

一种求解Benjamin-Bona-Mahony-Burgers方程的改进三角样条方法

张 晴, 姜珊珊*

北京化工大学数理学院, 北京

收稿日期: 2026年6月28日; 录用日期: 2026年7月22日; 发布日期: 2026年7月28日

摘 要

针对Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation的高精度数值求解问题, 本文构造了一种融合Hermite插值与紧致差分思想的三次三角样条配置方法。时间离散采用Crank-Nicolson格式以保证二阶时间精度; 空间离散方面, 通过在三次三角样条基函数中引入Hermite插值修正二阶导数, 并结合一阶导数的四阶紧致差分格式, 实现空间四阶高精度逼近。在理论分析方面, 基于傅里叶方法证明了所构造格式的无条件稳定性, 并通过数值收敛实验验证了该方法在时间方向具有二阶收敛精度、在空间方向具有四阶收敛精度。数值实验结果表明, 该方法在保持稳定性的同时, 相较已有方法在空间精度与整体误差控制方面具有更优表现, 尤其在细网格条件下展现出良好的收敛性与稳定性。

关键词

BBMB方程, Hermite插值, C-N格式, 稳定性分析

An Improved Trigonometric Spline Method for Solving the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers Equation

Qing Zhang, Shanshan Jiang*

School of Mathematics and Physics, Beijing University of Chemical Technology, Beijing

Received: June 28, 2026; accepted: July 22, 2026; published: July 28, 2026

Abstract

For the high-accuracy numerical solution of the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation, a

*通讯作者。

文章引用: 张晴, 姜珊珊. 一种求解 Benjamin-Bona-Mahony-Burgers 方程的改进三角样条方法[J]. 应用数学进展, 2026, 15(7): 304-317. DOI: 10.12677/aam.2026.157324

cubic trigonometric spline collocation method incorporating Hermite interpolation and compact finite difference techniques is proposed. In the temporal direction, the Crank-Nicolson scheme is employed to achieve second-order accuracy. In the spatial discretization, Hermite interpolation is introduced into the cubic trigonometric spline basis to improve the approximation of the second derivative, while a fourth-order compact finite difference scheme is applied to the first derivative, resulting in an overall fourth-order spatial accuracy. From a theoretical perspective, the unconditional stability of the proposed scheme is established via Fourier analysis, and numerical convergence tests verify that the method achieves second-order convergence in time and fourth-order convergence in space. Numerical experiments confirm that the proposed method not only maintains stability but also outperforms existing methods in terms of spatial accuracy and overall error control. In particular, it exhibits excellent convergence behavior and stability under fine mesh conditions.

Keywords

BBMB Equation, Hermite Interpolation, Crank-Nicolson Scheme, Stability Analysis

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

为了描述单向平面波建模中, 小振幅长波在非线性色散介质中的传播, 产生了 BBMB 方程, 该方程在物理性质上具有耗散性和扩散性, 是描述流体动力学, 非线性光学, 冷等离子体中的水磁波以及谐波晶体中的声波的重要工具, 例如裂隙岩体中的传播问题[1]、土壤中的水分迁移[2]、涌潮现象[3]、谐波晶体中的声波传播[4]。基于此, 本文考虑如下 BBMB 方程。

$$\begin{cases} u_t + \mu u_x + uu_x - \eta u_{xx} - u_{xxt} = 0, \\ \Omega = \Omega_x \times \Omega_t \\ \Omega_x = [a, b], \Omega_t = [0, T] \end{cases} \quad (1.1)$$

其中初值条件为:

$$u(x, 0) = u(x) \quad (1.2)$$

边值条件为:

$$\begin{cases} u(a, t) = g_0(t) \\ u(b, t) = g_1(t) \\ u_x(a, t) = 0, u_x(b, t) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

其中 $\mu \in R$ 和 $\eta \geq 0$ 为任意常数。

目前求解 BBMB 方程的数值方法有很多, Fakhari 等人[5]应用了 Liao 的同伦分析方法。Omrani 和 Ayad [6]采用 Crank-Nicolson 方法得到了数值解。Kadri 等人[7]使用半离散 Galerkin 格式求解该方程。Ganji 等人[8]提出了一种指数函数方法, Alquran 和 Al-Khaled [9]则采用了 tanh 方法和 sinc-Galerkin 方法; Gozukizil 和 Akcagil [10]利用 tanh 方法求解了非线性伪抛物型 BBMB 方程。Fardi 等人[11]采用了同伦分析方法, Kumar 等人[12]通过 Painlevé 分析研究了该方程的可积性并进行了 Lie 对称性分析。Arora

等人[13]则采用四次 B 样条配点方法计算了该方程的数值解。本文采用三次三角样条方法进行空间离散, 该方法能够有效刻画解函数的变化特性; 在此基础上, 引入 Hermite 插值紧致格式对二阶导数进行修正, 并结合一阶导数的四阶 Padé 紧致差分格式, 从而实现空间方向的四阶高精度逼近。

本文结构安排如下: 第 1 节为引言; 第 2 节介绍基于 Hermite 插值的三次三角样条方法, 三次三角样条基函数以及一阶和二阶导数的四阶紧致离散; 第 3 节构造数值格式, 分别给出时间方向离散、空间方向高阶紧致离散及边界节点处理; 第 4 节采用 Fourier 方法对所构造格式进行稳定性分析; 第 5 节通过数值算例验证该方法的有效性、精度与稳定性。

2. 基于 Hermite 插值的三次三角样条

2.1. 空间时间划分

$\{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = \text{考虑空间域 } b\}$ 的一个均匀划分, 其中节点 $x_j = a + jh$, $j = 0, 1, 2, \dots, N$, 其中 h 为空间步长。同时将时间域 $\{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{M-1} < t_M = T\}$ 作均匀划分, 其中, $t_m = m\tau$, $m = 0, 1, \dots, M$, 其中 τ 为时间步长。

2.2. 三次三角样条

设 $Q_j(x)$ 表示第 j 个三次三角样条基函数, 则具体的表达式可以表示为

$$Q_j(x) = \frac{1}{w} \begin{cases} p^3(x_i), & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ p(x_i)p(x_i)q(x_{i+2}) + q(x_{i+3})p(x_{i+1}) + q(x_{i+4})p^2(x_{i+1}), & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ q(x_{i+4})p(x_{i+1})q(x_{i+3}) + q(x_{i+4})p(x_{i+2}) + p(x_i)q^2(x_{i+3}), & x \in [x_{i+2}, x_{i+3}] \\ q^3(x_{i+4}), & x \in [x_{i+3}, x_{i+4}] \end{cases} \quad (2.1)$$

其中

$$p(x) = \sin\left(\frac{x - x_i}{2}\right), q(x) = \sin\left(\frac{x_i - x}{2}\right)$$

并且

$$w = \sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin(h)\sin\left(\frac{3h}{2}\right)$$

