Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(6), 161-175
Published Online June 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.156274

Hans汉斯

具有风险相依的主从再保险和投资博弈

杨 舒，张 强*

宁夏大学数学统计学院，宁夏 银川

收稿日期：2026年5月13日；录用日期：2026年6月7日；发布日期：2026年6月16日

摘 要

本文在期望效用最大准则下研究保险公司与再保险公司间最优的主从再保险和投资博弈问题。假设保险公司从事两类具有共同冲击相依的保险业务，再保险公司既从事再保险业务也从事保险业务。再保险双方均投资于无风险资产和股票。其中，股票价格由**Ornstein-Uhlenbeck (O-U)**过程来描述。利用动态规划原理，分别推导出再保险双方的最优再保险合同和投资策略以及对应的值函数。最后，通过数值分析分析了模型参数对最优策略的影响。

关键词

主从博弈，共同冲击相依，动态规划原理

Stackelberg Reinsurance and Investment Game with Risk Dependence

Shu Yang, Qiang Zhang*

School of Mathematics and Statistics, Ningxia University, Yinchuan Ningxia

Received: May 13, 2026; accepted: June 7, 2026; published: June 16, 2026

Abstract

This paper investigates the optimal Stackelberg reinsurance and investment game between an insurer and a reinsurer under the expected utility maximization criterion. It is assumed that the insurer operates two classes of insurance businesses with common shock dependence, while the reinsurer engages in both reinsurance and direct insurance businesses. Both parties allocate their capital to risk-free assets and stocks, where the stock price dynamics are characterized by the Ornstein-Uhlenbeck (O-U) process. By using the dynamic programming principle, the optimal reinsurance contracts, investment strategies, and corresponding value functions for both the insurer

*通讯作者。

文章引用: 杨舒, 张强. 具有风险相依的主从再保险和投资博弈[J]. 应用数学进展, 2026, 15(6): 161-175.
DOI: 10.12677/aam.2026.156274

and reinsurer are derived separately. Finally, numerical analyses are conducted to illustrate the impact of model parameters on the optimal strategies.

Keywords

Stackelberg Game, Common Shock Dependence, Dynamic Programming Principle

1. 引言

在现实生活中，人们总会面临一些不确定性事件，如地震，火灾或遭受自然灾害。为了减少这些不确定性事件的发生，人们会购买一定数量的保险。使得保险业务的不断增加，保险公司所面临的风险也在不断增加，保险公司为了减少索赔风险，与再保险公司进行签订合同来分散部分风险，再保险公司承担这部分保险业务来提高收入。保险公司通过支付再保费来购买再保险，再保费价格的高低决定着保险公司购买份额的多少，同时也决定着再保险双方面临的索赔风险的大小。因此一个关键的问题是如何在保险公司与再保险公司之间寻求一个平衡的再保费价格与再保险策略。

在生活中的保险业务中，一类业务的索赔可能会导致不同的业务的索赔同时发生，保险公司与再保险公司在经营保险业务时一定也存在业务上的相依性。因此考虑多个险种之间的相关性也十分关键。谷爱玲研究了风险相依模型中两类保险业务在均值－方差准则下的最优投资策略问题，由 Lévy 过程来描述每个业务的盈余过程[1]。刘胜旺和李冰探究了在均值方差准则下，相依风险模型的框架中，得到了最优时间一致的投资和再保险策略[2]。对于最优再保险与投资策略问题，大多学者都以保险公司的利益角度出发，在多种优化准则下进行研究。Meng 等假设由带漂移项的布朗运动描述累计索赔过程，研究保险公司最小化破产概率的超额损失再保险问题[3]。张燕和王正艳研究以最大化双曲绝对风险效用期望效用最大化准则下，并考虑 O-U 风险模型的保险公司的再保险和投资策略问题[4]。杨志伟和张强引入 VaR 约束条件研究期望效用最大化为准则下的最优投资和再保险策略选择问题[5]，假设通过比例再保险分散索赔风险，股票服从 Heston 模型。

除此之外，由于历史数据的缺失、滞后或信息不对称，导致再保险双方无法准确估计模型参数，使得对模型保持模糊态度，以及历史数据与当前环境不匹配等原因会引发模型的不确定性。因此一些学者对模型不确定性下的投资决策进行研究。Chang 等探讨了一个模糊厌恶的保险公司稳健的时间一致再保险投资策略，以及超额损失再保险中的投资问题[6]。王雨薇等以破产概率最小化为目标，研究了模糊厌恶保险人的最优鲁棒投资再保险问题[7]。张雨浓等研究了在模糊环境下保险公司经营两类保险业务，以最大化平滑模糊效应为目标的最优再保险和投资策略问题[8]。其中金融市场存在违约债券和一个模糊资产。Han 等在均值－方差准则下，根据随机差分博弈框架，将时滞和模型不确定性纳入研究的模型中，从再保险双方共同利益中得到稳健的再保险合同[9]。

值得注意的是，由于保险公司对再保险公司在分保方面有极大的依赖性，使得再保险公司在费率定价上占主导地位，导致保险公司与再保险公司在金融市场上的地位不平等，因此保险公司有时不能接受最优的再保险策略，为此，学者们针对主从博弈框架下的再保险和投资策略问题进行研究。Chen 等首次提出了一种新的连续时间框架研究保险公司与再保险公司之间主从再保险博弈问题[10]，其中保险人和再保险人是随机的领导者和跟随者。Yuan 等将模型不确定性纳入考虑范畴，基于均值－方差准则和保险

公司采用损失相依保费原则研究了主从比例再保险博弈问题[11]。杨鹏和张晓燕假设金融市场存在一家保险公司从事两类保险业务，一家再保险公司从事一类保险业务。在 stackelberg 框架下得到最优定价和再保险合同[12]。然而，上述主从再保险和投资博弈模型均假设保险公司和再保险公司完全相信描述保险市场和金融市场的概率测度，事实上，由于市场的异常波动，信息掌握的不足，再保险公司往往对真实的概率测度持怀疑态度，认为模型存在不确定性。为此，本文将模糊厌恶纳入模型研究中，讨论再保险双方的再保险和投资决策问题。

基于目前的研究，本文考虑一家保险公司与一家再保险公司都经营保险业务，且这两类保险业务之间存在相依性。其中模糊厌恶的再保险公司是引领者，保险公司是跟随者。两家公司都可以投资股票，其中股票价格过程由 Ornstein-Uhlenbeck (O-U)过程描述。股票价格的瞬时收益率，采用反映市场状态的 O-U 过程，描述更为合理。O-U 过程具有均值回复特性，契合资本市场规律，而现实中股票收益与市场状态直接相关，市场状态变化会直接影响股票瞬时收益波动。这种描述方式能更精准捕捉二者关联，减少定价偏差，使股价刻画更贴近真实值。假设保险公司与再保险公司都可以投资股票，目的是最大化各自最终财富的期望指数效用。利用随机控制理论与博弈论等方法来建立保险公司与再保险公司间的主从再保险博弈模型，推导出各自的 HJB 方程，进一步求解获得再保险双方的最优策略，分析模型参数违约风险与风险相依性对最优策略的影响。

本文剩余部分：第 2 节介绍再保险双方在金融市场的盈余过程和财富过程，并构建最优主从再保险投资博弈模型；第 3 节求解再保险双方最优策略问题。第 4 节数值计算分析模型参数对均衡策略的影响；第 5 节总结。

2. 模型建立

假设研究中所有的随机过程都在$\left(\Omega,\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]},P\right)$概率空间中，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$表示保险公司在 0 到 t 时刻可观测到的所有信息的集合，$T>0$ 是交易的终止时间，P 是概率测度。本文假设保险公司与再保险公司都可以在金融市场中进行无风险投资与风险投资。对于无风险利率 $r\geq 0$，无风险资产投资的价格过程为：

$$\mathrm{d}S_0(t)=rS_0(t)\mathrm{d}t.$$

通过购买股票进行风险资产投资，股票的价格变化假设服从 O－U 过程，由如下随机微分方程表示：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S_1(t)&=S_1(t)\left[v+b(t)\mathrm{d}t+\sigma_1\mathrm{d}W_1(t)\right],\\ \mathrm{d}b(t)&=hb(t)\mathrm{d}t+\alpha\mathrm{d}W_2(t).\end{aligned}$$

$S_1(t)$是风险资产股票，$v>r>0$，其中 v 是风险资产的收益率，$\sigma_1>0$ 为风险资产的波动率，$\alpha>0$ 为市场状态的波动率，h 为均值回归速度参数。$W_1(t),W_2(t)$ 为布朗运动，它们之间具有一定的相关性且相关系数为 ρ，即 $E\left[W_1(t),W_2(t)\right]=\rho t$。

