}{2\Delta x}, \quad (66)$$

$$Q_{i-1/2} = \frac{H_i^3 + H_{i-1}^3}{6} - \frac{(H_i^3 + H_{i-1}^3)(H_i - H_{i-1}) \cot \beta}{6\Delta x} + \frac{Ca^{-1}(H_i^3 + H_{i-1}^3)}{6} \frac{H_{i+1} - 3H_i + 3H_{i-1} - H_{i-2}}{\Delta x^3} - \frac{MaBi\Theta(H_i^2 + H_{i-1}^2)}{4(1 + Bi(H_i + H_{i-1})/2)^2} \frac{H_i - H_{i-1}}{\Delta x} + \frac{1}{5} Re(H_i^6 + H_{i-1}^6) \frac{H_i - H_{i-1}}{\Delta x} - \frac{\mu(H_i^3 + H_{i-1}^3)(H_i - H_{i-1})}{2\Delta x}. \quad (67)$$

式(65)中的量 Q 必须在半网格点 $i \pm 1/2$ 处进行求值, 以保证与质量守恒的一致性。对于网格点 $i = 1, 2, N-1$, 需要在物理区域之外引入虚拟节点。在 $x=0$ 附近, 由对称边界条件可得 $H_0 = H$ 。在 $x=L^*$ 附近, 零斜率条件保证 $H_{N+1} = H_N$ 且 $H_{N+2} = H_N$ 。在给定上述边界条件之后, 采用 MATLAB 中的 ode15s 求解器对常微分方程组(65)进行数值积分。

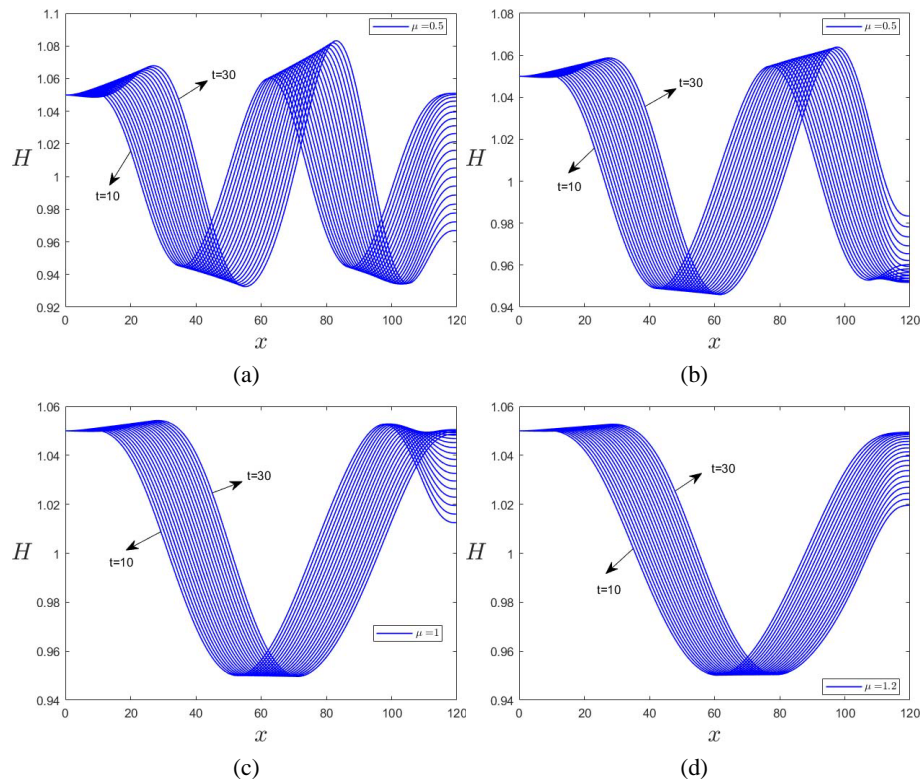


Figure 6. The thickness of the film at different time intervals ($Re = 6$, $Ca = 0.005$, $Bi = 1$, $\beta = \pi/4$, $Ma = 3$, $t = 10 \sim 30$, $\Theta = 1$): (a) $\mu = 0$, (b) $\mu = 0.5$, (c) $\mu = 1$, and (d) $\mu = 1.2$

图 6. 不同奇偶黏度比 μ 下液膜厚度随时间的演化曲线 ($Re = 6$, $Ca = 0.005$, $Bi = 1$, $\beta = \pi/4$, $Ma = 3$, $t = 10 \sim 30$, $\Theta = 1$): (a) $\mu = 0$, (b) $\mu = 0.5$, (c) $\mu = 1$, (d) $\mu = 1.2$