利用三次三角样条基函数, 将未知函数 $u(x, t)$ 表示为基函数的线性组合。在节点 (x_j, t_k) 处, 函数的近似解可写为

$$u(x_j, t_k) = u_j^k = \sum_{j=i-1}^{i+1} \delta_j^k(t) Q_j(x) \quad (2.2)$$

其中 $\delta_t^k(t)$ 为时间层 t_k 上待求的样条系数, 这些系数通过初始条件、边界条件以及配置条件确定。

由于三次三角样条函数具有局部支撑性质, 在区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 上仅有三个基函数 $Q_{j-1}(x)$ 、 $Q_j(x)$ 和 $Q_{j+1}(x)$ 为非零函数。因此, 在节点 x_j 处函数值及其导数可以表示为相邻系数的线性组合, 即

$$\begin{cases} u_j^m = a_1 \delta_{j-1}^m + a_2 \delta_j^m + a_1 \delta_{j+1}^m \\ (u_x)_j^m = -a_3 \delta_{j-1}^m + a_3 \delta_{j+1}^m \\ (u_{xx})_j^m = a_4 \delta_{j-1}^m + a_5 \delta_j^m + a_4 \delta_{j+1}^m \end{cases} \quad (2.3)$$

其中

$$a_1 = \csc(h) \csc\left(\frac{3h}{2}\right) \sin^2\left(\frac{h}{2}\right),$$

$$a_2 = \frac{2}{1+2\cos(h)}, a_3 = \frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right),$$

$$a_4 = \frac{3+9\cos(h)}{4\cos\left(\frac{h}{2}\right)-4\cos\left(\frac{5h}{2}\right)}, a_5 = -\frac{3\cot^2\left(\frac{h}{2}\right)}{2+4\cos(h)}.$$

上述关系式主要是建立节点函数值、节点导数值与三次三角样条系数之间的代数关系, 若直接采用三次三角样条本身表达式作为空间导数离散格式, 导数的逼近精度可能受到限制, 尤其是二阶导数容易成为影响整体空间精度的主要误差来源。因此, 为了进一步提高数值格式在空间方向上的整体精度, 在三次三角样条配置方法的基础上, 引入 Hermite 型四阶紧致格式修正二阶导数, 并引入 Padé 型四阶紧致格式逼近一阶导数。具体而言, 三次三角样条用于构造数值解的局部表示, Hermite 紧致格式和 Padé 紧致格式分别用于提供高阶精度的二阶导数和一阶导数近似。最后, 再利用式(2.3)将节点处的函数值及导数统一表示为样条系数, 从而得到关于未知样条系数的代数方程组。

2.3. 一阶与二阶导数的四阶紧致离散

为了进一步提高数值格式在空间方向上的整体精度, 本文分别对一阶导数和二阶导数采用四阶紧致离散格式。

对于节点 x_j 处的二阶导数, 通过在相邻节点处同时利用函数值和二阶导数, 构造如下 Hermite 四阶紧致差分格式:

$$(u_{xx})_{j-1}^m + 10(u_{xx})_j^m + (u_{xx})_{j+1}^m - \frac{12}{h^2}(u_{j-1}^m - 2u_j^m + u_{j+1}^m) = O(h^4) \quad (2.4)$$

等价地, 可以写为

$$\frac{1}{10}(u_{xx})_{j-1}^m + (u_{xx})_j^m + \frac{1}{10}(u_{xx})_{j+1}^m = \frac{6}{5h^2}(u_{j-1}^m - 2u_j^m + u_{j+1}^m) + O(h^4)$$

由此可见, Hermite 紧致格式实质上是在相邻三个节点 x_{j-1}, x_j, x_{j+1} 上对二阶导数进行加权组合, 其权重分别为 $\frac{1}{10}, 1, \frac{1}{10}$ 。

对于一阶导数采用四阶 Padé 紧致差分格式:

$$\frac{1}{6}(u_x)_{j-1}^m + \frac{2}{3}(u_x)_j^m + \frac{1}{6}(u_x)_{j+1}^m - \frac{1}{2h}(u_{j+1}^m - u_{j-1}^m) = O(h^4) \quad (2.5)$$

该格式是在相邻三个节点 x_{j-1}, x_j, x_{j+1} 上对一阶导数进行加权组合, 其权重分别为 $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$ 。

通过上述处理, 本文在三次三角样条配置方法的基础上, 进一步引入 Hermite 与 Padé 紧致格式对二阶导数和一阶导数进行高阶修正。这样既保留了三次三角样条对未知函数的良好逼近能力, 又克服了直接使用样条导数可能导致的导数精度不足问题, 从而使整体空间离散格式达到四阶精度。

3. 数值格式

3.1. 时间方向离散

对方程(1.1)在时间方向采用 Crank-Nicolson 格式离散, 可得:

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} + \mu \frac{(u_x)_j^{m+1} + (u_x)_j^m}{2} + \frac{(uu_x)_j^{m+1} + (uu_x)_j^m}{2} - \eta \frac{(u_{xx})_j^{m+1} + (u_{xx})_j^m}{2} - \frac{(u_{xx})_j^{m+1} - (u_{xx})_j^m}{\Delta t} = 0 \quad (3.1)$$

其中 (uu_x) 为非线性项, 对其进行线性化处理, 处理的格式如下:

$$(uu_x)^{m+1} = (uu_x)^m + (u^{m+1} - u^m)u_x^m + (u_x^{m+1} - u_x^m)u^m \quad (3.2)$$

将其代入时间离散格式, 并整理 $m+1$ 与 m 项, 可得:

$$\left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{(u_x)_j^m}{2} \right) u_j^{m+1} + \left(\frac{\mu}{2} + \frac{u_j^m}{2} \right) (u_x)_j^{m+1} - \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{\eta}{2} \right) (u_{xx})_j^{m+1} = \frac{u_j^m}{\Delta t} - \frac{\mu}{2} (u_x)_j^m + \left(\frac{\eta}{2} - \frac{1}{\Delta t} \right) (u_{xx})_j^m \quad (3.3)$$

为简化记号, 定义

$$(\Upsilon_1)_j = \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{(u_x)_j}{2} \right), (\Upsilon_2)_j = \left(\frac{\mu}{2} + \frac{u_j}{2} \right), \Upsilon_3 = -\left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{\eta}{2} \right), p_1 = \frac{1}{\Delta t}, p_2 = -\frac{\mu}{2}, p_3 = \left(\frac{\eta}{2} - \frac{1}{\Delta t} \right)$$

于是上式可以简写为

$$(\Upsilon_1)_j u^{m+1} + (\Upsilon_2)_j u_x^{m+1} + \Upsilon_3 u_{xx}^{m+1} = p_1 u^m + p_2 u_x^m + p_3 u_{xx}^m$$

3.2. 空间方向高阶紧致离散

由二阶导数的 Hermite 四阶紧致格式可得:

$$(u_{xx})_j = \frac{1}{10} \left[\frac{12}{h^2} (u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) - (u_{xx})_{j-1} - (u_{xx})_{j+1} \right] + O(h^4). \quad (3.4)$$

由一阶导数的 Padé 四阶紧致格式可得:

$$(u_x)_j = \frac{3}{2} \left(\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} - \frac{1}{6} (u_x)_{j+1} - \frac{1}{6} (u_x)_{j-1} \right) + O(h^4). \quad (3.5)$$