2.1. 盈余过程

我们假设市场上保险公司从事两类保险业务，不考虑从事再保险业务，其盈余过程满足微分方程：

$$\mathrm{d}R_1(t)=c\mathrm{d}t-g_1(t)\mathrm{d}t-g_2(t)\mathrm{d}t-\mathrm{d}\sum_{i=1}^{N(t)+N_1(t)}Q_i-\mathrm{d}\sum_{j=1}^{N(t)+N_2(t)}M_j,\tag{1}$$

两类保险业务发生索赔的次数是 $N_1(t),N_2(t)$ 两个互相独立的泊松过程，强度分别为 $\lambda\geq 0,\lambda_1\geq 0,\lambda_2\geq 0$。两类业务相互依赖通过索赔过程 $N(t)$ 体现。$\sum_{i=1}^{N(t)+N_2(t)}Q_i$，$\sum_{j=1}^{N(t)+N_2(t)}M_j$ 为两类保险业务

的累积索赔额。第一类保险业务的第 i 次索赔额 Q_i 与第二类保险业务的第 j 次索赔 M_j，是独立同分布且非负的随机变量序列，记 $E[Q_i]=\mu_1$，

$E[M_j]=\mu_2$。则均值为 $E\left[\sum_{i=1}^{N(t)+N_1(t)} Q_i\right]=(\lambda+\lambda_1)\mu_1 t$，$E\left[\sum_{j=1}^{N(t)+N_2(t)} M_j\right]=(\lambda+\lambda_2)\mu_2 t$。假设保险公司收取的保费 c 由期望原则确定 $c_1=(1+\theta_1)(\lambda+\lambda_1)\mu_1$，$c_2=(1+\theta_2)(\lambda+\lambda_2)\mu_2$。其中 $\theta_1>0$、$\theta_2>0$ 是保险公司安全负荷；保险公司为了转移风险向再保险公司购买 per-loss 再保险并支付再保费，我们用 $I_1(Q_i,t)$，$I_2(M_j,t)$ 表示保险公司对从事的两类保险业务自留的部分，再保险公司承担剩余的部分 $Q_i-I_1(Q_i,t), M_j-I_2(M_j,t)$。如果 $I_1(Q_i,t)=p_1(t)Q_i$，$I_2(M_j,t)=p_2(t)M_j$，则就是传统的比例再保险，本文考虑更一般的模型，不限定再保险方式，进而讨论再保险双方再保险合同的定价问题。假设再保费 $g(t)$ 通过方差保费原则确定，即

$$g_1(t)=(\lambda+\lambda_1)\Big(E\big[Q_i-I_1(Q_i,t)\big]+\eta_1(t)E\Big[\big(Q_i-I_1(Q_i,t)\big)^2\Big]\Big),$$

$$g_2(t)=(\lambda+\lambda_2)\Big(E\big[M_j-I_2(M_j,t)\big]+\eta_2(t)E\Big[\big(M_j-I_2(M_j,t)\big)^2\Big]\Big),$$

其中 $\eta_1(t)>0$，$\eta_2(t)>0$ 为再保险公司的安全负荷系数。此时保险公司的盈余过程为：

$$\mathrm{d}R_1(t)=(c_1+c_2)\mathrm{d}t-g_1(t)\mathrm{d}t-g_2(t)\mathrm{d}t-\mathrm{d}\sum_{i=1}^{N(t)+N_1(t)} I_1(Q_i,t)-\mathrm{d}\sum_{j=1}^{N(t)+N_2(t)} I_2(M_j,t), \tag{2}$$

根据 Chen 和 Yang 将离散的复合泊松过程转化为有布朗运动的连续项，使得盈余过程、财富过程成为连续随机过程，因此用连续扩散近似逼近离散泊松过程：

$$\mathrm{d}\sum_{i=1}^{N(t)+N_1(t)} I_1(Q_i,t)=(\lambda+\lambda_1)E\big[I_1(Q_i,t)\big]\mathrm{d}t-\sqrt{(\lambda+\lambda_1)E\big[I_1^2(Q_i,t)\big]}\,\mathrm{d}W_3(t),$$

$$\mathrm{d}\sum_{j=1}^{N(t)+N_2(t)} I_2(M_j,t)=(\lambda+\lambda_2)E\big[I_2(M_j,t)\big]\mathrm{d}t-\sqrt{(\lambda+\lambda_2)E\big[I_2^2(M_j,t)\big]}\,\mathrm{d}W_4(t).$$

其中 $W_3(t),W_4(t)$ 是两个标准布朗运动，它们之间的相关系数为 ρ_1：

$$\rho_1=\frac{\lambda E\big[I_1(Q_i,t)\big]E\big[I_2(M_j,t)\big]}{\sqrt{(\lambda+\lambda_1)(\lambda+\lambda_2)E\big[I_1^2(Q_i,t)\big]E\big[I_2^2(M_j,t)\big]}}.$$

此时保险公司的盈余过程为：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}R_1(t)=&\Big(\theta_1(\lambda+\lambda_1)\mu_1+\theta_2(\lambda+\lambda_2)\mu_2-(\lambda+\lambda_1)\eta_1(t)E\Big[\big(Q_i-I_1(Q_i,t)\big)^2\Big]\\&-(\lambda+\lambda_2)\eta_2(t)E\Big[\big(M_j-I_2(M_j,t)\big)^2\Big]\Big)\mathrm{d}t\\&+\sqrt{(\lambda+\lambda_1)E\big[I_1^2(Q_i,t)\big]}\,\mathrm{d}W_3(t)+\sqrt{(\lambda+\lambda_2)E\big[I_2^2(M_j,t)\big]}\,\mathrm{d}W_4(t).\end{aligned}$$

相应的再保险公司的盈余过程为：

$$\mathrm{d}R_r(t)=g_1(t)\mathrm{d}t+g_2(t)\mathrm{d}t-\mathrm{d}\sum_{i=1}^{N_1(t)+N(t)}\big(Q_i-I_1(Q_i,t)\big)-\mathrm{d}\sum_{j=1}^{N_2(t)+N(t)}\big(M_j-I_2(M_j,t)\big), \tag{3}$$

类似于 Chen 和 Yang [13]将复合泊松过程可扩散近似为：

$$\mathrm{d}\sum_{i=1}^{N(t)+N_1(t)}\left[Q_i-I_1(Q_i,t)\right]=(\lambda+\lambda_1)E\left[Q_i-I_1(Q_i,t)\right]\mathrm{d}t-\sqrt{(\lambda+\lambda_1)E\left[\left(Q_i-I_1(Q_i,t)\right)^2\right]}\mathrm{d}\bar{W}_3(t),$$

$$\mathrm{d}\sum_{i=1}^{N(t)+N_2(t)}\left[M_j-I_2(M_j,t)\right]=(\lambda+\lambda_2)E\left[M_j-I_2(M_j,t)\right]\mathrm{d}t-\sqrt{(\lambda+\lambda_2)E\left[\left(M_j-I_2(M_j,t)\right)^2\right]}\mathrm{d}\bar{W}_4(t).$$

其中 $\bar{W}_3(t),\bar{W}_4(t)$ 是两个标准布朗运动，相关系数为 ρ_2：

$$\rho_2=\frac{\lambda E\left[Q_i-I_1(Q_i,t)\right]E\left[M_j-I_2(M_j,t)\right]}{\sqrt{(\lambda+\lambda_1)(\lambda+\lambda_2)E\left[\left(Q_i-I_1(Q_i,t)\right)^2\right]E\left[\left(M_j-I_2(M_j,t)\right)^2\right]}}.$$

此时再保险公司的盈余过程为：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}R_r(t)=&\left((\lambda+\lambda_1)\eta_1(t)E\left[\left(Q_i-I_1(Q_i,t)\right)^2\right]+(\lambda+\lambda_2)\eta_2(t)E\left[\left(M_j-I_2(M_j,t)\right)^2\right]\right)\mathrm{d}t\\&+\sqrt{(\lambda+\lambda_1)E\left[\left(Q_i-I_1(Q_i,t)\right)^2\right]}\mathrm{d}\bar{W}_3(t)+\sqrt{(\lambda+\lambda_2)E\left[\left(M_j-I_2(M_j,t)\right)^2\right]}\mathrm{d}\bar{W}_4(t).\end{aligned}$$