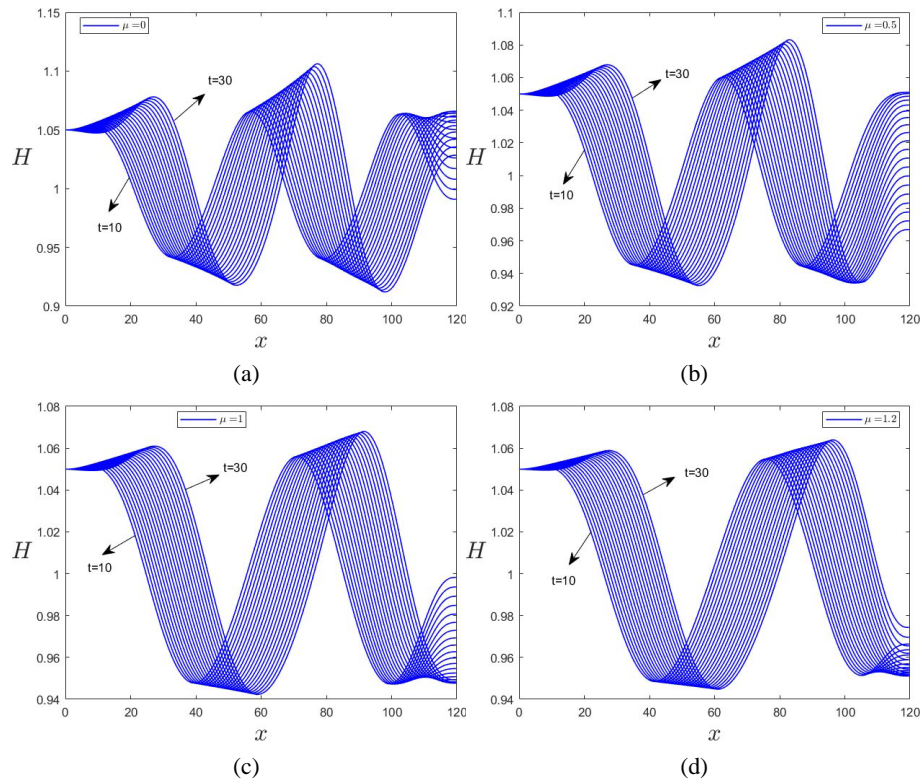
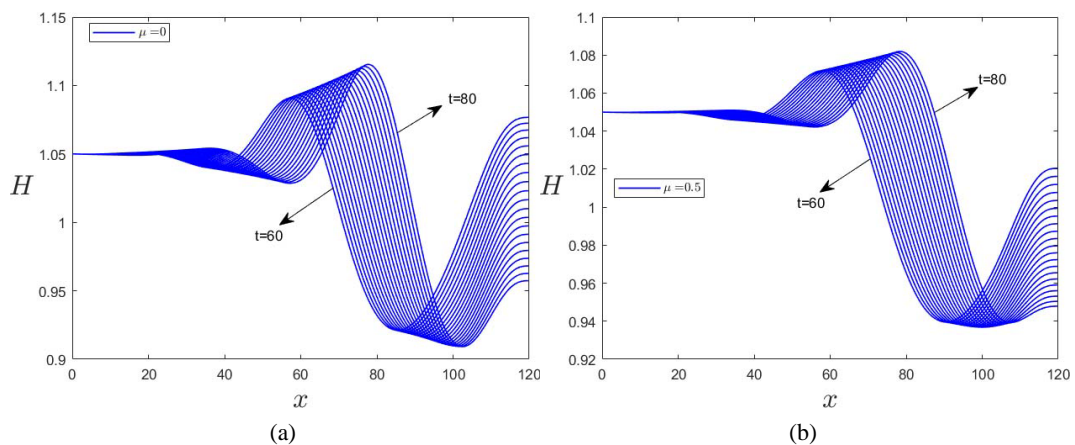


Figure 7. The thickness of the film at different time intervals ($Re = 6$, $Ca = 0.005$, $Bi = 1$, $\beta = \pi/4$, $Ma = 3$, $t = 10\sim 30$, $\Theta = -1$): (a) $\mu = 0$, (b) $\mu = 0.5$, (c) $\mu = 1$, and (d) $\mu = 1.2$

图 7. 不同奇偶黏度比 μ 下液膜厚度随时间的演化曲线 ($Re = 6$, $Ca = 0.005$, $Bi = 1$, $\beta = \pi/4$, $Ma = 3$, $t = 10\sim 30$, $\Theta = -1$): (a) $\mu = 0$, (b) $\mu = 0.5$, (c) $\mu = 1$, (d) $\mu = 1.2$

在图 6 和图 7 中，我们描述了基底加热和冷却条件下，液膜在 $t = 10\sim 30$ 时序范围内的演化过程。为了考察奇偶黏度比 μ 对液膜失稳的影响，可以观察到：在 μ 保持不变时，扰动振幅会随时间增大，这表明液膜处于失稳状态。在图 6(a)~(d) 中， μ 由 0 逐渐增大至 1.2。结果表明，随着 μ 的增大，波动的振幅和频率均逐渐减小。图 7 中同样表现出类似的变化趋势。在图 6(a) 中，当 $\mu = 0$ 时，振幅超过 1.07，且振荡频率相对较高。这表明当 $\mu \neq 0$ 时，液膜的稳定性增强。当 $\Theta = -1$ 时，在相同条件下波动的频率和振幅明显高于 $\Theta = 1$ 时的情况。这进一步证实了基底加热对液膜失稳具有稳定作用。



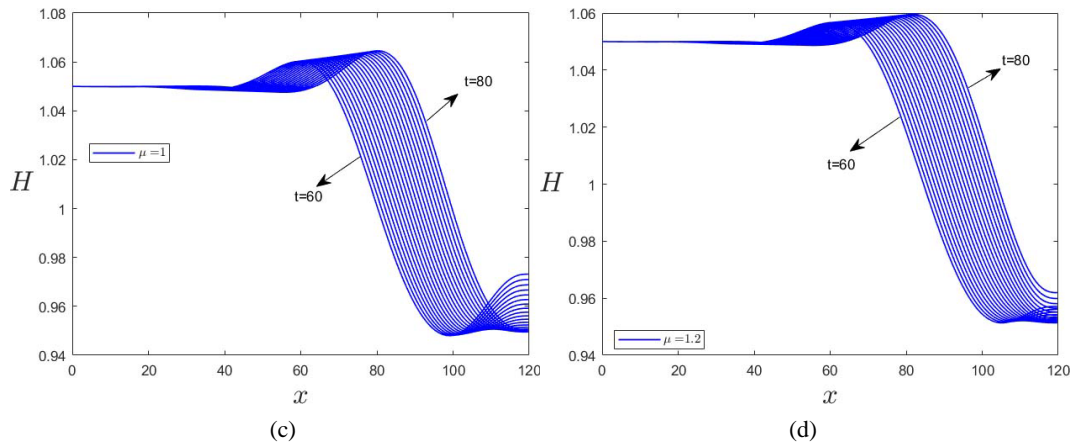


Figure 8. The thickness of the film at different time intervals ($Re = 6$, $Ca = 0.005$, $Bi = 1$, $\beta = \pi/4$, $Ma = 3$, $t = 60 \sim 80$, $\Theta = 1$): (a) $\mu = 0$, (b) $\mu = 0.5$, (c) $\mu = 1$, and (d) $\mu = 1.2$

图 8. 不同奇偶黏度比 μ 下液膜厚度随时间的演化曲线 ($Re = 6$, $Ca = 0.005$, $Bi = 1$, $\beta = \pi/4$, $Ma = 3$, $t = 60 \sim 80$, $\Theta = 1$): (a) $\mu = 0$, (b) $\mu = 0.5$, (c) $\mu = 1$, (d) $\mu = 1.2$