将上述一阶与二阶导数紧致格式代入离散方程, 并对节点 $j-1, j, j+1$ 处方程作加权组合, 可得:

$$\begin{aligned} & \left[(\Upsilon_1)_j - \frac{12\Gamma_3}{10\Delta x^2} \cdot 2 \right] u_j^{m+1} + \left[\frac{12\Gamma_3}{10\Delta x^2} - \frac{3(\Gamma_2)_j}{4h} \right] u_{j-1}^{m+1} + \left[\frac{12\Gamma_3}{10\Delta x^2} + \frac{3(\Gamma_2)_j}{4h} \right] u_{j+1}^{m+1} \\ & - \frac{(\Gamma_2)_j}{4} (u_x)_{j-1}^{m+1} - \frac{(\Gamma_2)_j}{4} (u_x)_{j+1}^{m+1} - \frac{\Gamma_3}{10} (u_{xx})_{j-1}^{m+1} - \frac{\Gamma_3}{10} (u_{xx})_{j+1}^{m+1} \\ & = \left[p_1 - \frac{12p_3}{10\Delta x^2} \cdot 2 \right] u_j^m + \left[\frac{12p_3}{10\Delta x^2} - \frac{3p_2}{4h} \right] u_{j-1}^m + \left[\frac{12p_3}{10\Delta x^2} + \frac{3p_2}{4h} \right] u_{j+1}^m - \frac{p_2}{4} (u_x)_{j-1}^m \\ & - \frac{p_2}{4} (u_x)_{j+1}^m - \frac{p_3}{10} (u_{xx})_{j-1}^m - \frac{p_3}{10} (u_{xx})_{j+1}^m. \end{aligned} \quad (3.6)$$

令

$$\begin{aligned} A_j &= (\Upsilon_1)_j - \frac{24\Gamma_3}{10\Delta x^2}, B_j = \frac{12\Gamma_3}{10\Delta x^2} - \frac{3(\Gamma_2)_j}{4h}, C_j = \frac{12\Gamma_3}{10\Delta x^2} + \frac{3(\Gamma_2)_j}{4h}, \\ D &= p_1 - \frac{24p_3}{10\Delta x^2}, E = \frac{12p_3}{10\Delta x^2} - \frac{3p_2}{4h}, F = \frac{12p_3}{10\Delta x^2} + \frac{3p_2}{4h}. \end{aligned}$$

则上述节点方程可简写为:

$$\begin{aligned}
& A_j u_j^{m+1} + B_j u_{j-1}^{m+1} + C_j u_{j+1}^{m+1} - \frac{(\Gamma_2)_j}{4} (u_x)_{j-1}^{m+1} - \frac{(\Gamma_2)_j}{4} (u_x)_{j+1}^{m+1} - \frac{\Gamma_3}{10} (u_{xx})_{j-1}^{m+1} - \frac{\Gamma_3}{10} (u_{xx})_{j+1}^{m+1} \\
& = D_j u_j^m + E_j u_{j-1}^m + F_j u_{j+1}^m - \frac{p_2}{4} (u_x)_{j-1}^m - \frac{p_2}{4} (u_x)_{j+1}^m - \frac{p_3}{10} (u_{xx})_{j-1}^m - \frac{p_3}{10} (u_{xx})_{j+1}^m.
\end{aligned} \quad (3.7)$$

该式表明, 中心节点处的导数项已经通过 Hermite 与 Padé 紧致格式被转化为相邻节点函数值和相邻节点导数项的组合。

为了得到最终可求解的代数方程组, 需要进一步利用三次三角样条关系, 将上述节点方程中的函数值和导数项全部表示为样条系数。由三次三角样条关系可知, 节点函数值 u_j^{m+1} 、相邻节点函数值 u_{j-1}^{m+1} 、 u_{j+1}^{m+1} , 以及相邻节点处的一阶导数和二阶导数, 都可以通过相邻样条系数表示。具体而言, 由于三次三角样条基函数具有局部支撑性, 代入后每一个内部节点方程只涉及以下五个未知样条系数: δ_{j-2}^{m+1} , δ_{j-1}^{m+1} , δ_j^{m+1} , δ_{j+1}^{m+1} , δ_{j+2}^{m+1} 。这说明本文最终得到的是关于三次三角样条系数的五对角代数系统。

将样条关系代入节点方程, 可得:

$$l_j \bar{\sigma}_{j-2}^{m+1} + n_j \bar{\sigma}_{j-1}^{m+1} + r_j \bar{\sigma}_j^{m+1} + s_j \bar{\sigma}_{j+1}^{m+1} + e_j \bar{\sigma}_{j+2}^{m+1} = q \bar{\sigma}_{j-2}^m + x \bar{\sigma}_{j-1}^m + y \bar{\sigma}_j^m + b \bar{\sigma}_{j+1}^m + h \bar{\sigma}_{j+2}^m \quad (3.8)$$

其中左端系数为:

$$\begin{aligned}
l_j &= a_1 \left(\frac{12\Gamma_3}{10\Delta x^2} - \frac{3(\Gamma_2)_j}{4h} \right) + \frac{(\Gamma_2)_j}{4} a_3 - \frac{\Gamma_3}{10} a_4, \\
n_j &= a_2 \left(\frac{12\Gamma_3}{10\Delta x^2} - \frac{3(\Gamma_2)_j}{4h} \right) + a_1 \left((\Gamma_1)_j - \frac{24\Gamma_3}{10\Delta x^2} \right) - \frac{\Gamma_3}{10} a_5, \\
r_j &= a_2 \left((\Gamma_1)_j - \frac{24\Gamma_3}{10\Delta x^2} \right) + a_1 \left(\frac{24\Gamma_3}{10\Delta x^2} \right) - \frac{2\Gamma_3}{10} a_4, \\
s_j &= a_1 \left((\Gamma_1)_j - \frac{24\Gamma_3}{10\Delta x^2} \right) + a_2 \left(\frac{12\Gamma_3}{10\Delta x^2} + \frac{3(\Gamma_2)_j}{4h} \right) - \frac{\Gamma_3}{10} a_5, \\
e_j &= a_1 \left(\frac{12\Gamma_3}{10\Delta x^2} + \frac{3(\Gamma_2)_j}{4h} \right) - \frac{(\Gamma_2)_j}{4} a_3 - \frac{\Gamma_3}{10} a_4.
\end{aligned}$$

右端系数为:

$$\begin{aligned}
q &= a_1 \left(\frac{12p_3}{10\Delta x^2} - \frac{3p_2}{4h} \right) + \frac{p_2}{4} a_3 - \frac{p_3}{10} a_4, \\
x &= a_2 \left(\frac{12p_3}{10\Delta x^2} - \frac{3p_2}{4h} \right) + a_1 \left(p_1 - \frac{24p_3}{10\Delta x^2} \right) - \frac{p_3}{10} a_5, \\
y &= a_2 \left(p_1 - \frac{24p_3}{10\Delta x^2} \right) + a_1 \left(\frac{24p_3}{10\Delta x^2} \right) - \frac{2p_3}{10} a_4, \\
b &= a_1 \left(p_1 - \frac{24p_3}{10\Delta x^2} \right) + a_2 \left(\frac{12p_3}{10\Delta x^2} + \frac{3p_2}{4h} \right) - \frac{p_3}{10} a_5, \\
h &= a_1 \left(\frac{12p_3}{10\Delta x^2} + \frac{3p_2}{4h} \right) - \frac{p_2}{4} a_3 - \frac{p_3}{10} a_4.
\end{aligned}$$

