Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(6), 55-61
Published Online June 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.156265

分数阶拉普拉斯方程周期解的多重性

李乔艳[1]，**崔莹新**[2*]

[1]太原师范学院数学与统计学院，山西 晋中
[2]山西师范大学数学科学学院，山西 太原

收稿日期：2026年5月4日；录用日期：2026年5月29日；发布日期：2026年6月5日

摘 要

本文研究以下分数阶拉普拉斯方程的周期解 $(-\Delta)^s u(x)+F'(u)=0,\quad u(x)=u(x+T)$, 其中 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是充分光滑的函数。当函数 F 满足恰当条件，我们利用变分方法与截断技巧，证明对于任意周期 $T>0$，上述方程均有无穷多周期为 T 的周期解。

关键词

变分方法，周期解，分数阶拉普拉斯算子

The Multiplicity of Periodic Solutions for Fractional Laplacian Equation

Qiaoyan Li[1], **Ying-Xin Cui**[2*]

[1]College of Mathematics and Statistics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi
[2]School of Mathematics, Shanxi Normal University, Taiyuan Shanxi

Received: May 4, 2026; accepted: May 29, 2026; published: June 5, 2026

Abstract

We consider the periodic solutions of the following fractional Laplacian equation $(-\Delta)^s u(x)+F'(u)=0,\quad u(x)=u(x+T)$, where $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is smooth enough function. Under suitable condition of F, by employing variational method and truncation method, we prove for any periodic $T>0$, the above equation has infinity periodic solutions with period T.

*通讯作者。

文章引用: 李乔艳, 崔莹新. 分数阶拉普拉斯方程周期解的多重性[J]. 应用数学进展, 2026, 15(6): 55-61.
DOI: 10.12677/aam.2026.156265

Keywords

Variational Method, Periodic Solutions, Fractional Laplacian

1. 引言

本文研究如下非局部方程

$$(-\Delta)^s u(x)+F'(u)=0,\quad u(x)=u(x+T),\quad x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

其中 F 是充分光滑的函数，$0<s<1$，$(-\Delta)^s$ 为分数阶拉普拉斯算子。涉及分数阶拉普拉斯算子的微分方程出现在很多领域，例如量子力学，种群动态及博弈论[1] [2]。

2007 年，Caffarelli 和 Silvestre [3]借助局部化方法定义分数阶拉普拉斯算子。给定函数 ϕ，考虑如下方程

$$\begin{cases}\operatorname{div}\left(y^{1-2s}\nabla\tilde{\phi}\right)=0 & (x,y)\in\mathbb{R}_+^2=\{(x,y):x\in\mathbb{R},y>0\},\\ \tilde{\phi}(x,0)=\phi(x) & (x,0)\in\mathbb{R},\end{cases}$$

Caffarelli 和 Silvestre 得到

$$\tilde{\phi}(x,y)=\int_{\mathbb{R}}p_s(x-z,y)\phi(z)\mathrm{d}z,\quad p_s(x,y)=C_s\frac{y^{2s}}{\left(|x|^2+|y|^2\right)^{\frac{1+2s}{2}}}, \tag{2}$$

其中常数 $C_s>0$，满足 $\int_{\mathbb{R}}p_s(x,y)\mathrm{d}x=1$。进一步，他们证明

$$(-\Delta)^s\phi(x)=\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial v^{1-2s}}=-\lim_{y\to 0}y^{1-2s}\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y},\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

由式(2)，当 $\phi(x)$ 为周期函数时，$\tilde{\phi}(x,y)$ 关于 x 呈周期性。因而方程(1)可通过如下问题求解

$$\begin{cases}\operatorname{div}\left(y^{1-2s}\nabla U\right)=0 & (x,y)\in\mathbb{R}_+^2=\{(x,y):x\in\mathbb{R},y>0\},\\ \dfrac{\partial U}{\partial v^a}=-F'(U(x,0)) & (x,0)\in\mathbb{R}.\end{cases} \tag{3}$$