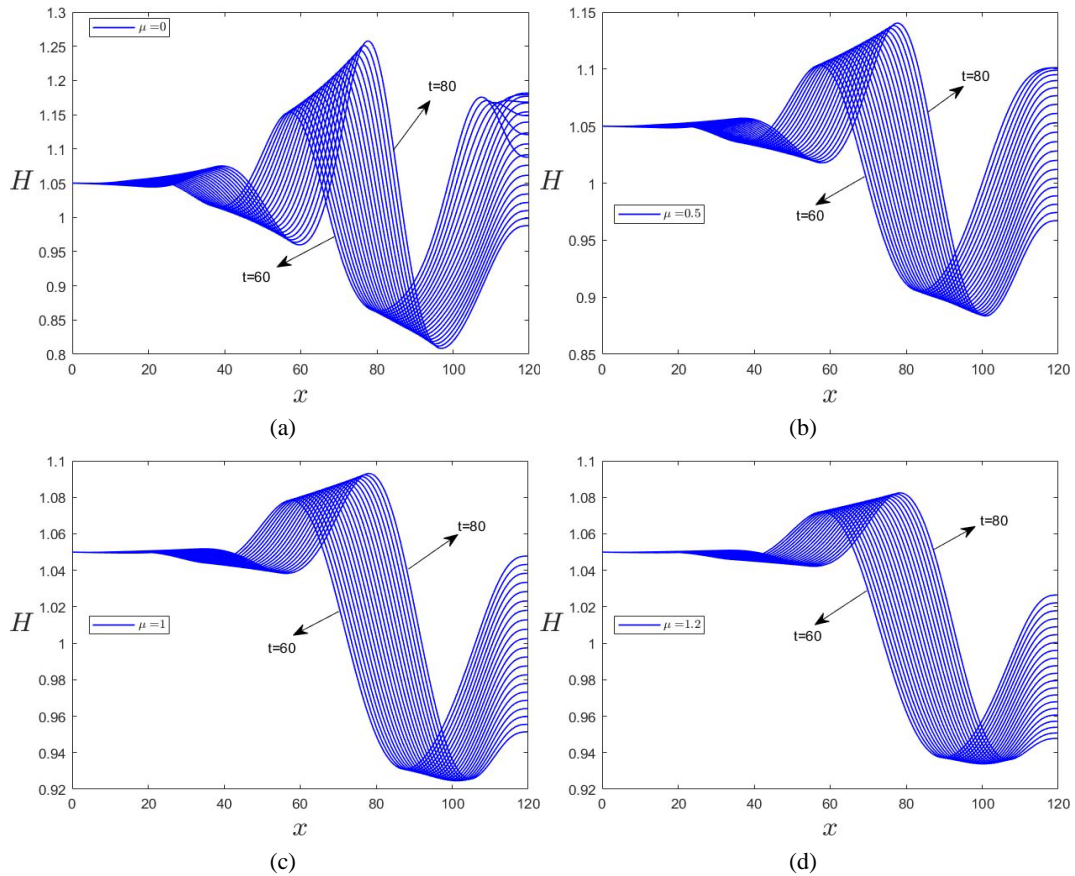


Figure 9. The thickness of the film at different time intervals ($Re = 6$, $Ca = 0.005$, $Bi = 1$, $\beta = \pi/4$, $Ma = 3$, $t = 60 \sim 80$, $\Theta = -1$): (a) $\mu = 0$, (b) $\mu = 0.5$, (c) $\mu = 1$, and (d) $\mu = 1.2$

图 9. 不同奇偶黏度比 μ 下液膜厚度随时间的演化曲线 ($Re = 6$, $Ca = 0.005$, $Bi = 1$, $\beta = \pi/4$, $Ma = 3$, $t = 60 \sim 80$, $\Theta = -1$): (a) $\mu = 0$, (b) $\mu = 0.5$, (c) $\mu = 1$, (d) $\mu = 1.2$

图 8 和图 9 展示了不同奇偶黏度比 μ 下自由表面的长期演化行为。各子图给出了在 $\Theta = 1$ 和 $\Theta = -1$

两种情况下, $t = 60 \sim 80$ 时间区间内的结果。随着奇黏度的增大, 波高逐渐减小, 表明其具有稳定流动的作用。对比图 6、图 7 与图 8、图 9 可以发现, 随着时间推移, 振荡振幅显著增大。在较长时间的振荡过程中, 薄膜中的扰动会沿倾斜基底向下游进一步积聚, 而基底前端处的自由表面则保持平坦。结合图 8 和图 9 还可以再次确认, $\Theta < 0$ 会促进流动失稳。对图 8(a) 和图 9(d) 所反映的 μ 与 Θ 的综合作用进行分析可以看出, 当 Θ 由加热转变为冷却时, 较大的 μ 值会使液膜表现出更强的稳定性。