由上述推导可知, 本文的最终离散系统是通过以下步骤得到的: 首先采用 Crank-Nicolson 格式对时间方向进行离散; 其次利用 Hermite 与 Padé 四阶紧致格式分别对二阶导数和一阶导数进行高阶逼近; 最后利用三次三角样条关系将节点函数值和导数值统一表示为样条系数。通过这三部分的结合, 最终得到关于

样条系数的五对角代数系统。

3.3. 边界节点处理

在边界节点, 需要结合边界条件对样条系数进行处理。对于边界节点, 直接将三次三角样条关系代入节点方程, 可得:

$$l_j \delta_{j-1}^{m+1} + n_j \delta_j^{m+1} + r_j \delta_{j+1}^{m+1} = q \delta_{j-1}^m + x \delta_j^m + y \delta_{j+1}^m \quad (3.9)$$

其中系数分别为:

$$\begin{aligned} l_j &= a_1 (\Gamma_1)_j - a_3 (\Gamma_2)_j + a_4 \Gamma_3, n_j = a_2 (\Gamma_1)_j + a_5 \Gamma_3, \\ r_j &= a_1 (\Gamma_1)_j + a_3 (\Gamma_2)_j + a_4 \Gamma_3, q = a_1 p_1 - a_3 p_2 + a_4 p_3, \\ x &= a_2 p_1 + a_5 p_3, y = a_1 p_1 + a_3 p_2 + a_4 p_3. \end{aligned}$$

4. 稳定性分析

定理: 该格式构造的离散格式在 von-Neuman 意义下是稳定的。

证明:

将时间离散后的方程非线性项 uu_x 进行线性化处理, 令 $u = d$, d 为常数, 所以方程转化为:

$$\frac{u^{m+1} - u^m}{\Delta t} - \frac{u_{xx}^{m+1} - u_{xx}^m}{\Delta t} - \eta \left(\frac{u_{xx}^{m+1} + u_{xx}^m}{2} \right) + \mu \left(\frac{u_x^{m+1} + u_x^m}{2} \right) + d \frac{u_x^{m+1} + u_x^m}{2} = 0 \quad (4.1)$$

整理之后得:

$$Pu_j^{m+1} + Q(u_x)_j^{m+1} - R(u_{xx})_j^{m+1} = Pu_j^m - Q(u_x)_j^m - \tilde{R}(u_{xx})_j^m. \quad (4.2)$$

其中

$$P = \frac{1}{1\Delta t} + \frac{d}{2} > 0, Q = \frac{\mu + d}{2}, R = \frac{1}{\Delta t} + \frac{\eta}{2}, \tilde{R} = \frac{1}{\Delta t} - \frac{\eta}{2},$$

设三角样条系数满足 Fourier 分析, $\delta_j^m = \xi^m e^{ij\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$, 其中 $\xi = \xi(\theta)$ 为放大因子。

将三角样条表示关系代入 Fourier 分析可得

$$u_j^m = M(\theta) \xi^m e^{ij\theta}, (u_x)_j^m = iS(\theta) \xi^m e^{ij\theta}, (u_{xx})_j^m = L(\theta) \xi^m e^{ij\theta} \quad (4.3)$$

其中

$$M(\theta) = a_2 + 2a_1 \cos \theta, S(\theta) = 2a_3 \sin \theta, L(\theta) = a_5 + 2a_4 \cos \theta.$$

下面利用所采用的两个紧致格式建立 $S(\theta)$ 与 $L(\theta)$ 的符号关系。

首先, 将 Fourier 形式代入一阶导的四阶 Padé 紧致差分格式公式(2.5)中, 得

$$iS(\theta) \xi^m e^{ij\theta} = \frac{3}{4h} 2iM(\theta) \sin \theta \xi^m e^{ij\theta} - \frac{1}{4} 2iS(\theta) \cos \theta \xi^m e^{ij\theta}. \quad (4.4)$$

约去公共因子 $i\xi^m e^{ij\theta}$ 并整理后, 可得

$$S(\theta)(2 + \cos \theta) = \frac{3}{h} M(\theta) \sin \theta, \quad (4.5)$$

即 $S(\theta) = \omega_1(\theta) M(\theta)$, 其中 $\omega_1(\theta) = \frac{3 \sin \theta}{h(2 + \cos \theta)}$ 。

其次, 将 Fourier 形式代入二阶导数的 Hermite 四阶紧致格式公式(2.4)中, 得

$$L(\theta)\xi^m e^{ij\theta} = \frac{6}{5h^2} - 2(1 - \cos\theta)M(\theta)\xi^m e^{ij\theta} - \frac{1}{10}2L(\theta)\cos\theta\xi^m e^{ij\theta}. \quad (4.6)$$

约去公共因子 $\xi^m e^{ij\theta}$, 得

$$L(\theta) = -\frac{12}{5h^2}(1 - \cos\theta)M(\theta) - \frac{1}{5}L(\theta)\cos\theta. \quad (4.7)$$

即 $L(\theta) = -\omega_2(\theta)M(\theta)$, 其中 $\omega_2(\theta) = \frac{12(1 - \cos\theta)}{h^2(5 + \cos\theta)}$ 。

由于 $\theta \in [0, \pi]$, 故有 $1 - \cos\theta \geq 0$ 且 $5 + \cos\theta \geq 4 > 0$, 从而 $\omega_2(\theta) \geq 0$ 。

于是,

$$u_j^m = M(\theta)\xi^m e^{ij\theta}, (u_x)_j^m = i\omega_1(\theta)M(\theta)\xi^m e^{ij\theta}, (u_{xx})_j^m = -\omega_2(\theta)M(\theta)\xi^m e^{ij\theta},$$

将上述结果代入主离散方程, 得到

$$M(\theta)\xi^{m+1}e^{ij\theta}(P + iQ\omega_1(\theta) + R\omega_2(\theta)) = M(\theta)\xi^m e^{ij\theta}(P - iQ\omega_1(\theta) + \tilde{R}\omega_2(\theta)). \quad (4.8)$$

约去公共因子 $M(\theta)\xi^m e^{ij\theta}$, 可得放大因子

$$\xi(\theta) = \frac{P + \tilde{R}\omega_2(\theta) - iQ\omega_1(\theta)}{P + R\omega_2(\theta) + iQ\omega_1(\theta)}. \quad (4.9)$$

因此,

$$|\xi(\theta)|^2 = \frac{(P + \tilde{R}\omega_2(\theta))^2 + Q^2\omega_1^2(\theta)}{(P + R\omega_2(\theta))^2 + Q^2\omega_1^2(\theta)}. \quad (4.10)$$