确切而言，若 $U(x,y)$ 是方程(3)的周期解，那么 $U(x,0)$ 一定满足方程(1)。

近年来，许多学者借助上述局部化方法研究了方程(1)的周期解。Gui 等[4]假设

$$F'(u)>0,u\in(-1,0),\quad F'(u)<0,u\in(0,1).$$

当上式成立时，他们证明对于存在 $T_0>0$，当周期 $T>T_0$ 时，方程(1)都存在一个周期为 T 的周期解。进一步，Du 等[5]给出 T_0 的上界估计。Feng 等[6]给出 T_0 的精确值。此外，Cui 等[7]证明对于任何整数 k，都存在 $T_k>0$，当周期 $T>T_k$ 时，方程(1)都有 k 对周期解。Feng 等[8]也将文献[4]的结论推广到非自治的问题。最近，文献[9]-[11]也将这些结果推广到了分数阶周期系统。

以上文献均对函数 $F(u)$ 在原点邻域做出一些假设。特别地，他们均假设 $F'(u)>0,u\in(-1,0)$ 及

$F'(u)<0, u\in(0,1)$。根据此条件，当 $0<|u|<1$ 时，$F(u)<F(0)$，即 $F(0)$ 为函数 $F(u)$ 的局部极大值且 $F'(0)=0$。如果 $F(0)$ 不是 $F(u)$ 的局部极大值时，是否有类似结论？基于此，本文将去掉 $F(0)$ 为局部极大值约束，证明当对函数 $F(u)$ 在无穷远处做出一些假设时，方程(1-1)也有周期解的多重性。

2. 主要结果

本文假设：

(H_1)假设存在序列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得

$$F'(b_n)=0,\quad \lim_{n\to\infty} b_n=+\infty.$$

(H_2)假设存在 $l_0>0$ 使得

$$-\infty=\liminf_{|u|\to\infty}\frac{F(u)}{u^2}\le\limsup_{|u|\to\infty}\frac{F(u)}{u^2}=l_0<+\infty.$$

本文主要结果为：

定理 1 假设 $F(u)$ 为可微函数，$F'(0)=0$ 且满足条件(H_1)和(H_2)，则给定周期 $T>0$，方程(1)都有无穷多周期为 T 的周期解。

3. 预备知识

定义 Hilbert 空间

$$\mathcal{H}=\Big\{U:U(x+T,y)=U(x,y),U(0,y)=U(T,y)=0,$$
$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2=\int_{\Omega_T}y^{1-2s}|\nabla U(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^T|U(x,0)|^2\,\mathrm{d}x<\infty\Big\},$$

其中 $\Omega_T=[0,T]\times[0,+\infty)$。

引理 1 [12] (嵌入定理)设 $0<s<1$，则 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 紧嵌入 $L^2(0,T)$。

引理 2 [13] 设 E 是一个实 Hilbert 空间，$I\in C^1(E,\mathbb{R})$ 且下方有界且满足 PS 条件。则存在集合 $x_0\in E$ 满足 $I(x_0)=\inf_{x\in E}I(x)$，且 $I'(x_0)=0$。

4. 主要结果的证明

下面完成定理 1 的证明，证明分为两步：

第一步：证明方程(1)存在周期解。

定义截断函数

$$F_n(u)=\begin{cases}F(0)+\dfrac{u^2}{2}, & u\le 0,\\ F(u), & 0\le u\le b_n,\\ F(b_n)+\dfrac{(u-b_n)^2}{2}, & u\ge b_n.\end{cases}$$

考虑如下泛函

$$J_n(U)=\frac{1}{2}\int_{\Omega_T}y^{1-2s}|\nabla U(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^T F_n(U(x,0))\mathrm{d}x,\quad \forall U\in\mathcal{H}.$$

由于函数 $F(u)$ 为可微函数，则由 F_n 的构造，$F_n(u)$ 为可微函数且存在常数 $C_0>0$ 使得

$$\left|F_n(u)\right| \le C_0\left(1+|u|^2\right), \quad \left|F_n'(u)\right| \le C_0\left(1+|u|\right) \quad \forall u \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

根据引理 1，可知 $J_n \in C^1(\mathcal{H},\mathbb{R})$。由 F_n 的构造，存在常数 $C_1 > 0$ 使得

$$J_n(U) \ge \frac{1}{2}\int_{\Omega_T} y^{1-2s}\left|\nabla U(x,y)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_0^T U^2(x,0)\mathrm{d}x - C_1,$$