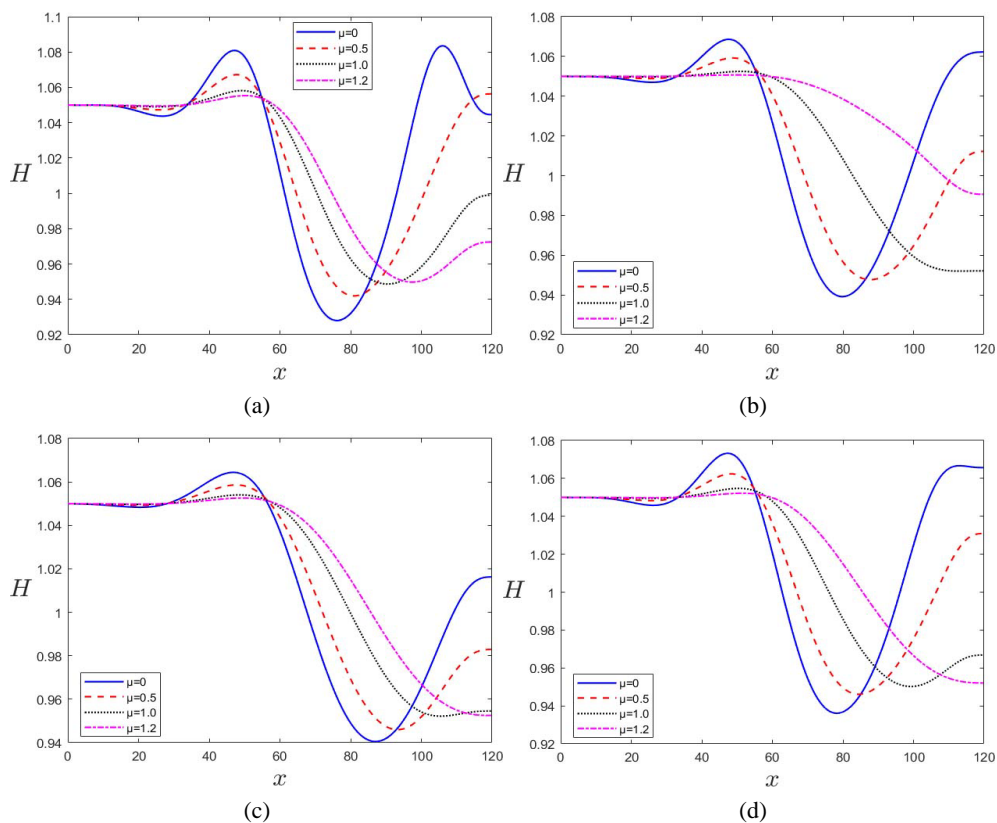
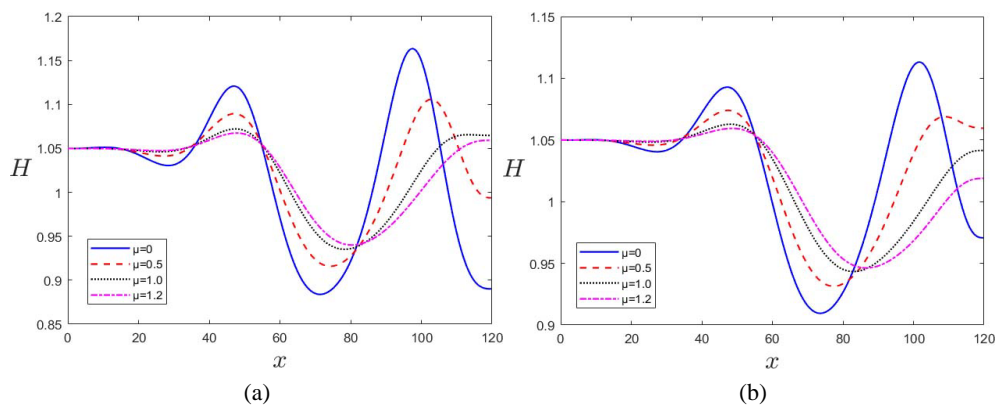


Figure 10. The film thickness for varying odd-even viscosity ratio is shown over the range $x = 0$ to 120, with $\Theta = 1$, $Ma = 3$, $t = 50$, and $Bi = 1$. The different panels in the figures represent: (a) $Re = 6$, $Ca = 0.005$, $\beta = \pi/4$; (b) $Re = 5$, $Ca = 0.005$, $\beta = \pi/4$; (c) $Re = 6$, $Ca = 0.0025$, $\beta = \pi/4$; (d) $Re = 6$, $Ca = 0.005$, $\beta = \pi/6$

图 10. 展示了不同奇偶黏度比下的薄膜厚度在 $x = 0$ 到 120 范围内的变化, 条件为 $\Theta = 1$, $Ma = 3$, $t = 50$, 和 $Bi = 1$ 。图中不同的子图表示: (a) $Re = 6$, $Ca = 0.005$, $\beta = \pi/4$; (b) $Re = 5$, $Ca = 0.005$, $\beta = \pi/4$; (c) $Re = 6$, $Ca = 0.0025$, $\beta = \pi/4$; (d) $Re = 6$, $Ca = 0.005$, $\beta = \pi/6$



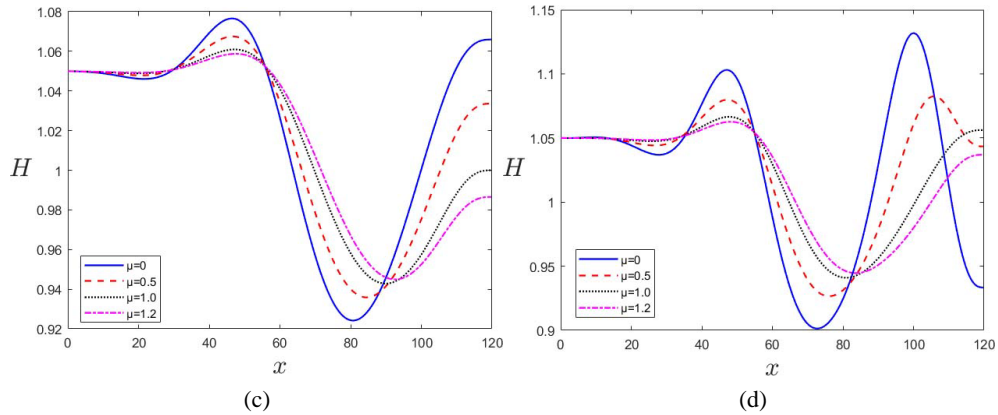


Figure 11. The film thickness for varying odd-even viscosity ratio is shown over the range $x = 0$ to 120, with $\Theta = -1$, $Ma = 3$, $t = 50$, and $Bi = 1$. The different panels in the figures represent: (a) $Re = 6$, $Ca = 0.005$, $\beta = \pi/4$; (b) $Re = 5$, $Ca = 0.005$, $\beta = \pi/4$; (c) $Re = 6$, $Ca = 0.0025$, $\beta = \pi/4$; (d) $Re = 6$, $Ca = 0.005$, $\beta = \pi/6$

图 11. 展示了不同奇偶黏度比下的薄膜厚度在 $x = 0$ 到 120 范围内的变化, 条件为 $\Theta = -1$, $Ma = 3$, $t = 50$, 和 $Bi = 1$ 。图中不同的子图表示: (a) $Re = 6$, $Ca = 0.005$, $\beta = \pi/4$; (b) $Re = 5$, $Ca = 0.005$, $\beta = \pi/4$; (c) $Re = 6$, $Ca = 0.0025$, $\beta = \pi/4$; (d) $Re = 6$, $Ca = 0.005$, $\beta = \pi/6$