2.2. 财富过程

假设保险公司原有 $X_I(t)$ 的金额，$a_1(t)$ 为保险公司投资股票的金额，保险公司剩余的金额 $X_I(t)-a_1(t)$ 用于投资无风险资产。因此，在策略 $u_1=\left(a_1(t),I_1(Q_i,t),I_2(M_j,t)\right)$ 下保险公司的财富过程为：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X_I(t)=&a_1(t)\frac{\mathrm{d}S_1(t)}{S_1(t)}+\left(X_I(t)-a_1(t)\right)\frac{\mathrm{d}S_0(t)}{S_0(t)}+\mathrm{d}R_I(t)\\=&\Big(a_1(t)\left(v+b(t)-r\right)+rX_I(t)+\theta_1(\lambda+\lambda_1)\mu_1+\theta_2(\lambda+\lambda_2)\mu_2\\&-(\lambda+\lambda_1)\eta_1(t)E\left[\left(Q_i-I_1(Q_i,t)\right)^2\right]-(\lambda+\lambda_2)\eta_2(t)E\left[\left(M_j-I_2(M_j,t)\right)^2\right]\Big)\mathrm{d}t\\&+a_1(t)\sigma_1\mathrm{d}W_1(t)+\sqrt{(\lambda+\lambda_1)E\left[I_1^2(Q_i,t)\right]}\mathrm{d}W_3(t)+\sqrt{(\lambda+\lambda_2)E\left[I_2^2(M_j,t)\right]}\mathrm{d}W_4(t).\end{aligned}\tag{4}$$

假设再保险公司有 $X_r(t)$ 的金额，$a_2(t)$ 为再保险公司投资股票的金额，再保险公司剩余的金额 $X_r(t)-a_2(t)$ 用于投资无风险资产。因此，在策略 $u_2=\left(a_2(t),\eta_1(t),\eta_2(t)\right)$ 下再保险公司的财富过程为：

$$\begin{aligned}dX_r(t)=&a_2(t)\frac{\mathrm{d}S_1(t)}{S_1(t)}+\left(X_r(t)-a_2(t)\right)\frac{\mathrm{d}S_0(t)}{S_0(t)}+\mathrm{d}R_r(t)\\=&\Big(a_2(t)\left(v+b(t)\right)+r\left(X_r(t)-a_2(t)\right)+(\lambda+\lambda_1)\eta_1(t)E\left[\left(Q_i-I_1(Q_i,t)\right)^2\right]\\&+(\lambda+\lambda_2)\eta_2(t)E\left[\left(M_j-I_2(M_j,t)\right)^2\right]\Big)\mathrm{d}t+a_2(t)\sigma_1\mathrm{d}W_1(t)\\&+\sqrt{(\lambda+\lambda_1)E\left[\left(Q_i-I_1(Q_i,t)\right)^2\right]}\mathrm{d}\bar{W}_3(t)+\sqrt{(\lambda+\lambda_2)E\left[\left(M_j-I_2(M_j,t)\right)^2\right]}\mathrm{d}\bar{W}_4(t).\end{aligned}\tag{5}$$

3. 模型建立与求解

首先假设保险公司和再保险公司的指数效用函数分别为：

$$U_1(X_I)=-\frac{1}{m_1}\mathrm{e}^{-m_1x_I},\quad U_2(X_r)=-\frac{1}{m_2}\mathrm{e}^{-m_2x_r}.\tag{6}$$

其中 $m_1>0$、$m_2>0$ 分别为保险公司和再保险公司的风险厌恶参数。

考虑两类业务间的相依性，我们构建保险公司与再保险公司的主从博弈模型，再保险公司作为领导者，保险公司作为跟随者：

step 1：通过再保险公司给定的 $(\eta_1(t),\eta_2(t))\in\eta(t)$，保险公司目的是确定最优风险承担策略 $(I_1^*(Q_i,t),I_2^*(M_j,t))\in I(t)$ 实现自身目标函数最大化：

$$J_1(t,X_I)=\sup E_{t,X_I}^{P}\left[U_1\left(X_I(T)\right)\right],$$

step 2：再保险公司针对保险公司选择的 $(I_1^*(Q_i,t),I_2^*(M_j,t))\in I(t)$，寻找再保险定价策略 $(\eta_1^*(t),\eta_2^*(t))\in\eta(t)$，使得目标函数最大化：

$$J_2(t,X_r)=\sup E_{t,X_r}^{P}\left[U_2\left(X_r(T)\right)\right].$$

step 3：保险公司根据再保险公司的最优定价策略 $(\eta_1^*(t),\eta_2^*(t))\in\eta(t)$，调整自身风险承担策略，$(I_1^*(Q_i,t),\eta_1^*(t))$，$(I_2^*(M_j,t),\eta_2^*(t))$ 即为最优再保险合同。

保险公司最优化问题：为获得均衡再保险，我们定义保险公司的值函数为：

$$V_1(t,X_I)=\sup_{\mu_1\in U}E_{t,X_I}^{P}\left[-\frac{1}{m_1}\mathrm{e}^{-m_1x_I(T)}\right]. \tag{7}$$

其中 E_{t,X_r}^{P} 是概率测度 P 下计算的期望，根据动态规划原理值函数的变化需求，在 $\forall t\in[0,T]$ 下，推导出保险公司的 HJB 方程与值函数：

$$\begin{cases}\sup\limits_{\mu_1\in U}\left\{\mathcal{A}^{\mu_1}V_1(t,X_I)\right\}=0,\\ V_1(T,X_I)=U_1(X_I).\end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{\mu_1}V_1={}&V_{1t}+V_{1x_I}\Big(a_1(v+b-r)+rX_I+\theta_1(\lambda+\lambda_1)\mu_1+\theta_2(\lambda+\lambda_2)\mu_2\\&-(\lambda+\lambda_1)\eta_1(t)E\left[\left(Q_i-I_1(Q_i,t)\right)^2\right]-(\lambda+\lambda_2)\eta_2(t)E\left[\left(M_j-I_2(M_j,t)\right)^2\right]\Big)\\&+a_1\sigma_1\alpha\rho V_{1x_Ib}+hbV_{1b}+\frac{1}{2}\alpha^2V_{1bb}+\frac{1}{2}V_{1x_Ix_I}\Big(a_1^2\sigma_1^2+(\lambda+\lambda_1)E\left[I_1^2(Q_i,t)\right]\\&+(\lambda+\lambda_2)E\left[I_2^2(M_j,t)\right]+2\lambda E\left[I_1(Q_i,t)\right]E\left[I_2(M_j,t)\right]\Big).\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $V_{1t},V_{1b},V_{1x},V_{1xx},V_{1xb},V_{1bb}$ 是值函数的偏导数。

再保险公司最优化问题：在现实生活中，再保险公司由于数据局限，不可测的复杂环境等各种因素导致其对概率测度 P 空间下的决策模型并不完全信任，因此保持模糊谨慎态度，假设再保险公司是模糊厌恶的，因此我们考虑替代概率测度空间下的决策模型。通过引入与概率测度 P 等价的其他概率测度 $\mathcal{O}$ 来定义替代模型，概率测度模型属于集合 $\mathcal{Q}$，其定义为 $\mathcal{Q}=\{\mathcal{O}\mid\mathcal{O}\sim P\}$。

(1) 接下来我们定义一个过程，$\phi(t)=(\phi_1(t),\phi_2(t),\phi_3(t),\phi_4(t))$ 满足：

(2) 对于每个概率扭曲函数，$\phi(t)$ 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的过程；

(3) 对于 $i=1,2,3,4$，$\phi_i(t)>0$ 必然成立；

$E^P\left[\exp\left\{\int_0^T\left(\phi_1^2(s)+\phi_2^2(s)+\phi_3^2(s)+\phi_4^2(s)\right)\mathrm{d}s\right\}\right]<\infty$。我们定义再保险公司的指数过程 $\{\Lambda^\phi(t)\}$：

$$\begin{aligned}\Lambda^\phi(t)=\exp\Big\{&\int_0^t\phi_1(s)\mathrm{d}W_1(s)-\frac{1}{2}\int_0^t\phi_1^2(s)\mathrm{d}s+\int_0^t\phi_2(s)\mathrm{d}W_2(s)-\frac{1}{2}\int_0^t\phi_2^2(s)\mathrm{d}s\\&+\int_0^t\phi_3(s)\mathrm{d}\bar{W}_3(s)-\frac{1}{2}\int_0^t\phi_3^2(s)\mathrm{d}s+\int_0^t\phi_4(s)\mathrm{d}\bar{W}_4(s)-\frac{1}{2}\int_0^t\phi_4^2(s)\mathrm{d}s\Big\}.\end{aligned}$$

因为$W(t)=\left(W_1(t),W_2(t),\bar{W}_3(t),\bar{W}_4(t)\right)$是一个标准四维布朗运动，根据 Girsonva 定理，我们构建合适的概率测度下的布朗运动，即：

$$\mathrm{d}W_1^{\vartheta}(t)=\mathrm{d}W_1(t)-\phi_1(t)\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}W_2^{\vartheta}(t)=\mathrm{d}W_2(t)-\phi_2(t)\mathrm{d}t,$$
$$\mathrm{d}\bar{W}_3^{\vartheta}(t)=\mathrm{d}\bar{W}_3(t)-\phi_3(t)\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}\bar{W}_4^{\vartheta}(t)=\mathrm{d}\bar{W}_4(t)-\phi_4(t)\mathrm{d}t.$$