从而 J_n 下方有界且强制。下面证明泛函 J_n 满足 PS 条件。假设 $\{U_k\}_{k\ge1} \subseteq \mathcal{H}$ 为 PS 序列，即当 $k\to\infty$ 时，$J_n(U_k)\to C$，$J_n'(U_k)\to 0$。由于 J_n 是强制的，可知 U_k 在 $\mathcal{H}$ 中有界。因此，存在 $U\in\mathcal{H}$，使得 U_k 在 $\mathcal{H}$ 中弱收敛于 U。下证 U_k 在 $\mathcal{H}$ 中强收敛于 U。注意到

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_T} y^{1-2s}\left|\nabla\left(U_k(x,y)-U(x,y)\right)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \left\langle J_n'(U_k)-J_n'(U), U_k-U\right\rangle - \int_0^T \left[F_n'\left(U_k(x,0)\right)-F_n'\left(U(x,0)\right)\right]\left[U_k(x,0)-U(x,0)\right]\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

其中

$$\left\langle J_n'(U), V\right\rangle = \iint_{\Omega_T} y^{1-2s}\nabla U(x,y)\nabla V(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_0^T F_n'\left(U(x,0)\right)V(x,0)\mathrm{d}x.$$

由于 U_k 在 $\mathcal{H}$ 中弱收敛于 U，

$$\left\langle J_n'(U_k)-J_n'(U), U_k-U\right\rangle \to 0, \quad k\to\infty.$$

根据 F_n 的构造，由式(4)，引理 1 以及 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left[F_n'\left(U_k(x,0)\right)-F_n'\left(U(x,0)\right)\right]\left[U_k(x,0)-U(x,0)\right]\mathrm{d}x \\
&\le 2C_0\int_0^T \left(1+\left|U_k(x,0)\right|+\left|U(x,0)\right|\right)\left|U_k(x,0)-U(x,0)\right|\mathrm{d}x \\
&\le 2C_0\left(1+\left\|U_k(x,0)\right\|_{L^2(0,T)}+\left\|U(x,0)\right\|_{L^2(0,T)}\right)\times\left\|U_k(x,0)-U(x,0)\right\|_{L^2(0,T)} \to 0,
\end{aligned}$$

因此，

$$\int_{\Omega_T} y^{1-2s}\left|\nabla\left(U_k(x,y)-U(x,y)\right)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \to 0, \quad k\to\infty. \tag{5}$$

又根据引理 1，

$$U_k(x,0)\to U(x,0)\in L^2(0,T), \quad k\to\infty,$$

因此由式(5)，U_k 在 $\mathcal{H}$ 中强收敛于 U。从而证得 J_n 满足 PS 条件。

综上，引理 2 的所有条件均满足，因此泛函 J_n 存在临界点 $U_n\in\mathcal{H}$ 满足

$$J_n(U_n) = \inf_{U\in\mathcal{H}} J_n(U), \quad J_n'(U_n) = 0,$$

且 $U_n\in\mathcal{H}$ 为以下方程的周期解

$$\begin{cases}
\operatorname{div}\left(y^{1-2s}\nabla U_n\right) = 0 & (x,y)\in\mathbb{R}_+^2 = \left\{(x,y): x\in\mathbb{R}, y>0\right\}, \\
\dfrac{\partial U_n}{\partial \nu^a} = -F_n'\left(U_n(x,0)\right) & (x,0)\in\mathbb{R}.
\end{cases}$$

下证 $U_n\in\mathcal{H}$ 也是方程(3)的周期解。首先证明 $0\le U_n\le b_n$。令 $U_n^{\pm} = \max\left\{\pm U_n, 0\right\}$。由 F_n 的构造，当 $u\ge b_n$ 时 $F_n'(u) = u-b_n$。由于 $J_n'(U_n)=0$，则

$$
\begin{aligned}
0 &= \iint_{\Omega_T} y^{1-2s}\nabla U_n(x,y)\nabla\left(U_n(x,y)-b_n\right)^+ \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_0^T F_n'\left(U_n(x,0)\right)\left(U_n(x,0)-b_n\right)^+ \mathrm{d}x \\
&= \iint_{\Omega_T} y^{1-2s}\left|\nabla\left(U_n(x,y)-b_n\right)^+\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{[0,T]\cap\{U_n(x,0)\ge b_n\}} F_n'\left(U_n(x,0)\right)\left(U_n(x,0)-b_n\right)^+ \mathrm{d}x \\
&= \iint_{\Omega_T} y^{1-2s}\left|\nabla\left(U_n(x,y)-b_n\right)^+\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_0^T\left|\left(U_n(x,0)-b_n\right)^+\right|^2 \mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