图 10 和图 11 展示了自润湿奇黏性流体在倾斜平面上的数值结果。我们考察了 $t = 50$ 时的自由液面形态。对比图 10(a)与图 10(b)可以发现, 在其他参数保持不变的情况下, 雷诺数(Re)的减小能够通过降低振幅来稳定流动, 这表明惯性效应对流动稳定性有显著影响。从图 10(c)可观察到, 对于任意给定的黏度比 μ , 随着毛细数(Ca)的减小, 振幅也随之减小。较小的毛细数对应较高的表面张力, 从而抑制界面不稳定的发生。考虑图 10(a)与图 10(d), 扰动振幅随着倾角 β 的减小而减小, 表明较小的倾角能够更有效地稳定薄膜。图 11 所示的结果与图 10 基本一致, 仅在涉及基底加热和冷却的两种情形下有所不同。

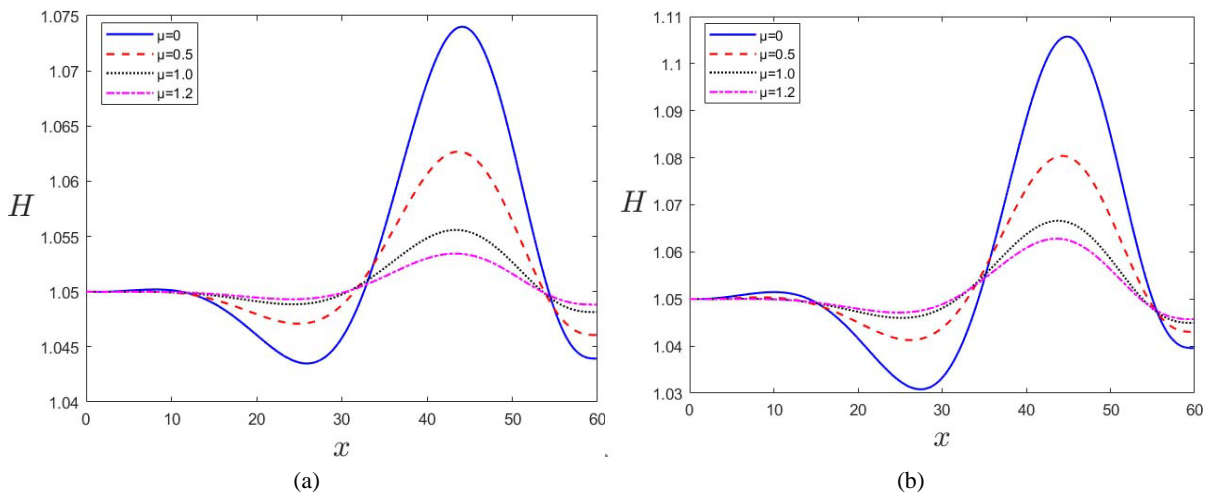


Figure 12. The film thickness for various odd-even viscosity ratio is shown over the range $x = 0$ to 60, with $Ma = 3$, $t = 50$, $Bi = 1$, $Re = 6$, $Ca = 0.005$, and $\beta = \pi/4$. The different panels in the figures represent: (a) $\Theta = 1$; (b) $\Theta = -1$

图 12. 展示了不同奇偶黏度比下的薄膜厚度在 $x = 0$ 到 60 范围内的变化, 条件为 $Ma = 3$, $t = 50$, $Bi = 1$, $Re = 6$, $Ca = 0.005$, 和 $\beta = \pi/4$ 。图中不同的子图表示: (a) $\Theta = 1$; (b) $\Theta = -1$

图 12 还展示了自润湿奇黏性流体在倾斜平面上流动的数值解的代表性结果。然而, 与图 10 和图 11 相比, 基底长度 x 不同: 图 10 和图 11 中基底长度为 $x = 120$, 而图 12 中基底长度为 $x = 60$ 。从图 10 与