由 $\eta \geq 0$ 可知

$$R = \frac{1}{\Delta t} + \frac{\eta}{2} \geq \tilde{R} = \frac{1}{\Delta t} - \frac{\eta}{2}.$$

再结合 $\omega_2(\theta) \geq 0$, 可得

$$P + R\omega_2(\theta) \geq P + \tilde{R}\omega_2(\theta). \quad (4.11)$$

从而

$$(P + R\omega_2(\theta))^2 + Q^2\omega_1^2(\theta) \geq (P + \tilde{R}\omega_2(\theta))^2 + Q^2\omega_1^2(\theta). \quad (4.12)$$

因此

$$|\xi(\theta)|^2 \leq 1, \forall \theta \in [0, \pi]. \quad (4.13)$$

即

$$|\xi(\theta)| \leq 1, \forall \theta \in [0, \pi]. \quad (4.14)$$

故该离散格式在 von-Neumann 意义下是稳定的。由于推导过程中未对时间步长 Δt 与空间步长 h 引入任何耦合或限制条件, 因此该格式在 von-Neumann 意义下是无条件稳定的。证毕。

5. 数值算例

为了验证本文方法求解该问题的有效性, 并将其与解析解进行对比, 我们采用相应公式计算并给出

L_∞ 和 L_2 误差。

$$L_\infty = \max_i |U(x_i, t) - u(x_i, t)|, \quad (5.1)$$

$$L_2 = \left(h \sum_i |U(x_i, t) - u(x_i, t)|^2 \right)^{1/2} \quad (5.2)$$

通过分析上述误差, 可以评价所用数值算法的有效性 with 收敛性。

5.1. 小振幅孤立波算例

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0, x \in [-40, 60], t \in [0, 20] \quad (5.3)$$

方程的解析解为:

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2[\alpha(x - \beta t)] \quad (5.4)$$

其中 $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\beta}}$, $\beta = 1 + c$ 。初始条件和边界条件根据精确解得到, 其中 $u(x, t)$ 表示单孤波解, 其振幅为 $3c$,

波宽参数为 $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\beta}}$, 波速为 $\beta = 1 + c$, 且初始时以原点为中心。在数值实验中, 取参数 $c = 0.03$, 时间

步长 $\Delta t = 0.01$ 。表 1 给出了不同时间层下 L_2 和 L_∞ 误差范数的数值结果。并与有限元方法(FEM) [14]和三次 B-样条配置法(CSCM) [15]进行了对比。从表中可以看出, 在相同或更粗的空间网格条件下, 本文方法依然能够获得更小的误差, 说明该方法是有效的。

图 1 表示不同时间水平的数值解和精确解的对比结果, 图 2 表示方程数值解的三维曲面图。从图中可以看出波随时间沿空间方向平滑传播, 形状基本保持不变, 进一步说明该方法具有较好的稳定性。

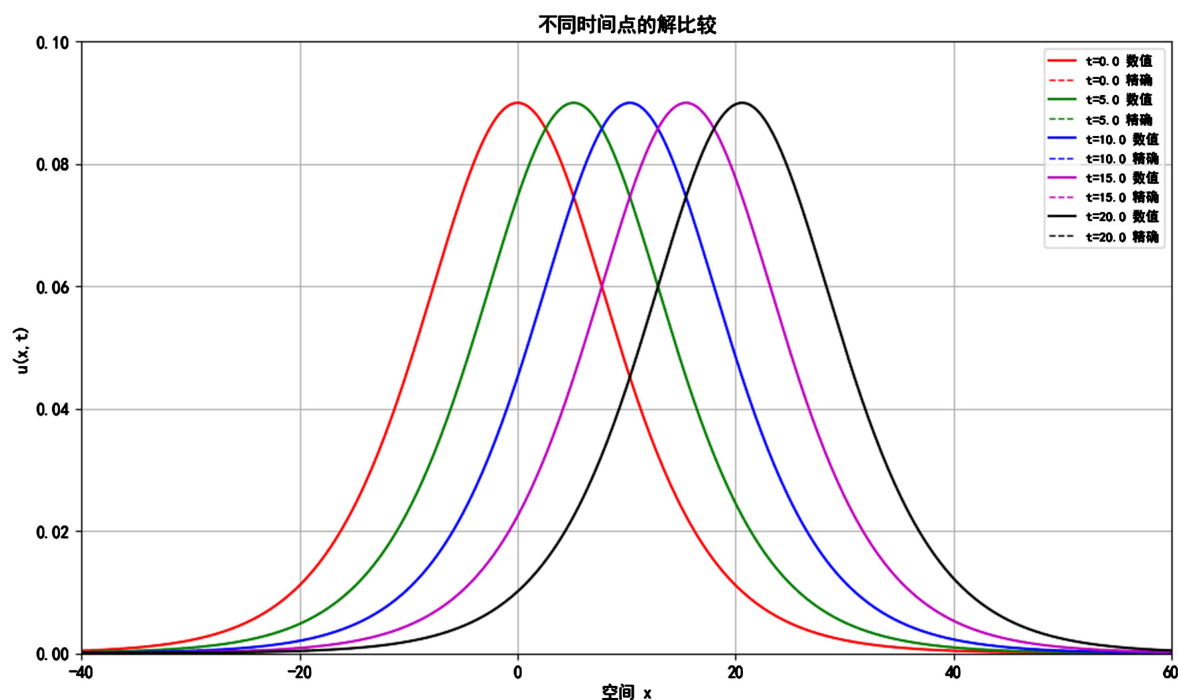


Figure 1. Comparison of solutions at different time levels

图 1. 不同时间点的解比较

Table 1. The L_2 and L_∞ error norms at different time levels with $t \leq 8$, $\Delta t = 0.01$, and $c = 0.03$

表 1. L_2 和 L_∞ 误差范数在当 $t \leq 8$, $\Delta t = 0.01$, $c = 0.03$ 不同时间层上的比较

Time	FEM ($N = 1000$)		CSCM ($N = 1000$)		本方法($N = 500$)	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞
$t = 2$	3.39E-04	2.74E-04	3.39E-04	2.74E-04	1.86E-05	3.90E-06
$t = 4$	4.12E-04	2.30E-04	4.12E-04	2.30E-04	3.72E-05	7.81E-06
$t = 6$	4.74E-04	2.25E-04	4.74E-04	2.25E-04	5.58E-05	1.17E-05
$t = 8$	5.11E-04	2.21E-04	5.11E-04	2.21E-04	7.44E-05	1.57E-05