因此，$\left(U_n(x,y)-b_n\right)^+=0$，即 $U_n\le b_n$。因为 $u\le 0$ 时，$F_n'(u)=u$。同理可得 $U_n\ge 0$。现将 U_n 沿 x 方向从 $[0,T]\times[0,+\infty)$ 周期延拓至 $\overline{\mathbb{R}_+^2}$，类似文献[4]定理 1.1 与[9]定理 1.1 的证明，U_n 也是方程(3)的周期解，仍然记为 U_n。因而 $u_n(x)=U_n(x,0)$ 是方程(1)的周期解。

第二步：证明方程(1)有无穷多周期解。

记

$$
c_n = J(U_n) = J_n(U_n) = \inf_{U\in\mathcal{H}} J_n(U).
$$

由假设条件(H$_2$)右半部分，存在常数 $M>0$，使得

$$
F(u)\le l_0|u|^2,\quad |u|\ge M. \tag{6}
$$

令 $L>0$ 为足够大的常数，使得

$$
L > 2\Gamma(2-2s)\left(\frac{4}{T^2}+1\right)+l_0. \tag{7}
$$

其中 $\Gamma(2-2s)$ 为经典 Gamma 函数。由条件(H$_1$)，有 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty$。由条件(H$_2$)左半部分，根据下极限的定义，对满足式(7)的常数 $L>0$，存在序列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得

$$
\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n^2}\le -L,\quad \lim_{n\to\infty}\alpha_n=+\infty.
$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty$，对于任意正整数 $k\ge 1$，存在常数 $N_k>0$，当 $n\ge N_k$ 时，$b_n\ge\alpha_k$，定义 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 子列为 $\beta_k=b_{N_k}$，满足

$$
F(\alpha_k)\le -L\alpha_k^2,\quad \lim_{k\to\infty}\alpha_k=+\infty,\quad \alpha_k\le\beta_k.
$$

为叙述方便，我们将子列 $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 仍记为 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$。因此，由条件(H$_2$)左半部分，存在序列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得

$$
F(\alpha_n)\le -L\alpha_n^2,\quad \lim_{n\to\infty}\alpha_n=+\infty,\quad \alpha_n\le b_n. \tag{8}
$$

定义二元函数

$$
\varphi_n(x,y)=\mathrm{e}^{\frac{-y}{2}}\phi_n(x)\in\mathcal{H},
$$

其中 $\phi_n(x)$ 是周期为 T 的周期函数且

$$
\phi_n(x)=\begin{cases}
\dfrac{4}{T}x\alpha_n, & x\in\left[0,\dfrac{T}{4}\right],\\[2mm]
\alpha_n, & x\in\left[\dfrac{T}{4},\dfrac{3T}{4}\right],\\[2mm]
(T-x)\dfrac{4}{T}\alpha_n, & x\in\left[\dfrac{3T}{4},T\right].
\end{cases}
$$

容易计算

$$\int_{\Omega_T} y^{1-2s}\left|\nabla\varphi_n(x,y)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^\infty y^{1-2s}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\int_0^T\left|\phi_n\right|^2+\frac{\left|\phi_n'\right|^2}{4}\mathrm{d}x \le \Gamma(2-2s)\left(\frac{4\alpha_n^2}{T}+\alpha_n^2 T\right), \tag{9}$$

另一方面，由于函数 $F(u)$ 为可微函数，因此存在常数 $C_M>0$ 使得

$$F(u)\le C_M,\quad |u|\le M.$$

因而，由式(6)和式(8)，

$$\begin{aligned}\int_0^T F(\varphi_n(x,0))\mathrm{d}x &= \int_{[0,T]\cap\{\phi_n\le M\}} F(\phi_n(x))\mathrm{d}x+\int_{[0,T]\cap\{\phi_n> M\}} F(\phi_n(x))\mathrm{d}x+\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} F(\alpha_n)\mathrm{d}x \\ &\le C_M T+\frac{l_0\alpha_n^2}{2}T-\frac{L\alpha_n^2}{2}T.\end{aligned}$$