图 12 可以观察到, 随着基底长度的减小, 扰动振幅减小, 这表明随着基底长度缩短, 流动不稳定性减弱。

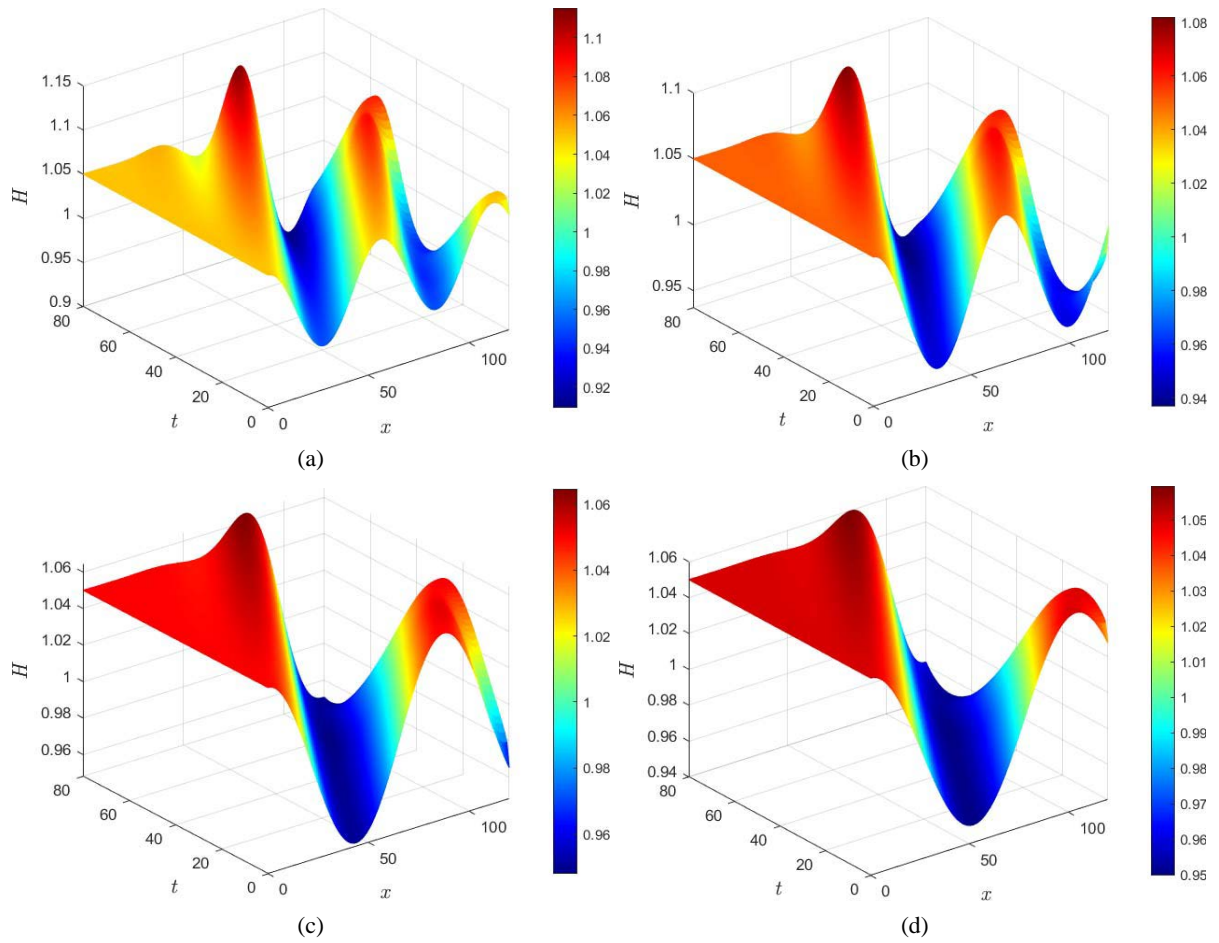
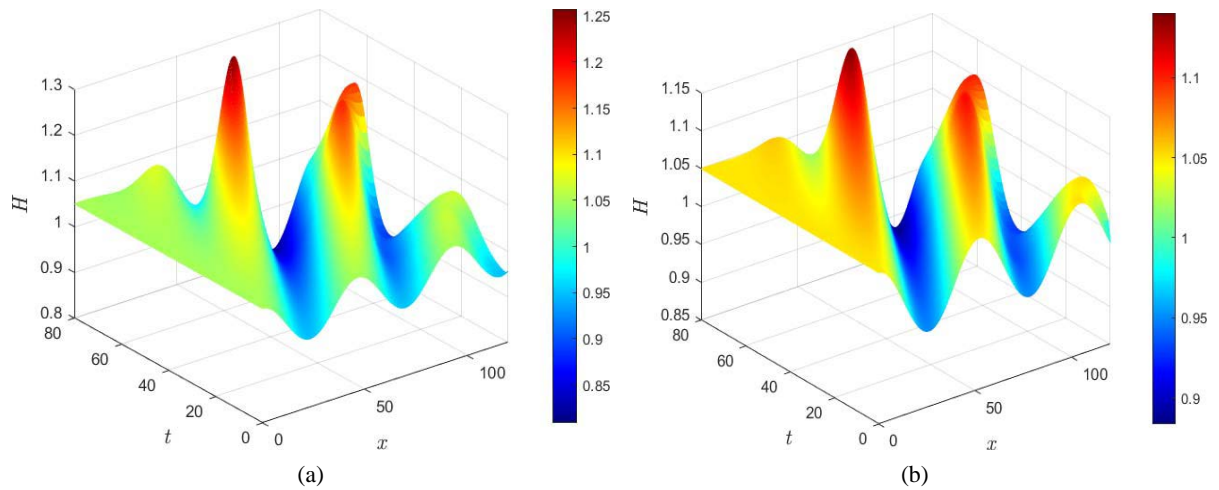


Figure 13. A three-dimensional representation of the waves with fixed parameters: $Re = 6$, $Ca = 0.005$, $Bi = 1$, $Ma = 3$, $\Theta = 1$, and $\beta = \pi/4$. The panels in the figure display (a) $\mu = 0$, (b) $\mu = 0.5$, (c) $\mu = 1$, and (d) $\mu = 1.2$

图 13. 展示了在固定参数条件下波动的三维表示: $Re = 6$, $Ca = 0.005$, $Bi = 1$, $Ma = 3$, $\Theta = 1$, 和 $\beta = \pi/4$ 。图中各子图对应的情况为: (a) $\mu = 0$, (b) $\mu = 0.5$, (c) $\mu = 1$, (d) $\mu = 1.2$



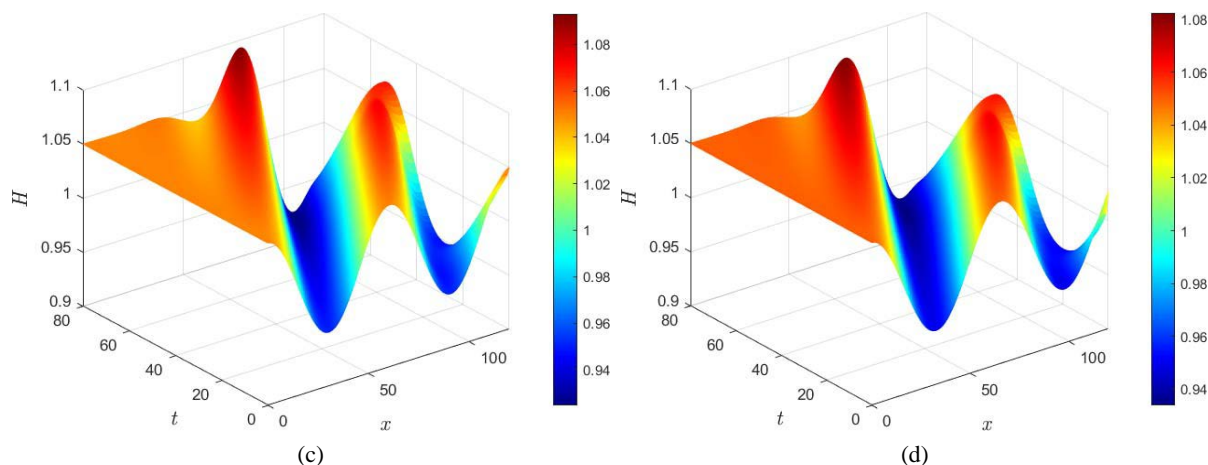


Figure 14. A three-dimensional representation of the waves with fixed parameters: $Re = 6$, $Ca = 0.005$, $Bi = 1$, $Ma = 3$, $\Theta = -1$, and $\beta = \pi/4$. The panels in the figure display (a) $\mu = 0$, (b) $\mu = 0.5$, (c) $\mu = 1$, and (d) $\mu = 1.2$