概率测度ϑ下，再保险公司的财富过程为：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X_r^{\vartheta}(t)=&\Big(a_2(t)(v+b(t))+r\left(X_r(t)-a_2(t)\right)+a_2(t)\sigma_1\phi_1(t)+(\lambda+\lambda_1)\eta_1(t)E\left[\left(Q_i-I_1(Q_i,t)\right)^2\right]\\&+(\lambda+\lambda_2)\eta_2(t)E\left[\left(M_j-I_2(M_j,t)\right)^2\right]+\sqrt{(\lambda+\lambda_1)E\left[\left(Q_i-I_1(Q_i,t)\right)^2\right]}\phi_3(t)\\&+\sqrt{(\lambda+\lambda_2)E\left[\left(M_j-I_2(M_j,t)\right)^2\right]}\phi_4(t)\Big)\mathrm{d}t+a_2(t)\sigma_1\mathrm{d}W_1^{\vartheta}(t)\\&+\sqrt{(\lambda+\lambda_1)E\left[\left(Q_i-I_1(Q_i,t)\right)^2\right]}\mathrm{d}\bar{W}_3^{\vartheta}(t)+\sqrt{(\lambda+\lambda_2)E\left[\left(M_j-I_2(M_j,t)\right)^2\right]}\mathrm{d}\bar{W}_4^{\vartheta}(t).\end{aligned}$$

相应的：

$$\mathrm{d}b^{\vartheta}(t)=\left(hb(t)+\alpha\phi_2(t)\right)\mathrm{d}t+\alpha\mathrm{d}W_2^{\vartheta}(t).$$

定义 3.1 令$U=\mu_1(t)\times\mu_2(t)$. 如果$\mu_1(t)\times\mu_2(t)=\left\{\left(a_1(t),I_1(Q_i,t),I_2(M_j,t)\times\left(a_2(t),\eta_1(t),\eta_2(t)\right)\right)\right\}$为可接受策略，则满足条件：

(1) $\mu_1(t),\mu_2(t)$是$\mathcal{F}_t$可测的，对于任意的$t\in[0,T]$；

(2) 决策周期$t\in[0,T]$内，$E_{t,X_r}^{\vartheta}\left[\int_0^T\left(a_2^2(s)+\eta_1^2(s)+\eta_2^2(s)\right)\mathrm{d}s\right]<\infty$；

(3) $\forall(t,X_I)\in[0,T]\times R$，$\forall(t,X_r)\in[0,T]\times R$，对于$\mathrm{d}X_I(t)$，$\mathrm{d}X_r^{\vartheta}(t)$有唯一的强解。

由于$\mu_1(t)\times\mu_2(t)$为可接受策略，根据已知再保险策略$\mu_2(t)$，可得到再保险公司的目标函数为：

$$J_2(t,X_r,I,\eta)=\sup_{\mu_2\in U}\inf_{\vartheta\in\mathcal{Q}}E_{(t,X_r)}^{\vartheta}\left\{-\frac{1}{m_2}\mathrm{e}^{-m_2X_r(T)}+\int_0^T\Phi\left(s,X_r(s),\phi(s)\right)\mathrm{d}s\right\}.\tag{10}$$

$$\Phi\left(t,X_r(t),\phi(t)\right)=\frac{\phi_1^2(t)}{2\psi_1(t)}+\frac{\phi_2^2(t)}{2\psi_2(t)}+\frac{\phi_3^2(t)}{2\psi_3(t)}+\frac{\phi_4^2(t)}{2\psi_4(t)}.$$

用来衡量P与ϑ的偏离程度，$\psi_1(t)=-\frac{\varphi_1}{m_2V_2},\psi_2(t)=-\frac{\varphi_2}{m_2V_2},\psi_3(t)=-\frac{\varphi_3}{m_2V_2},\psi_4(t)=-\frac{\varphi_4}{m_2V_2}$。$\varphi_i(t)\geq 0$，反映了再保险公司对模型的不确定程度，$\psi_i(t)\geq 0$，$i=(1,2,3,4,5)$为扩散风险与跳跃风险的模糊厌恶系数。若$\varphi_i(t)$越大，函数值就越大，使得再保险公司对模型越不信任，厌恶程度越高；反之厌恶程度越小。

为获得均衡再保险，我们将模糊厌恶的再保险公司的值函数定义为：

$$V_2(t,X_r)=\sup_{\mu_2\in U}\inf_{\vartheta\in\mathcal{Q}}E_{t,X_r}^{\vartheta}\left[-\frac{1}{m_2}\mathrm{e}^{-m_2X_r(T)}+\int_0^T\Phi\left(s,X_r(s),\phi(s)\right)\mathrm{d}s\right].\tag{11}$$

其中E_{t,X_r}^{ϑ}是替代测度ϑ下计算的期望，根据动态规划原理值函数的变化需求，对于$\forall t\in[0,T]$，我们推导出模糊厌恶的再保险公司的 HJB 方程和值函数：

$$\begin{cases}\sup\limits_{\mu_2\in U}\inf\limits_{\Phi}\left\{\mathcal{A}^{\mu_2,\phi}V_2(t,X_r)+\Phi\left(t,X_r(t),\phi(t)\right)\right\}=0,\\V_2(T,X_r)=U_2(X_r).\end{cases}\tag{12}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}^{\mu_2,\phi}V_2 = {} & V_{2t}+\left(hb+\alpha\phi_2\right)V_{2b}+V_{2X_r}\Big(a_2\left(v+b-r\right)+rX_r+a_2\sigma_1\phi_1+\left(\lambda+\lambda_1\right)\eta_1\left(t\right)E\Big[\left(Q_i-I_1\left(Q_i,t\right)\right)^2\Big] \\
& +\left(\lambda+\lambda_2\right)\eta_2\left(t\right)E\Big[\left(M_j-I_2\left(M_j,t\right)\right)^2\Big]+\sqrt{\left(\lambda+\lambda_1\right)E\Big[\left(Q_i-I_1\left(Q_i,t\right)\right)^2\Big]}\phi_3 \\
& +\sqrt{\left(\lambda+\lambda_2\right)E\Big[\left(M_j-I_2\left(M_j,t\right)\right)^2\Big]}\phi_4\Big)+\frac{1}{2}\alpha^2V_{2bb}+a_2\sigma_1\alpha\rho V_{2X_rb} \\
& +\frac{1}{2}V_{2X_rX_r}\Big(a_2^2\sigma_1^2+\left(\lambda+\lambda_1\right)E\Big[\left(Q_i-I_1\left(Q_i,t\right)\right)^2\Big]+\left(\lambda+\lambda_2\right)E\Big[\left(M_j-I_2\left(M_j,t\right)\right)^2\Big] \\
& +2\lambda E\left[Q_i-I_1\left(Q_i,t\right)\right]E\left[M_j-I_2\left(M_j,t\right)\right]\Big),
\end{aligned}
\tag{13}
$$

其中$V_{2t},V_{2b},V_{2x},V_{2xx},V_{2xb},V_{2bb}$是值函数的偏导数。

3.1. 保险公司最优再保险投资策略

本节运用动态规划原理，保险公司的 HJB 方程由(8)得到：

$$
\begin{cases}
0=\sup\limits_{\mu_1\in U}\Big\{V_{1t}+hbV_{1b}+\frac{1}{2}\alpha^2V_{1bb}+V_{1x_I}\Big(a_1\left(v+b-r\right)+rx_I+\theta_1\left(\lambda+\lambda_1\right)\mu_1+\theta_2\left(\lambda+\lambda_2\right)\mu_2 \\
\quad -\left(\lambda+\lambda_1\right)\eta_1\left(t\right)E\Big[\left(Q_i-I_1\left(Q_i,t\right)\right)^2\Big]-\left(\lambda+\lambda_2\right)\eta_2\left(t\right)E\Big[\left(M_j-I_2\left(M_j,t\right)\right)^2\Big]\Big)+a_1\sigma_1\alpha\rho V_{1x_Ib} \\
\quad +\frac{1}{2}V_{1x_Ix_I}\Big(a_1^2\sigma_1^2+\left(\lambda+\lambda_1\right)E\left[I_1^2\left(Q_i,t\right)\right]+\left(\lambda+\lambda_2\right)E\left[I_2^2\left(M_j,t\right)\right]+2\lambda E\left[I_1\left(Q_i,t\right)\right]E\left[I_2\left(M_j,t\right)\right]\Big)\Big\}, \\
V_1\left(T,x_I,1\right)=-\frac{1}{m_1}\mathrm{e}^{-m_1x_I}.
\end{cases}
\tag{14}
$$

为了求解 HJB 方程，我们假设保险公司的值函数是以下形式：

$$
V_1\left(t,x_I\right)=-\frac{1}{m_1}\mathrm{e}^{-m_1\left[\mathrm{e}^{r(T-t)}x_I+f_1(t,b)\right]}.
$$