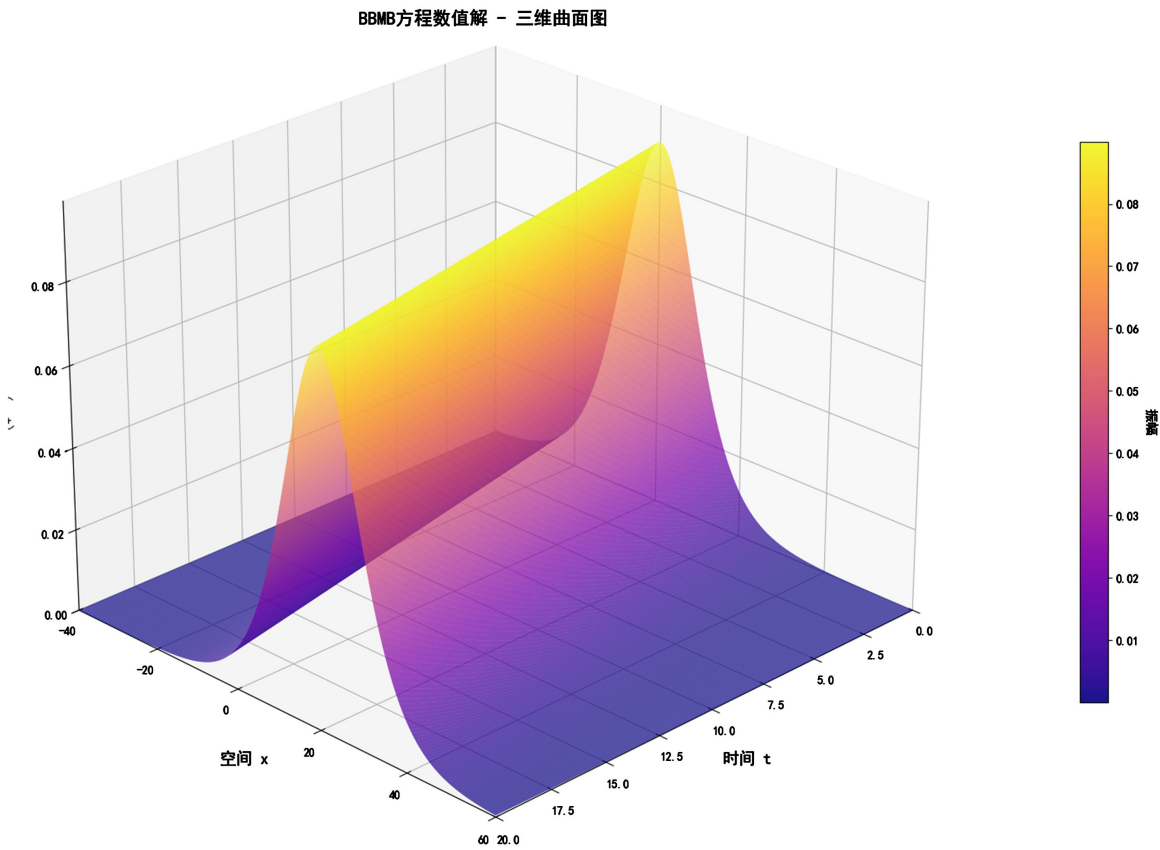


Figure 2. Three-dimensional surface plot of the numerical solution for Example 5.1

图 2. 算例 5.1 数值解的三维曲面

5.2. 单位振幅孤立波算例

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0, \\ x \in [-10, 30], t > 0. \end{cases} \tag{5.5}$$

方程的解析解为:

$$u(x, t) = \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{4} - \frac{t}{3}\right) \tag{5.6}$$

精确解同样是从初始条件和边值条件中得到的, 该解描述了一个沿正向传播的孤立波, 其波形在传播过

程中保持稳定, 可以检验数值方法。

表 2 给出了在不同时间下数值解和精确解的 L_2 误差范数, 从结果可以看出, 随着时间的推进, 误差保持在较低水平, 说明所提出的数值格式在时间推进过程中有良好的稳定性。

图 3 给出了方程三维曲面图。从图中可以看出孤立波沿空间方向随时间平滑传播, 形状基本保持不变。

Table 2. L_2 errors at different time levels

表 2. L_2 误差范数在不同时间层上的比较

Time	$\Delta t = 0.1, N = 900$		$\Delta t = 0.01, N = 900$	
	QBSCM [9]	本方法	QBSCM [9]	本方法
0.5	1.8446E-04	1.0597E-04	9.8516E-05	3.3686E-06
1.0	3.9313E-04	2.1183E-04	8.7488E-05	6.7667E-06
1.5	6.1251E-04	3.1743E-04	8.1447E-05	1.0173E-05
2.0	8.2979E-04	4.2264E-04	7.8863E-05	1.3573E-05

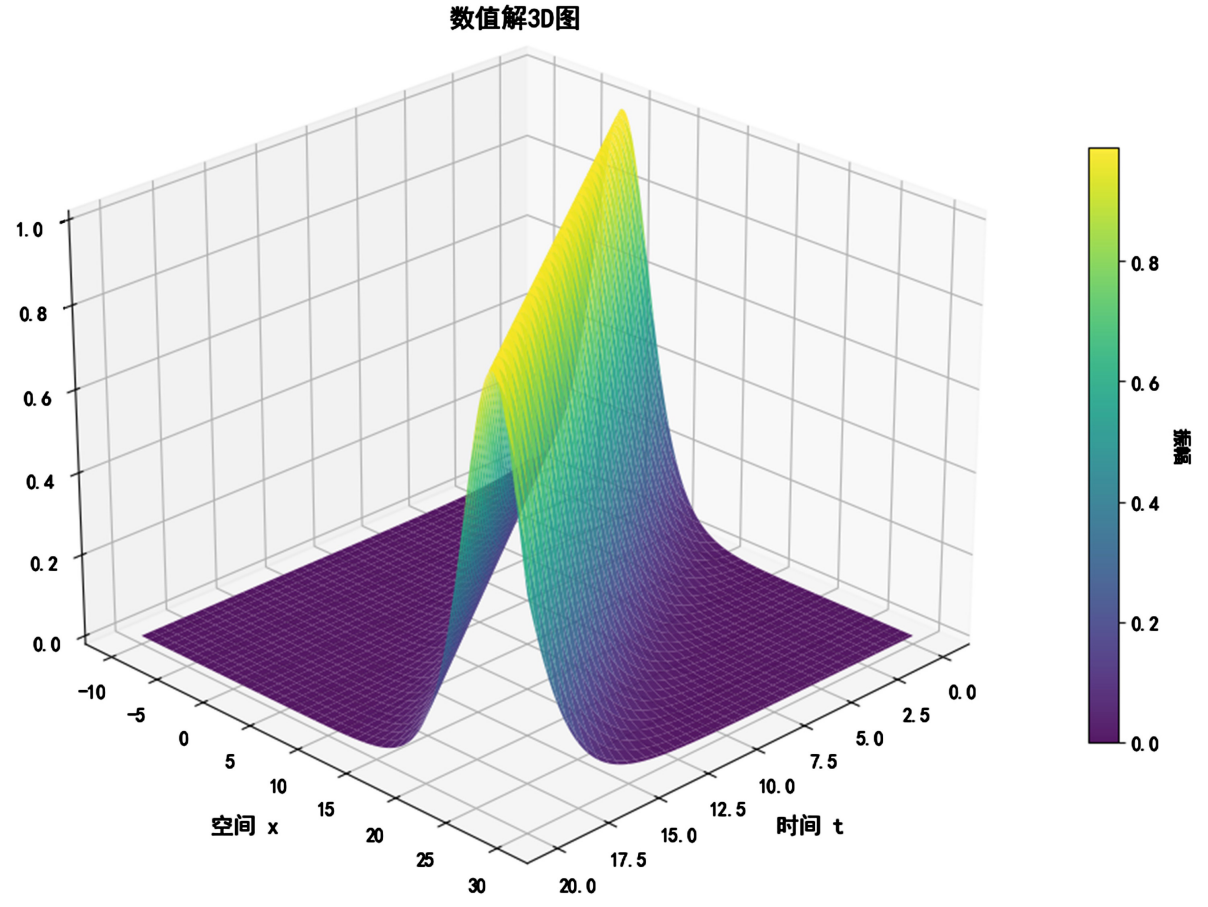


Figure 3. Three-dimensional surface plot of the numerical solution for Example 5.2