图 14. 展示了在固定参数条件下波动的三维表示: $Re = 6$, $Ca = 0.005$, $Bi = 1$, $Ma = 3$, $\Theta = -1$, 和 $\beta = \pi/4$ 。图中各子图对应的情况为: (a) $\mu = 0$, (b) $\mu = 0.5$, (c) $\mu = 1$, (d) $\mu = 1.2$

图 13 和图 14 展示了在不同奇黏性 μ 下, 波沿 x 方向和随时间 t 的演化情况, 在基底冷却和加热条件下的表现。所有这些结果均表明, 随着 μ 的增大, 波的最大高度和波频均减小, 因此奇黏性对流动不稳定具有稳定作用。

5. 总结

综上所述, 本研究考察了奇黏性对自润湿液膜在倾斜加热基底上流动不稳定性的影响, 同时考虑了惯性效应。基于(BEM)模型, 我们从控制方程和边界条件出发, 推导了自由液面非线性演化方程, 并引入奇偶黏度比 μ 来描述奇黏性的影响。通过对演化方程的线性稳定性分析, 我们发现, 当 Θ 为负时, 热毛细应力会诱发不稳定性, 而奇黏性对其影响有限; 当 Θ 为正时, 热毛细应力有助于流动稳定。此外, 分析结果表明, 无论 $\Theta > 0$ 还是 $\Theta < 0$, 随着奇偶黏度比的增加, 实际时间增长率和截止波数均减小。对比 $\Theta > 0$ 与 $\Theta < 0$ 的情况可知, 当 $\Theta < 0$ 时, 实际时间增长率和截止波数的增加幅度更为显著。非线性演化方程的数值模拟结果进一步支持了理论分析, 显示随着奇偶黏度比的增大, 表面波的振幅和频率显著降低。此外, 我们还观察到, 在一定范围内, 降低雷诺数(Re)、倾角(β)和毛细数(Ca)有助于系统的稳定化, 而缩短基底长度也进一步增强了流动稳定性。

基金项目

本研究由国家自然科学基金地区项目(12262026、12562027)、内蒙古自治区自然科学基金(2021MS01007、2025MS01004)以及内蒙古自治区高等学校创新团队项目(NMGIRT2323)资助。

参考文献

- [1] Weinstein, S.J. and Ruschak, K.J. (2004) Coating Flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **36**, 29-53. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.36.050802.122049>
- [2] Stone, H.A., Stroock, A.D. and Ajdari, A. (2004) Engineering Flows in Small Devices: Microfluidics toward a Lab-On-A-Chip. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **36**, 381-411. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.36.050802.122124>
- [3] Abe, Y., Iwaski, A. and Tanaka, K. (2005) Thermal Management with Self-Rewetting Fluids. *Microgravity—Science and Technology*, **16**, 148-152. <https://doi.org/10.1007/bf02945966>
- [4] Oron, A., Davis, S.H. and Bankoff, S.G. (1997) Long-Scale Evolution of Thin Liquid Films. *Reviews of Modern Physics*,