满足边界条件$f_1\left(T,b\right)=0$且$V_1\left(t,x_I,1\right)$的各阶偏导数$V_{1t},V_{1b},V_{1x},V_{1xx},V_{1xb},V_{1bb}$带入(14)对$a_1\left(t\right)$进行求导得：

$$
a_1^*\left(t\right)=\frac{v+b-r-m_1\sigma_1\alpha\rho f_{1b}}{m_1\sigma_1^2}\mathrm{e}^{-r(T-t)}.
\tag{15}
$$

将$a_1^*\left(t\right)$带入上式得：

$$
\begin{aligned}
& -f_{1t}-hbf_{1b}+\frac{1}{2}\alpha^2\left(m_1f_{1b}^2-f_{1bb}\right)-\mathrm{e}^{r(T-t)}\left(\theta_1\left(\lambda+\lambda_1\right)\mu_1+\theta_2\left(\lambda+\lambda_2\right)\mu_2\right) \\
& +L\left(I_1,I_2\right)-\frac{\left(v+b-r-m_1\sigma_1\alpha\rho f_{1b}\right)^2}{2\sigma_1^2m_1}=0,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
L\left(I_1,I_2\right)= {} & m_1\mathrm{e}^{r(T-t)}\left(\lambda+\lambda_1\right)\eta_1\left(t\right)E\Big[\left(Q_i-I_1\left(Q_i,t\right)\right)^2\Big]+m_1\mathrm{e}^{r(T-t)}\left(\lambda+\lambda_2\right)\eta_2\left(t\right)E\Big[\left(M_j-I_2\left(M_j,t\right)\right)^2\Big] \\
& +\frac{1}{2}m_1^2\mathrm{e}^{2r(T-t)}\Big(\left(\lambda+\lambda_1\right)E\left[I_1^2\left(Q_i,t\right)\right]+\left(\lambda+\lambda_2\right)E\left[I_2^2\left(M_j,t\right)\right]+2\lambda E\left[I_1\left(Q_i,t\right)\right]E\left[I_2\left(M_j,t\right)\right]\Big),
\end{aligned}
$$

采用点点优化的方式将公式转化并积分内部进行求导，对$I_1\left(Q_i,t\right)$和$I_2\left(M_j,t\right)$进行求解，计算得到策略：

$$
I_1^*=\frac{-\lambda E\left[I_2\left(M_j,t\right)\right]m_1\mathrm{e}^{r(T-t)}+2\left(\lambda+\lambda_1\right)\eta_1\left(t\right)Q_i}{\left(\lambda+\lambda_1\right)\left(2\eta_1\left(t\right)+m_1\mathrm{e}^{r(T-t)}\right)}\wedge q,
\tag{17}
$$

$$I_2^* = \frac{-\lambda E\left[I_1\left(Q_i,t\right)\right]m_1 e^{r(T-t)} + 2\left(\lambda+\lambda_2\right)\eta_2\left(t\right)M_j}{\left(\lambda+\lambda_2\right)\left(2\eta_2\left(t\right)+m_1 e^{r(T-t)}\right)} \wedge m. \tag{18}$$

$a_1^*(t), I_1^*(t), I_2^*(t)$ 分别带入 HJB 方程中整理后，接下来我们推测 $f_1(t,b)$ 是关于 b 的二次函数，假设其为：

$$f_1(t,b) = -\frac{1}{m_1}\left(N_1(t)b^2 + N_2(t)b + N_3(t)\right).$$

将 $G_1(t) = -m_1 e^{r(T-t)}\left[\left(\theta_1\left(\lambda+\lambda_1\right)\mu_1 + \theta_2\left(\lambda+\lambda_2\right)\mu_2\right] - \frac{(v-r)^2}{2\sigma_1^2} + L\left(I_1^*, I_2^*\right)$ 与相应的偏导数

$f_{1b} = -\frac{2}{m_1}N_1 b - \frac{1}{m_1}N_2$，

$f_{1t} = -\frac{1}{m_1}\left(N_1' b^2 + N_2' b + N_3'\right)$，$f_{1bb} = -\frac{2}{m_1}N_1$。带入 HJB 方程中，并将含有与常数项变量的式子分别分离出来：

$$\begin{aligned}
&N_1' + 2\alpha^2\left(1-\rho^2\right)N_1^2 + 2\left(h - \frac{\alpha\rho}{\sigma_1}\right)N_1 - \frac{1}{2\sigma_1^2} = 0, N_1(T) = 0,\\
&N_2' + \left(h - \frac{\alpha\rho}{\sigma_1} + 2\alpha^2\left(1-\rho^2\right)N_1\right)N_2 - \frac{2(v-r)\alpha\rho}{\sigma_1}N_1 - \frac{v-r}{\sigma_1^2} = 0, N_2(T) = 0,\\
&N_3' + \frac{1}{2}\alpha^2\left(1-\rho^2\right)N_2^2 - \frac{(v-r)\alpha\rho}{\sigma_1}N_2 + \alpha^2 N_1 + G_1(t) = 0, N_3(T) = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

令 $A = 2\alpha^2\left(1-\rho^2\right), B = 2\left(h - \frac{\alpha\rho}{\sigma_1}\right), C = -\frac{1}{2\sigma_1^2}, D^2 = B^2 - 4AC$ 。可得

$$N_1(t) = \frac{-B-D}{2A} + \frac{e^{tD}}{\frac{A}{D}\left(e^{tD} - e^{TD}\right) - \frac{2A}{-B-D}e^{TD}}. \tag{20}$$

$$N_2(t) = e^{\int_t^T\left(h - \frac{\alpha\rho}{\sigma_1} + 2\alpha^2\left(1-\rho^2\right)N_1(s)\right)ds}\left(-\int_t^T\left(\frac{2(v-r)\alpha\rho}{\sigma_1}N_1(s) - \frac{v-r}{\sigma_1^2}\right)e^{-\int_s^T\left(h - \frac{\alpha\rho}{\sigma_1} + 2\alpha^2\left(1-\rho^2\right)N_1(u)\right)\int du}ds\right). \tag{21}$$

$$N_3(t) = \int_t^T\left[\frac{1}{2}\alpha^2\left(1-\rho^2\right)N_2^2(s) - \frac{(v-r)\alpha\rho}{\sigma_1}N_2(s) + \alpha^2 N_1(s) + G_1(s)\right]ds. \tag{22}$$

通过求解保险公司的 HJB 方程，我们将结果总结为如下定理。

定理 3.1.1 保险公司的再保险合同和投资策略为：

$$\begin{cases}
a_1^*(t) = \dfrac{v + b - r - m_1\sigma_1\alpha\rho\left(-\frac{2}{m_1}N_1 b - \frac{1}{m_1}N_2\right)}{m_1\sigma_1^2}e^{-r(T-t)},\\
I_1^* = \dfrac{2\left(\lambda+\lambda_1\right)\eta_1(t)Q_i - \lambda E\left[I_2\left(M_j,t\right)\right]m_1 e^{r(T-t)}}{\left(\lambda+\lambda_1\right)\left(2\eta_1(t) + m_1 e^{r(T-t)}\right)} \wedge q,\\
I_2^* = \dfrac{2\left(\lambda+\lambda_2\right)\eta_2(t)M_j - \lambda E\left[I_1\left(Q_i,t\right)\right]m_1 e^{r(T-t)}}{\left(\lambda+\lambda_2\right)\left(2\eta_2(t) + m_1 e^{r(T-t)}\right)} \wedge m.
\end{cases} \tag{23}$$

保险公司的价值函数为：

$$V_1(t,x_I)=-\frac{1}{m_1}\mathrm{e}^{-m_1\left[\mathrm{e}^{r(T-t)}x_I-\frac{1}{m_1}\left(N_1(t)b^2+N_2(t)b+N_3(t)\right)\right]}.$$