图 3. 算例 5.2 数值解的三维曲面图

5.3. 非齐次 BBM-Burgers 方程算例

$$U_t - U_{xxt} - \alpha U_{xx} + \beta U_x + UU_x = F, x \in [0, \pi], t \in [0, T]. \quad (5.7)$$

其中

$$F(x,t)=e^{-t}\left[\cos x-\sin x+\frac{1}{2}e^{-t}\sin(2x)\right].$$

方程(5.3)的解析解为

$$U(x,t)=e^{-t}\sin x \tag{5.8}$$

(见文献[16])。因此初始条件(IC)和边界条件(BCs)可以由该解析解直接得到。

所有数值计算均取 $\Delta t = 0.01, \alpha = \beta = 1$ 并在区间 $[0, \pi]$ 上进行。

表 3 给出了在 $t = 10$ 时不同网格剖分数 N 值下计算得到的 L_2 误差范数, 并与文献[6]、[13]和[16]中的结果进行了比较。

Table 3. A comparison of the error norm results L_2 of Example 5.3 for various values of N

表 3. 示例 5.3 中不同 N 值的误差范数 L_2 结果比较

N	[6]	[13]	[16]	此方法
10	0.0218e-0	1.7147e-4	2.9703e-4	1.5374e-4
20	0.0053e-0	5.6341e-5	1.1446e-4	1.5574e-5
40	0.0013e-0	—	4.9603e-5	1.7194e-6
80	3.3291e-4	7.2635e-6	2.3227e-5	2.1912e-7
160	8.3133e-5	—	1.1275e-5	4.6797e-8
320	2.0766e-5	8.1631e-7	5.5619e-6	2.6719e-8
640	5.1898e-6	—	2.7632e-6	2.4336e-8

表 4 给出了当 $N = 121$ 时, 在不同时间层下 L_2 和 L_∞ 误差范数的比较结果, 这些结果与文献[13]和[17]中的结果一致。

Table 4. A comparison of the error norm results L_2 and L_∞ of Example 5.2 at various time-levels

表 4. 在不同时间上例 5.2 的误差范数 L_2 和 L_∞ 的比较

Time	[13]		[17]		此方法	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞
$t = 1$	1.51E-03	1.46E-03	3.01e-05	1.34e-04	8.94e-06	7.12e-06
$t = 2$	1.21E-03	1.18E-03	1.59e-05	5.47e-05	7.44e-06	5.77e-06
$t = 4$	3.95E-04	3.96E-04	6.62e-06	8.90e-06	3.04e-06	2.35e-06
$t = 10$	2.75E-06	3.22E-06	2.54e-07	2.21e-07	7.82e-08	6.93e-08

从表 3 和表 4 可以清楚地看出, 此方法得到的近似结果误差非常小。也就是说, 与表格中所比较的其他方法相比, 我们的结果是所有方法中最小的, 因此也更接近精确解。

图 4 以图形方式展示了算例 5.3 在 $t \leq 5$ 时刻的数值解情况。从该图可以看出, 该数值结果与文献[17]和[18]中所观察到的物理行为一致。

下面图 5(a)可以看出, 在固定空间网格 $N = 800$ 的条件下, 误差随着时间步长的减小呈现二阶收敛, 进一步说明该格式在时间方向是二阶精度, 同时在图 5(b)可以看出, 在固定时间步长 $\Delta t = 10^{-5}$ 的条件下, 误差随空间步长的减小呈现四阶收敛, 说明该格式在空间方向上是四阶精度。进而说明了该格式的有效性。

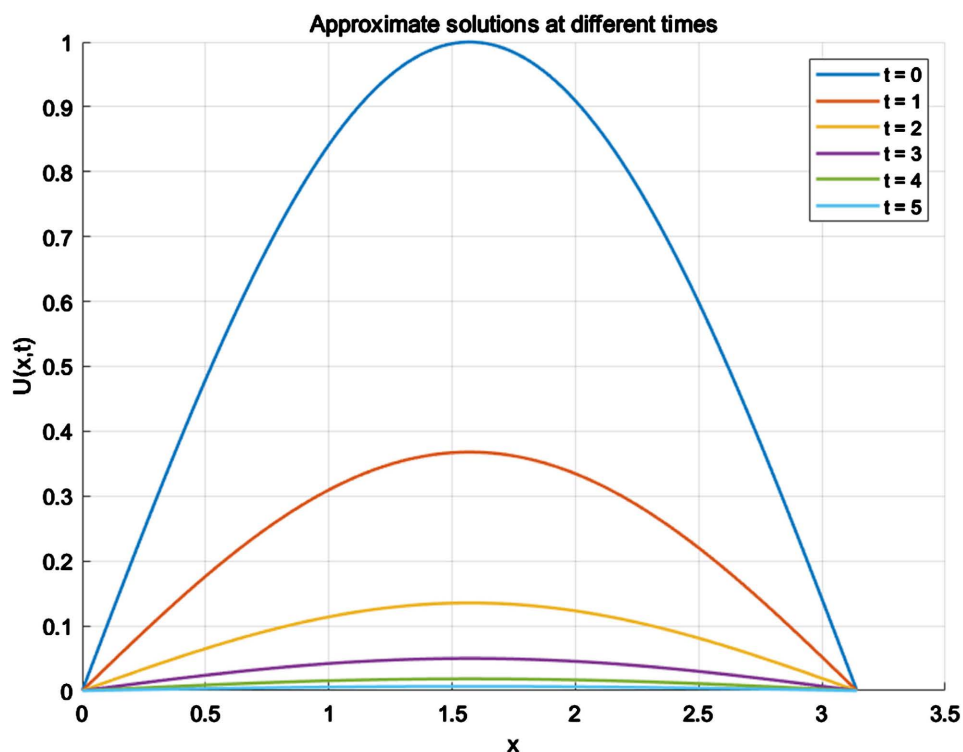


Figure 4. Approximate solutions of Example 5.3 at times $t \leq 5$ for parameters $\alpha = \beta = 1$