- 69, 931-980. <https://doi.org/10.1103/revmodphys.69.931>
- [5] Kalliadasis, S., Ruyer-Quil, C., Scheid, B. and Velarde, M.G. (2012) Falling Liquid Films. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-84882-367-9>
- [6] Benjamin, T.B. (1957) Wave Formation in Laminar Flow down an Inclined Plane. *Journal of Fluid Mechanics*, **2**, 554-573. <https://doi.org/10.1017/s0022112057000373>
- [7] Yih, C. (1991) Stability of Liquid Flow down an Inclined Plane. In: Lin, S.P. and Lai, W.M., Eds., *Selected Papers by Chia-Shun Yih*, World Scientific Publishing Company, 357-370. https://doi.org/10.1142/9789812813084_0033
- [8] Pearson, J.R.A. (1958) On Convection Cells Induced by Surface Tension. *Journal of Fluid Mechanics*, **4**, 489-500. <https://doi.org/10.1017/s0022112058000616>
- [9] Samanta, A., Ruyer-Quil, C. and Goyeau, B. (2011) A Falling Film down a Slippery Inclined Plane. *Journal of Fluid Mechanics*, **684**, 353-383. <https://doi.org/10.1017/jfm.2011.304>
- [10] Nakaya, C. (1975) Long Waves on a Thin Fluid Layer Flowing down an Inclined Plane. *The Physics of Fluids*, **18**, 1407-1412. <https://doi.org/10.1063/1.861037>
- [11] Abe, Y. (2006) Self-Rewetting Fluids: Beneficial Aqueous Solutions. *Annals of the New York Academy of Sciences*, **1077**, 650-667. <https://doi.org/10.1196/annals.1362.026>
- [12] Vochten, R. and Petre, G. (1973) Study of the Heat of Reversible Adsorption at the Air-Solution Interface. II. Experimental Determination of the Heat of Reversible Adsorption of Some Alcohols. *Journal of Colloid and Interface Science*, **42**, 320-327. [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(73\)90295-6](https://doi.org/10.1016/0021-9797(73)90295-6)
- [13] Oron, A. and Rosenau, P. (1994) On a Nonlinear Thermocapillary Effect in Thin Liquid Layers. *Journal of Fluid Mechanics*, **273**, 361-374. <https://doi.org/10.1017/s0022112094001977>
- [14] Su, H., Li, C., Li, D. and Ye, X. (2022) Enhanced Spreading of Surfactant-Containing, Self-Rewetting Fluids in Pulmonary Drug Delivery. *Physics of Fluids*, **34**, Article ID: 112105. <https://doi.org/10.1063/5.0116016>
- [15] Savino, R., De Cristofaro, D. and Cecere, A. (2017) Flow Visualization and Analysis of Self-Rewetting Fluids in a Model Heat Pipe. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **115**, 581-591. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.07.090>
- [16] Dong, L., Li, X. and Liu, R. (2020) Effect of Thermocapillary on Absolute and Convective Instability of Film Flow of Self-Rewetting Fluid. *Microgravity Science and Technology*, **32**, 415-422. <https://doi.org/10.1007/s12217-019-09778-8>
- [17] Xu, Z., Chen, J., Liu, H., Sahu, K.C. and Ding, H. (2021) Motion of Self-Rewetting Drop on a Substrate with a Constant Temperature Gradient. *Journal of Fluid Mechanics*, **915**, A116. <https://doi.org/10.1017/jfm.2021.130>
- [18] Batson, W., Agnon, Y. and Oron, A. (2017) Thermocapillary Modulation of Self-Rewetting Films. *Journal of Fluid Mechanics*, **819**, 562-591. <https://doi.org/10.1017/jfm.2017.191>
- [19] Ma, C. and Liu, J. (2021) Thin-Film Evolution and Fingering Instability of Self-Rewetting Films Flowing down an Inclined Plane. *Physics of Fluids*, **33**, Article ID: 022101. <https://doi.org/10.1063/5.0036367>
- [20] Zubair, M. and Vellingiri, R. (2023) Dynamics of Thin Self-Rewetting Liquid Films on an Inclined Heated Substrate. *Physics of Fluids*, **35**, Article ID: 112120. <https://doi.org/10.1063/5.0173990>
- [21] Avron, J.E. (1998) Odd Viscosity. *Journal of Statistical Physics*, **92**, 543-557. <https://doi.org/10.1023/a:1023084404080>
- [22] Samanta, A. (2022) Role of Odd Viscosity in Falling Viscous Fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, **938**, A9. <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.155>
- [23] Abanov, A., Can, T. and Ganeshan, S. (2018) Odd Surface Waves in Two-Dimensional Incompressible Fluids. *SciPost Physics*, **5**, Article 10. <https://doi.org/10.21468/scipostphys.5.1.010>
- [24] Kirkinis, E. and Andreev, A.V. (2019) Odd-Viscosity-Induced Stabilization of Viscous Thin Liquid Films. *Journal of Fluid Mechanics*, **878**, 169-189. <https://doi.org/10.1017/jfm.2019.644>
- [25] Banerjee, D., Souslov, A., Abanov, A.G. and Vitelli, V. (2017) Odd Viscosity in Chiral Active Fluids. *Nature Communications*, **8**, Article No. 1573. <https://doi.org/10.1038/s41467-017-01378-7>
- [26] Lapa, M.F. and Hughes, T.L. (2014) Swimming at Low Reynolds Number in Fluids with Odd, or Hall, Viscosity. *Physical Review E*, **89**, Article ID: 043019. <https://doi.org/10.1103/physreve.89.043019>
- [27] Bao, G. and Jian, Y. (2021) Odd-Viscosity-Induced Instability of a Falling Thin Film with an External Electric Field. *Physical Review E*, **103**, Article ID: 013104. <https://doi.org/10.1103/physreve.103.013104>
- [28] Chattopadhyay, S. and Ji, H. (2023) Thermocapillary Thin Film Flows on a Slippery Substrate with Odd Viscosity Effects. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **455**, Article ID: 133883. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2023.133883>
- [29] Mukhopadhyay, S. and Mukhopadhyay, A. (2021) Hydrodynamic Instability and Wave Formation of a Viscous Film Flowing down a Slippery Inclined Substrate: Effect of Odd-Viscosity. *European Journal of Mechanics—B/Fluids*, **89**, 161-170. <https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2021.05.013>

-
- [30] Zhao, J. and Jian, Y. (2021) Effect of Odd Viscosity on the Stability of Thin Viscoelastic Liquid Film Flowing along an Inclined Plate. *Physica Scripta*, **96**, Article ID: 055214. <https://doi.org/10.1088/1402-4896/abe587>
- [31] Jia, B. and Jian, Y. (2022) The Effect of Odd-Viscosity on Rayleigh-Taylor Instability of a Liquid Film under a Heated Inclined Substrate. *Physics of Fluids*, **34**, Article ID: 044104. <https://doi.org/10.1063/5.0085318>
- [32] Zhao, J. and Jian, Y. (2021) Effect of Odd Viscosity on the Stability of a Falling Thin Film in Presence of Electromagnetic Field. *Fluid Dynamics Research*, **53**, Article ID: 015510. <https://doi.org/10.1088/1873-7005/abde23>
- [33] Ma, C., Liu, J., Dai, X. and Liu, Y. (2022) Thermocapillary Effect on the Dynamics of Falling Self-Rewetting Fluid Films down a Heated Vertical Cylinder. *European Journal of Mechanics—B/Fluids*, **91**, 152-166. <https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2021.10.004>
- [34] Chattopadhyay, S., Desai, A.S., Gaonkar, A.K. and Mukhopadhyay, A. (2023) Role of Odd Viscosity on Falling Films over Compliant Substrates. *Physical Review Fluids*, **8**, Article ID: 064003. <https://doi.org/10.1103/physrevfluids.8.064003>
- [35] Mamalis, D., Koutsos, V. and Sefiane, K. (2016) On the Motion of a Sessile Drop on an Incline: Effect of Non-Monotonic Thermocapillary Stresses. *Applied Physics Letters*, **109**, Article ID: 231601. <https://doi.org/10.1063/1.4971396>
- [36] Pellegrino, F.M.D., Torre, I. and Polini, M. (2017) Nonlocal Transport and the Hall Viscosity of Two-Dimensional Hydrodynamic Electron Liquids. *Physical Review B*, **96**, Article ID: 195401. <https://doi.org/10.1103/physrevb.96.195401>
- [37] Sadiq, I.M.R. and Usha, R. (2008) Thin Newtonian Film Flow down a Porous Inclined Plane: Stability Analysis. *Physics of Fluids*, **20**, Article ID: 022105. <https://doi.org/10.1063/1.2841363>
- [38] Sadiq, I.M.R., Usha, R. and Joo, S.W. (2010) Instabilities in a Liquid Film Flow over an Inclined Heated Porous Substrate. *Chemical Engineering Science*, **65**, 4443-4459. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2010.04.005>
- [39] Scase, M.M. and Hill, R.J.A. (2018) Centrifugally Forced Rayleigh-Taylor Instability. *Journal of Fluid Mechanics*, **852**, 543-577. <https://doi.org/10.1017/jfm.2018.539>
- [40] Ajaev, V.S. (2012) *Interfacial Fluid Mechanics: A Mathematical Modeling Approach*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1341-7>