其中 $N_1(t),N_2(t),N_3(t)$ 分别由(20) (21) (22)式给出。

3.2. 再保险公司最优再保费投资策略

接下来，再保险公司的 HJB 方程由(12)变为：

$$\begin{cases}0=\sup\limits_{\mu_2\in U_2}\inf\limits_{\Phi}\Big\{V_{2t}+(hb+\alpha\phi_2)V_{2b}+\frac{1}{2}\alpha^2V_{2bb}+V_{2x_r}\Big(a_2(v+b-r)+rx_r+a_2\sigma_1\phi_1\\ \quad+(\lambda+\lambda_1)\eta_1(t)E\Big[\big(Q_i-I_1^*(Q_i,t)\big)^2\Big]+(\lambda+\lambda_2)\eta_2(t)E\Big[\big(M_j-I_2^*(M_j,t)\big)^2\Big]\\ \quad+\sqrt{(\lambda+\lambda_1)E\Big[\big(Q_i-I_1^*(Q_i,t)\big)^2\Big]}\phi_3+\sqrt{(\lambda+\lambda_2)E\Big[\big(M_j-I_2^*(M_j,t)\big)^2\Big]}\phi_4\Big)+a_2\sigma_1\alpha\rho V_{2x_rb}\\ \quad+\frac{1}{2}V_{2x_rx_r}\Big(a_2^2\sigma_1^2+(\lambda+\lambda_1)E\Big[\big(Q_i-I_1^*(Q_i,t)\big)^2\Big]+(\lambda+\lambda_2)E\Big[\big(M_j-I_2^*(M_j,t)\big)^2\Big]\\ \quad+2\lambda E\big[Q_i-I_1^*(Q_i,t)\big]E\big[M_j-I_2^*(M_j,t)\big]\Big)-\frac{\phi_1^2}{2\varphi_1}m_2V_2-\frac{\phi_2^2}{2\varphi_2}m_2V_2-\frac{\phi_3^2}{2\varphi_3}m_2V_2-\frac{\phi_4^2}{2\varphi_4}m_2V_2\Big\},\\ V_2(T,x_r,1)=-\frac{1}{m_2}\mathrm{e}^{-m_2x_r}.\end{cases}\tag{24}$$

求解再保险公司的 HJB 方程，我们假设再保险公司的值函数是：

$$V_2(t,x_r)=-\frac{1}{m_2}\mathrm{e}^{-m_2\left[\mathrm{e}^{r(T-t)}x_r+f_2(t,b)\right]}.$$

其中 $f_2(t,b)$ 是有关 b 的二次函数且满足 $f_2(T,b)=0$，$V_2(t,x_r,1)$ 的偏导数 $V_{2t},V_{2b},V_{2x},V_{2xx},V_{2xb},V_{2bb}$ 带入 HJB 方程中并化简整理得：

$$\begin{aligned}&-f_{2t}-(hb+\alpha\phi_2)f_{2b}+\frac{1}{2}\alpha^2\big(m_2f_{2b}^2-f_{2bb}\big)-\mathrm{e}^{r(T-t)}\Big(a_2(v+b-r)+a_2\sigma_1\phi_1\\ &+(\lambda+\lambda_1)\eta_1(t)E\Big[\big(Q_i-I_1^*(Q_i,t)\big)^2\Big]+(\lambda+\lambda_2)\eta_2(t)E\Big[\big(M_j-I_2^*(M_j,t)\big)^2\Big]\\ &+\sqrt{(\lambda+\lambda_1)\eta_1(t)E\Big[\big(Q_i-I_1^*(Q_i,t)\big)^2\Big]}\phi_3+\sqrt{(\lambda+\lambda_2)\eta_2(t)E\Big[\big(M_j-I_2^*(M_j,t)\big)^2\Big]}\phi_4\Big)\\ &+a_2\sigma_1\alpha\rho m_2\mathrm{e}^{r(T-t)}f_{2b}+\frac{1}{2}m_2\mathrm{e}^{2r(T-t)}\Big(a_2^2\sigma_1^2+(\lambda+\lambda_1)E\Big[\big(Q_i-I_1^*(Q_i,t)\big)^2\Big]\\ &+(\lambda+\lambda_2)E\Big[\big(M_j-I_2^*(M_j,t)\big)^2\Big]+2\lambda E\big[Q_i-I_1^*(Q_i,t)\big]E\big[M_j-I_2^*(M_j,t)\big]\Big)\\ &-\frac{\phi_1^2}{2\varphi_1}-\frac{\phi_2^2}{2\varphi_2}-\frac{\phi_3^2}{2\varphi_3}-\frac{\phi_4^2}{2\varphi_4}=0,\end{aligned}\tag{25}$$

对其求偏导后得最优解 $\phi_1^*,\phi_2^*,\phi_3^*,\phi_4^*$。

$$\begin{aligned}&\phi_1^*=-a_2\sigma_1\varphi_1\mathrm{e}^{r(T-t)},\quad \phi_2^*=-\varphi_2\alpha f_{2b},\\ &\phi_3^*=-\mathrm{e}^{r(T-t)}\sqrt{(\lambda+\lambda_1)E\Big[\big(Q_i-I_1^*(Q_i,t)\big)^2\Big]}\varphi_3,\\ &\phi_4^*=-\mathrm{e}^{r(T-t)}\sqrt{(\lambda+\lambda_2)E\Big[\big(M_j-I_2^*(M_j,t)\big)^2\Big]}\varphi_4.\end{aligned}$$

将得到的最优解带入 HJB 方程中，并整理得到：

$$-f_{2t}-hbf_{2b}+\frac{1}{2}\alpha^2 f_{2b}^2\left(m_2+\varphi_2\right)-\frac{1}{2}\alpha^2 f_{2bb}-\mathrm{e}^{r(T-t)}a_2\left(v+b-r-\sigma_1\alpha\rho m_2 f_{2b}\right)+R\left(\eta_1,\eta_2\right)=0, \tag{26}$$

其中：

$$\begin{aligned}R\left(\eta_1,\eta_2\right)=&-m_2\mathrm{e}^{r(T-t)}\left(\lambda+\lambda_1\right)\eta_1(t)E\left[\left(Q_i-I_1^*\left(Q_i,t\right)\right)^2\right]\\&-m_2\mathrm{e}^{r(T-t)}\left(\lambda+\lambda_2\right)\eta_2(t)E\left[\left(M_j-I_2^*\left(M_j,t\right)\right)^2\right]\\&+\frac{1}{2}m_2\mathrm{e}^{2r(T-t)}\left(\lambda+\lambda_1\right)E\left[\left(Q_i-I_1^*\left(Q_i,t\right)\right)^2\right]\left(m_2+\varphi_3\right)\\&+\frac{1}{2}m_2\mathrm{e}^{2r(T-t)}\left(\lambda+\lambda_2\right)E\left[\left(M_j-I_2^*\left(M_j,t\right)\right)^2\right]\left(m_2+\varphi_4\right)\\&+m_2^2\mathrm{e}^{2r(T-t)}\lambda E\left[Q_i-I_1^*\left(Q_i,t\right)\right]E\left[M_j-I_2^*\left(M_j,t\right)\right],\end{aligned}$$

对 $a_2(t)$ 进行求导，$\eta_1(t),\eta_2(t)$ 取最大值得：

$$a_2^*(t)=\frac{v+b-r-m_2\sigma_1\alpha\rho f_{2b}}{\left(m_2+\varphi_1\right)\sigma_1^2}\mathrm{e}^{-r(T-t)}. \tag{27}$$

$$\left(\eta_1^*(t),\eta_2^*(t)\right)=\max_{(\eta_1,\eta_2)}R\left(\eta_1,\eta_2\right). \tag{28}$$

将 $a_2^*(t),\eta_1^*(t),\eta_2^*(t)$ 分别带入 HJB 方程中整理后，我们推测 $f_2(t,b)$ 是关于 b 的二次函数，假设其为：

$$f_2(t,b)=-\frac{1}{m_2}\left(\bar{N}_1(t)b^2+\bar{N}_2(t)b+\bar{N}_3(t)\right).$$

相应的偏导数为：$f_{2t}=-\frac{1}{m_2}\left(\bar{N}_1'b^2+\bar{N}_2'b+\bar{N}_3'\right)$，$f_{2b}=-\frac{2}{m_2}\bar{N}_1 b-\frac{1}{m_2}\bar{N}_2$，$f_{2bb}=-\frac{2}{m_2}\bar{N}_1$。将其带入 HJB 方程中，并将含有 b^2,b 与常数项变量的式子分别分离出来，令 $G_2(t)=-\frac{m_2}{2\sigma_1^2\left(m_2+\varphi_1\right)}+R\left(\eta_1^*,\eta_2^*\right)$。因此有：

$$\begin{aligned}&\bar{N}_1'+\frac{2\alpha^2}{m_2}\left(\left(m_2+\varphi_2\right)-\frac{\rho^2 m_2^2}{m_2+\varphi_1}\right)\bar{N}_1^2+2\left(h-\frac{\alpha\rho m_2}{\sigma_1\left(m_2+\varphi_1\right)}\right)\bar{N}_1-\frac{m_2}{2\left(m_2+\varphi_1\right)\sigma_1^2}=0,\bar{N}_1(T)=0,\\&\bar{N}_2'+\left(h-\frac{\alpha\rho m_2}{\sigma_1\left(m_2+\varphi_1\right)}+\frac{2\alpha^2}{m_2}\left(\left(m_2+\varphi_2\right)-\frac{\rho^2 m_2^2}{m_2+\varphi_1}\right)\bar{N}_1\right)\bar{N}_2-\frac{2\alpha\rho m_2(v-r)}{\sigma_1\left(m_2+\varphi_1\right)}\bar{N}_1-\frac{(v-r)m_2}{\sigma_1^2\left(m_2+\varphi_1\right)}=0,\bar{N}_2(T)=0,\\&\bar{N}_3'+\frac{2\alpha^2}{m_2}\left(\left(m_2+\varphi_1\right)-\frac{\rho^2 m_2^2}{m_2+\varphi_1}\right)\bar{N}_2^2-\frac{\alpha\rho m_2(v-r)}{\sigma_1\left(m_2+\varphi_1\right)}\bar{N}_2+\alpha^2\bar{N}_1+G_2(t)=0,\bar{N}_3(T)=0.\end{aligned} \tag{29}$$