图 4. 在参数 $\alpha = \beta = 1$ 的情况下, 示例 5.3 在时间 $t \leq 5$ 时的近似解

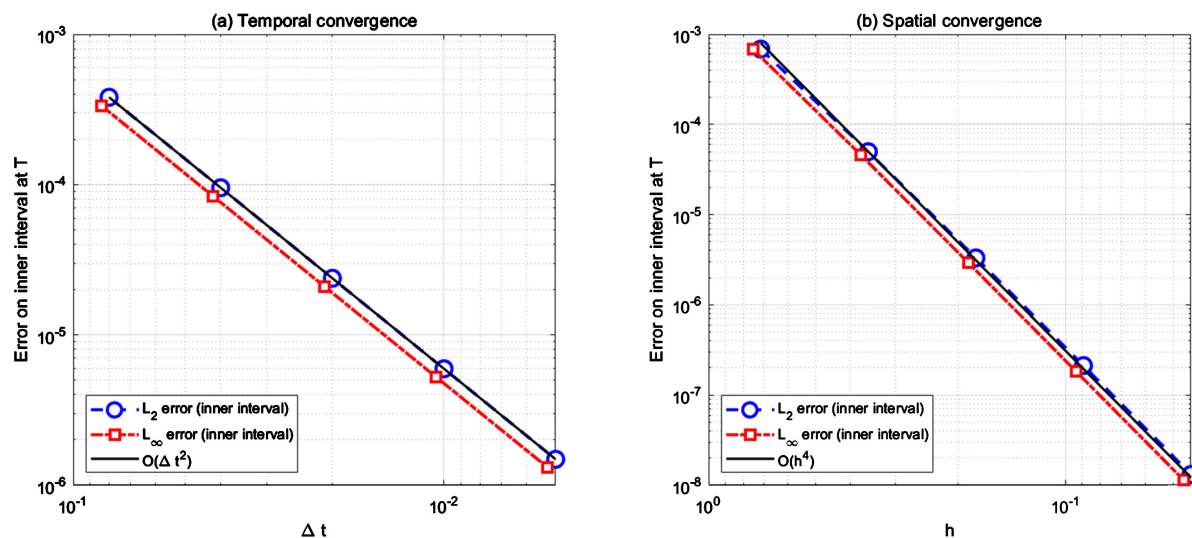


Figure 5. (a) Temporal convergence with fixed spatial grid $N = 800$, demonstrating second-order accuracy in time; (b) Spatial convergence with fixed time step $\Delta t = 10^{-5}$, showing fourth-order accuracy in space

图 5. (a) 在固定空间网格 $N = 800$ 下的时间收敛结果, 表明该格式在时间方向达到二阶精度; (b) 在固定时间步长 $\Delta t = 10^{-5}$ 下的空间收敛结果, 表明该格式在空间方向达到四阶精度

参考文献

- [1] Barenblatt, G.I., Zheltov, I.P. and Kochina, I.N. (1960) Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **24**, 1286-1303.

- [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(60\)90107-6](https://doi.org/10.1016/0021-8928(60)90107-6)
- [2] Ting, T.W. (1963) Certain Non-Steady Flows of Second-Order Fluids. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **14**, 1-26. <https://doi.org/10.1007/bf00250690>
 - [3] Peregrine, D.H. (1966) Calculations of the Development of an Undular Bore. *Journal of Fluid Mechanics*, **25**, 321-330. <https://doi.org/10.1017/s0022112066001678>
 - [4] Abbasbandy, S. and Shirzadi, A. (2010) The First Integral Method for Modified Benjamin-Bona-Mahony Equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **15**, 1759-1764. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2009.08.003>
 - [5] Fakhari, A., Domairry, G. and Ebrahimpour, A. (2007) Approximate Explicit Solutions of Nonlinear BBMB Equations by Homotopy Analysis Method and Comparison with the Exact Solution. *Physics Letters A*, **368**, 64-68. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.03.062>
 - [6] Omrani, K. and Ayadi, M. (2008) Finite Difference Discretization of the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers Equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **24**, 239-248. <https://doi.org/10.1002/num.20256>
 - [7] Kadri, T., Khiari, N., Abidi, F. and Omrani, K. (2008) Methods for the Numerical Solution of the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers Equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **24**, 1501-1516. <https://doi.org/10.1002/num.20330>
 - [8] Ganji, Z.Z., Ganji, D.D. and Bararnia, H. (2009) Approximate General and Explicit Solutions of Nonlinear BBMB Equations by Exp-Function Method. *Applied Mathematical Modelling*, **33**, 1836-1841. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2008.03.005>
 - [9] Alquran, M. and Al-Khaled, K. (2011) Sinc and Solitary Wave Solutions to the Generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers Equations. *Physica Scripta*, **83**, Article 065010. <https://doi.org/10.1088/0031-8949/83/06/065010>
 - [10] Gozukizil, Ö.F. and Akcagil, Ş. (2012) Exact Solutions of Benjamin-Bona-Mahony-Burgers-Type Nonlinear Pseudo-Parabolic Equations. *Boundary Value Problems*, **2012**, Article No. 144. <https://doi.org/10.1186/1687-2770-2012-144>
 - [11] Fardi, M. and Sayevand, K. (2012) Homotopy Analysis Method a Fresh View on Benjamin-Bona-Mahony-Burgers Equation. *Journal of Mathematics and Computer Science*, **4**, 494-501. <https://doi.org/10.22436/jmcs.04.03.24>
 - [12] Kumar, V., Gupta, R.K. and Jiwari, R. (2013) Painlevé Analysis, Lie Symmetries and Exact Solutions for Variable Coefficients Benjamin-Bona-Mahony-Burger Equation. *Communications in Theoretical Physics*, **60**, 175-182. <https://doi.org/10.1088/0253-6102/60/2/06>
 - [13] Arora, G., Mittal, R.C. and Singh, B.K. (2014) Numerical Solution of BBM-Burger Equation with Quartic B-Spline Collocation Method. *Journal of Engineering Science and Technology*, **9**, 104-116.
 - [14] Gardner, L.R.T., Gardner, G.A. and Dag, I. (1995) A B-Spline Finite Element Method for the Regularized Long Wave Equation. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **11**, 59-68. <https://doi.org/10.1002/cnm.1640110109>
 - [15] Zarebnia, M. and Parvaz, R. (2016) On the Numerical Treatment and Analysis of Benjamin-Bona-Mahony-Burgers Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **284**, 79-88. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.02.037>
 - [16] Zarebnia, M. and Parvaz, R. (2020) Error Analysis of the Numerical Solution of the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers Equation. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, **38**, 177-191. <https://doi.org/10.5269/bspm.v38i3.34498>
 - [17] Karta, M. (2023) Numerical Solution for Benjamin-Bona-Mahony-Burgers Equation with Strang Time-Splitting Technique. *Turkish Journal of Mathematics*, **47**, 537-553. <https://doi.org/10.55730/1300-0098.3377>
 - [18] Arora, S., Jain, R. and Kukreja, V.K. (2020) Solution of Benjamin-Bona-Mahony-Burgers Equation Using Collocation Method with Quintic Hermite Splines. *Applied Numerical Mathematics*, **154**, 1-16. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.03.015>