因此，由式(9)，有

$$\begin{aligned}J(\varphi_n) &= \int_{\Omega_T} y^{1-2s}\left|\nabla\varphi_n(x,y)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^T F(\varphi_n(x,0))\mathrm{d}x \\ &\le \frac{1}{2}\left(l_0+2\Gamma(2-2s)\left(\frac{4}{T^2}+1\right)-L\right)T\alpha_n^2+C_M T.\end{aligned}$$

由于 $\left|\phi_n(x)\right|\le\alpha_n\le b_n$。由式(8)，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=+\infty$，因此，由式(7)

$$\lim_{n\to\infty} c_n=\lim_{n\to\infty}\inf_{U\in\mathcal{H}} J_n(U)\le\lim_{n\to\infty} J_n(\varphi_n)=\lim_{n\to\infty} J(\varphi_n)=-\infty.$$

由于 $c_n=J(U_n)$ 且 U_n 也是方程(3)的周期解，根据上式，存在无穷多互不相同的 U_n。因此方程(1)有无穷多互不相同周期解 $u_n(x)=U_n(x,0)$。

基金项目

国家自然科学基金(批准号：12301139)，山西省基础研究计划资助项目(批准号：202203021212389)。

参考文献

[1] Laskin, N. (2000) Fractional Quantum Mechanics and Lévy Path Integrals. *Physics Letters A*, **268**, 298-305. https://doi.org/10.1016/s0375-9601(00)00201-2

[2] Metzler, R. and Klafter, J. (2004) The Restaurant at the End of the Random Walk: Recent Developments in the Description of Anomalous Transport by Fractional Dynamics. *Journal of Physics A*: *Mathematical and General*, **37**, R161-R208. https://doi.org/10.1088/0305-4470/37/31/r01

[3] Caffarelli, L. and Silvestre, L. (2007) An Extension Problem Related to the Fractional Laplacian. *Communications in Partial Differential Equations*, **32**, 1245-1260. https://doi.org/10.1080/03605300600987306

[4] Gui, C., Zhang, J. and Du, Z. (2017) Periodic Solutions of a Semilinear Elliptic Equation with a Fractional Laplacian. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, **19**, 363-373. https://doi.org/10.1007/s11784-016-0357-1

[5] Du, Z. and Gui, C. (2020) Further Study on Periodic Solutions of Elliptic Equations with a Fractional Laplacian. *Nonlinear Analysis*, **193**, Article ID: 111417. https://doi.org/10.1016/j.na.2019.01.007

[6] Feng, Z. and Du, Z. (2022) Periodic Solutions of Fractional Laplace Equations: Least Period, Axial Symmetry and Limit. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **60**, 633-651. https://doi.org/10.12775/tmna.2022.016

[7] Cui, Y. and Wang, Z. (2020) Multiple Periodic Solutions of a Class of Fractional Laplacian Equations. *Advanced Nonlinear Studies*, **21**, 41-56. https://doi.org/10.1515/ans-2020-2113

[8] Feng, Z. and Du, Z. (2020) Periodic Solutions of Non-Autonomous Allen-Cahn Equations Involving Fractional Laplacian. *Advanced Nonlinear Studies*, **20**, 725-737. https://doi.org/10.1515/ans-2020-2075

[9] Du, Z. and Gui, C. (2020) Periodic Solutions of Allen-Cahn System with the Fractional Laplacian. *Nonlinear Analysis*,

201, Article ID: 112061. https://doi.org/10.1016/j.na.2020.112061

[10] Du, Z. and Feng, Z. (2025) Multiple Periodic Solutions of Allen-Cahn System Involving Fractional Laplacian. *Journal of Partial Differential Equations*, **38**, 411-431. https://doi.org/10.4208/jpde.v38.n4.2

[11] 崔莹新, 李皓晴. 分数阶拉普拉斯系统周期解的多重性[J]. 吉林大学学报, 2026, 64(2): 208-214.

[12] Di Nezza, E., Palatucci, G. and Valdinoci, E. (2012) Hitchhiker's Guide to the Fractional Sobolev Spaces. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **136**, 521-573. https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2011.12.004

[13] 薛小平, 吴玉虎. 非线性分析[M]. 北京: 科学出版社, 2011.