类似 3.1.节相同的方法。令 $\bar{A}=\frac{2\alpha^2}{m_2}\left(\left(m_2+\varphi_2\right)-\frac{\rho^2 m_2^2}{m_2+\varphi_1}\right)$，$\bar{B}=2\left(h-\frac{\alpha\rho m_2}{\sigma_1\left(m_2+\varphi_1\right)}\right)$，$\bar{C}=-\frac{m_2}{2\left(m_2+\varphi_1\right)\sigma_1^2}$。

$\bar{D}^2=\bar{B}^2-4\bar{A}\bar{C}$。$\bar{P}_1(t)=h-\frac{\alpha\rho m_2}{\sigma_1\left(m_2+\varphi_1\right)}+\frac{2\alpha^2}{m_2}\left(\left(m_2+\varphi_2\right)-\frac{\rho^2 m_2^2}{m_2+\varphi_1}\right)\bar{N}_1(t)$，

$\bar{W}_1(t)=-\frac{2\alpha\rho m_2(v-r)}{\sigma_1\left(m_2+\varphi_1\right)}\bar{N}_1(t)-\frac{(v-r)m_2}{\sigma_1^2\left(m_2+\varphi_1\right)}$。可直接推导出解为：

$$\bar{N}_1(t)=\frac{-\bar{B}-\bar{D}}{2\bar{A}}+\frac{\mathrm{e}^{t\bar{D}}}{\frac{\bar{A}}{\bar{D}}\left(\mathrm{e}^{t\bar{D}}-\mathrm{e}^{T\bar{D}}\right)-\frac{2\bar{A}}{-\bar{B}-\bar{D}}\mathrm{e}^{T\bar{D}}}. \tag{30}$$

$$\bar{N}_2(t)=\mathrm{e}^{\int_t^T \bar{P}_1(s)\mathrm{d}s}\left(-\int_t^T \bar{W}_1(s)\mathrm{e}^{-\int_s^T \bar{P}_1(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s\right). \tag{31}$$

$$\bar{N}_3(t)=\int_t^T\left[\frac{\alpha^2}{2m_2}\left((m_2+\varphi_2)-\frac{\rho^2 m_2^2}{(m_2+\varphi_1)}\right)\bar{N}_2^2(s)-\frac{\alpha\rho m_2(v-r)}{\sigma_1(m_2+\varphi_1)}\bar{N}_2+\alpha^2\bar{N}_1+G_2(s)\right]\mathrm{d}s. \tag{32}$$

通过求解保险公司的 HJB 方程，我们将结果总结为如下定理。

定理 3.2.2 再保险公司的再保费和投资策略为：

$$\begin{cases} a_2^*(t)=\dfrac{v+b-r-m_2\sigma_1\alpha\rho\left(-\dfrac{2}{m_2}\bar{N}_1 b-\dfrac{1}{m_2}\bar{N}_2\right)}{(m_2+\varphi_1)\sigma_1^2}\mathrm{e}^{-r(T-t)}, \\ \left(\eta_1^*(t),\eta_2^*(t)\right)=\max\limits_{(\eta_1,\eta_2)} R(\eta_1,\eta_2). \end{cases} \tag{33}$$

再保险公司的价值函数为：

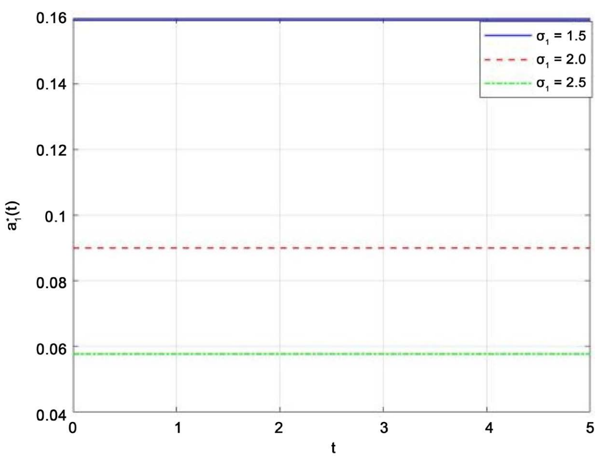
$$V_2(t,x_r)=-\frac{1}{m_2}\mathrm{e}^{-m_2\left[\mathrm{e}^{r(T-t)}x_r-\frac{1}{m_2}\left(\bar{N}_1(t)b^2+\bar{N}_2(t)b+\bar{N}_3(t)\right)\right]}.$$

其中 $\bar{N}_1(t),\bar{N}_2(t),\bar{N}_3(t)$ 分别由(30) (31) (32)式给出。

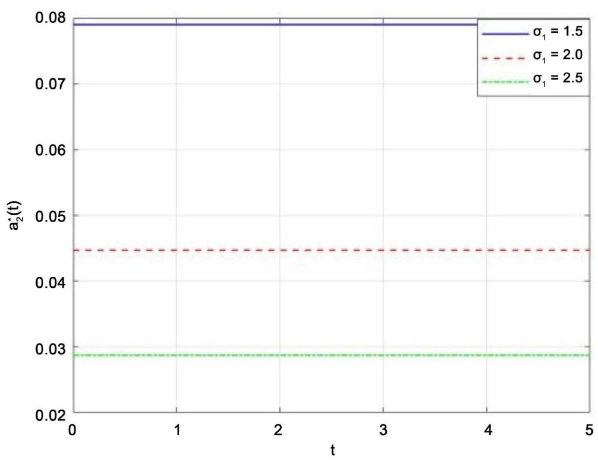
4. 数值分析

为验证前文推导的带 Ornstein-Uhlenbeck 过程股票及可违约证券的最优再保险–投资策略的合理性，本节开展数值实验分析。我们分别对的参数取值：$\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=\varphi_4=\varphi_5=0.5$，$r=0.03$，$m_1=m_2=0.5$，$v=0.1$，$\lambda=1$，$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$b=0.2$，$\sigma_1=0.5$，$h=0.1$，$\alpha=0.2$，$T=10$，$\rho=0.3$，MATLAB 作图得到以下结论：

如图 1 表示不同风险资产波动率对最优投资策略的影。风险资产的波动越大，市场不确定性与潜在风险越大，保险公司和再保险公司为了减少投资的风险，均会降低对风险资产的投资。



(a)



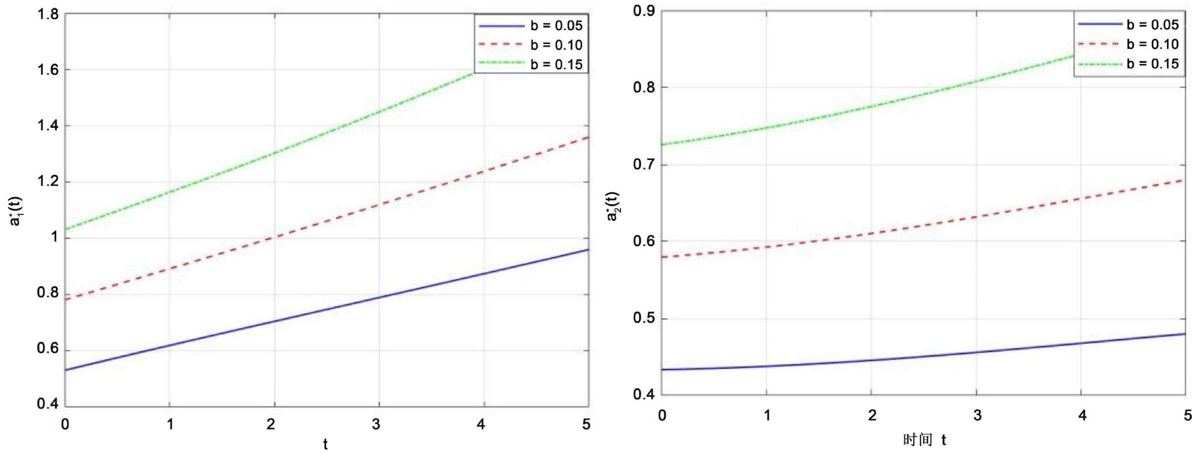
(b)

Figure 1. The impact of σ_1 on $a_1^*(t)$ and $a_2^*(t)$

图 1. σ_1 对 $a_1^*(t),a_2^*(t)$ 的影响

如图 2 表示不同的市场状态对最优投资策略的影响。市场状态越好，越容易获得风险资产与无风险

资产的超额收益，使得保险公司与再保险公司会更积极地增加股票的投资，让最优策略随时间的趋势上升更明显。

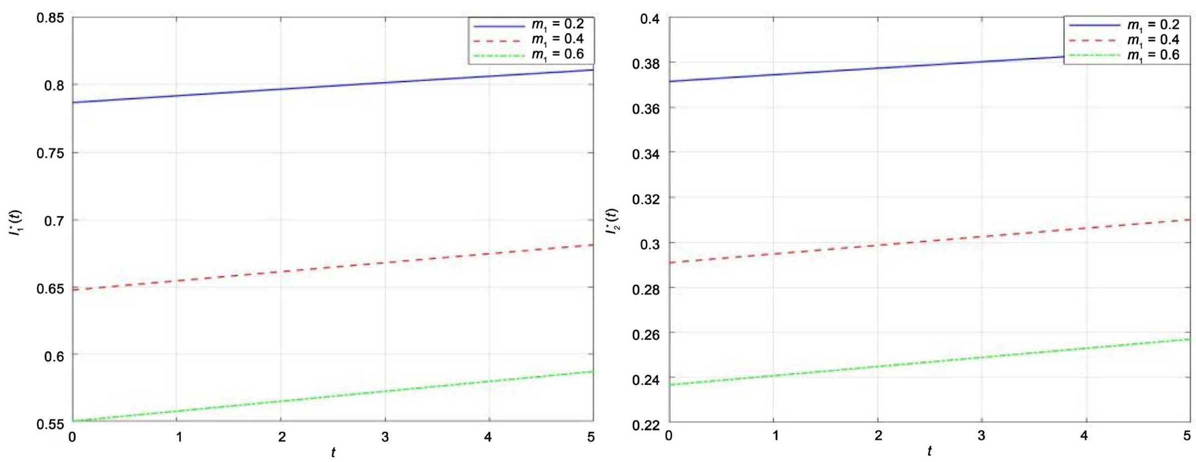


(a) (b)

Figure 2. The impact of b on $a_1^*(t)$ and $a_2^*(t)$

图 2. b 对 $a_1^*(t), a_2^*(t)$ 的影响

如图 3 中可以看出，m_1 越大，$I_1^*(t)$，$I_2^*(t)$ 越低。说明保险公司越厌恶风险，它们就更倾向于通过再保险等分保方式转移风险，因此自留的意愿更低。这与“风险厌恶越高，越倾向于分散风险”市场规律符合。



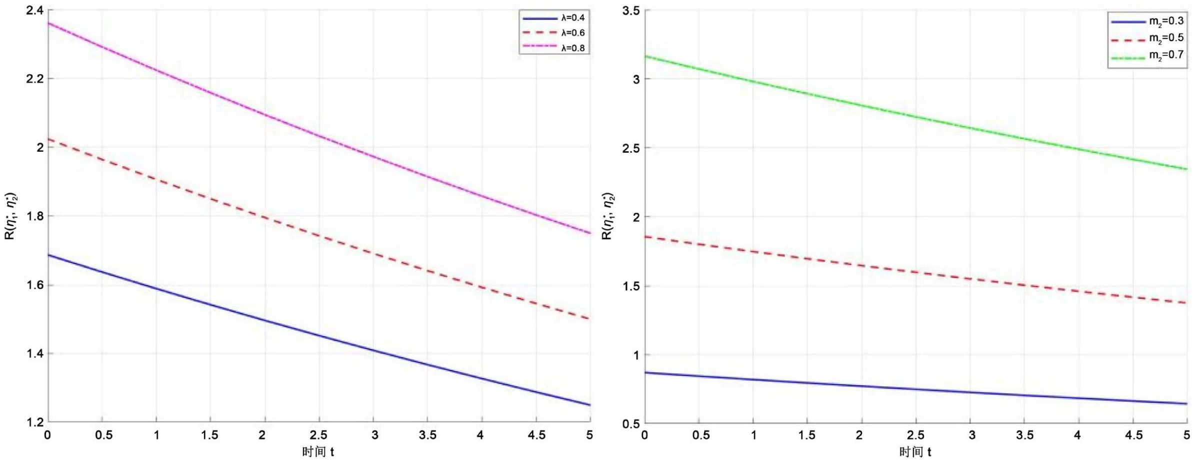
(a) (b)

Figure 3. The impact of m_1 on $I_1^*(t)$ and $I_2^*(t)$

图 3. m_1 对 $I_1^*(t), I_2^*(t)$ 的影响

如图 4 从整体来看，在再保险双方的风险厌恶系数不变的情况下，再保险定价策略 $R(\eta_1^*, \eta_2^*)$ 随时间逐步降低。同时当 $m_2 = 0.5$ 时，不同 λ 对保险公司与再保险公司的再保险定价策略的影响。两类业务的共同相依性越强，再保费定价就越高。说明两类保险业务之间的相依性越大，再保险承担的风险越高，因

此再保费定价越高；当 $\lambda = 0.5$ 时，不同 m_2 对保险公司与再保险公司的再保险定价策略的影响是，当再保险公司的风险厌恶系数越大时，再保险公司要求要有更高的风险溢价，保险公司愿意支付更高的价格，这也符合金融市场规律。



(a) (b)

Figure 4. The impact of λ and m_2 on $R\left(\eta_1^*, \eta_2^*\right)$

图 4. λ 和 m_2 对 $R\left(\eta_1^*, \eta_2^*\right)$ 的影响

5. 总结

本文用随机控制理论和博弈论的方法建立主从博弈模型，优化投资与再保险策略。其中保险公司为跟随者，再保险公司为领导者，通过利用动态规划原理获取并求解最优再保险比例与投资组合策略。最后对关键参数的选取，分析其对最优策略的影响，并得到相应的结论：风险厌恶程度，风险利率以及资产波动率的提升，均会会使得保险公司与再保险公司降低风险资产的投资；市场状态越好，再保险双方对风险资产投资会增加；当风险厌恶程度越高，再保费定价策略也会越高。

参考文献

[1] 谷爱玲，李仲飞，申曙光. 保险公司在风险相依模型中均值-方差准则下的最优投资策略[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2013, 52(5): 57-63+67.

[2] 刘胜旺，李冰. 基于相依风险模型框架均值方差准则下的最优时间一致的投资再保险策略问题(英文) [J]. 数学杂志, 2018, 38(6): 962-974.

[3] Meng, H. and Zhang, X. (2010) Optimal Risk Control for the Excess of Loss Reinsurance Policies. *ASTIN Bulletin*, **40**, 179-197. https://doi.org/10.2143/ast.40.1.2049224

[4] 张燕，王正艳. O-U 模型下基于 HARA 效用的最优投资-再保险策略问题[J]. 工程数学学报, 2024, 41(5): 915-930.

[5] 杨志伟，张强. VaR 约束下最优比例再保险和投资策略问题[J]. 数学的实践与认识, 2024, 54(1): 56-70.

[6] Chang, H. and Chen, Z. (2025) Robust Time-Consistent Reinsurance-Investment Strategy with Model Uncertainty under 4/2 Stochastic Volatility Model. *Scandinavian Actuarial Journal*, **2025**, 574-597. https://doi.org/10.1080/03461238.2024.2443849

[7] 王雨薇，荣喜民，赵慧. 基于模型不确定性的保险人最优投资再保险问题研究[J]. 工程数学学报, 2022, 39(1): 1-19.

[8] 张雨浓，马丽君，马世霞，等. 模糊环境下具有索赔相依的最优再保险与投资策略[J]. 南开大学学报(自然科学版), 2024, 57(6): 59-69.

[9] Han, X., Li, D. and Yuan, Y. (2024) Robust Reinsurance Contract and Investment with Delay under Mean-Variance

Framework. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **53**, 8614-8658. https://doi.org/10.1080/03610926.2023.2282380

[10] Chen, L. and Shen, Y. (2018) On a New Paradigm of Optimal Reinsurance: A Stochastic Stackelberg Differential Game Between an Insurer and a Reinsurer. *ASTIN Bulletin*, **48**, 905-960. https://doi.org/10.1017/asb.2018.3

[11] Yuan, Y., Liang, Z. and Han, X. (2022) Robust Reinsurance Contract with Asymmetric Information in a Stochastic Stackelberg Differential Game. *Scandinavian Actuarial Journal*, **2022**, 328-355. https://doi.org/10.1080/03461238.2021.1971756

[12] 杨鹏, 张晓燕. 基于 Stackelberg 博弈的最优再保险合同设计[J]. 山东大学学报(理学版), 2023, 58(11): 1-14+26.

[13] Chen, Z. and Yang, P. (2020) Robust Optimal Reinsurance-Investment Strategy with Price Jumps and Correlated Claims. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **92**, 27-46. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2020.03.001