

# 不含4至7-圈且不含相交三角形的平面图的 ( $I, F$ )-分解

亢莹利

金华职业技术大学公共基础学院, 浙江 金华

收稿日期: 2026年5月13日; 录用日期: 2026年6月7日; 发布日期: 2026年6月16日

---

## 摘要

若一个图 $G$ 的顶点集可划分为两个部分, 其中一个部分为独立集而另一部分的诱导子图为森林, 则称 $G$ 是( $I, F$ )-可分解的。本文证明了任意不含4至7-圈且不含相交三角形的平面图是( $I, F$ )-可分解的。

## 关键词

平面图, ( $I, F$ )-分解, 超延拓, 权转移

---

# ( $I, F$ )-Partition of Planar Graphs Having Neither Cycles of Lengths from 4 to 7 nor Intersecting Triangles

Yingli Kang

General Education College, Jinhua University of Vocational Technology, Jinhua Zhejiang

Received: May 13, 2026; accepted: June 7, 2026; published: June 16, 2026

---

## Abstract

A graph is ( $I, F$ )-partitionable if its vertex set can be divided into two subsets such that one is an independent set and the other induces a forest. This paper proves that every planar graph having neither cycles of lengths from 4 to 7 nor intersecting triangles is ( $I, F$ )-partitionable.

## Keywords

Planar Graphs, ( $I, F$ )-Partition, Super-Extension, Discharging

---

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

本文所讨论的图均为有限简单图。长度为  $k$  的圈称为  $k$ -圈。若两个三角形恰好共用一个顶点，则称为相交三角形。

若一个图  $G$  的顶点集可划分为两个部分，其中一个为独立集而另一个的诱导子图为森林，则称  $G$  是  $(I, F)$ -可分解的。图  $G$  是 3-色可染是指其顶点集可划分为三个独立集。由定义可知，任意  $(I, F)$ -可分解图必定是 3-色可染的。因此，研究哪些平面图是  $(I, F)$ -可分解具有重要意义。

2001 年，Borodin 与 Glebov [1]证明了任意围长至少为 5 的平面图是  $(I, F)$ -可分解的。随后，Kawarabayashi 与 Thomassen [2]加强了该结果并提出如下猜想：

**猜想 1：**任意不含三角形的平面图是  $(I, F)$ -可分解的。

该猜想至今仍未被解决。2020 年，Liu 与 Yu [3]证明了任意不含 4、6、8-圈的平面图是  $(I, F)$ -可分解的。2025 年，Kang、Lu 和 Jin [4]加强了该结论，证明了任意不含 4-圈、6-圈和特殊 9-圈的平面图是  $(I, F)$ -可分解的。另一方面，2005 年 Borodin 等人[5]围绕 Steinberg 猜想证明了一个重要的平面图 3 色定理，即任意不含 4 至 7-圈的平面图是 3 色可染的。但该结论能否加强为  $(I, F)$ -可分解目前尚未可知，该问题受到学者们的广泛关注。

**猜想 2：**任意不含 4 至 7-圈的平面图是  $(I, F)$ -可分解的。

本文围绕猜想 2 进行研究，证明了如下结论：

**定理 1：**任意不含 4 至 7-圈且不含相交三角形的平面图是  $(I, F)$ -可分解的。

## 2. 超延拓定理及相关术语

图  $G$  的  $(I, F)$ -着色是指从顶点集  $V(G)$ 到颜色集合  $\{I, F\}$ 的一个映射，需满足：染颜色  $I$  的顶点构成独立集，染颜色  $F$  的顶点诱导出一个森林。因此，图的  $(I, F)$ -可着色与  $(I, F)$ -可分解具有相同的含义。染颜色  $F$  的顶点称为  $F$ -顶点，仅由  $F$ -顶点构成的路或圈分别称为  $F$ -路或  $F$ -圈。

给定平面图  $G$ ，在未定界面的边界上的顶点称为外顶点，其他顶点称为内顶点。给定  $G$  的一个  $(I, F)$ -染色，若顶点  $u$  和  $v$  满足如下条件之一，则称  $\{u, v\}$  是  $F$ -连通的。

(1) 存在  $u$  和  $v$  之间的  $F$ -路；

(2) 存在外顶点  $u'$  和  $v'$  (允许  $u' = v'$ )，使得  $u$  和  $u'$  之间存在  $F$ -路， $v$  和  $v'$  之间存在  $F$ -路，且这两条  $F$ -路是点不交的。

设  $H$  是图  $G$  的子图， $\phi$  是  $H$  的一个  $(I, F)$ -着色。若  $G$  的一个  $(I, F)$ -着色在  $H$  上的限制恰好为  $\phi$ ，且  $G-E(H)$  中不存在连接  $H$  中两个顶点的  $F$ -路，则称该着色为  $\phi$  到  $G$  的超延拓。对于  $S \subseteq V(G)$  或  $S \subseteq E(G)$ ，用  $G[S]$  表示  $S$  在  $G$  中的诱导子图。

**定理 2 (超延拓定理)：**设  $G$  是一个不含 4 至 7-圈且不含相交三角形的平面图，若  $G$  的未定界面的边界  $D$  是长度不超过 11 的圈，则  $G[V(D)]$  的任意  $(I, F)$ -着色均可超延拓至整个图  $G$ 。

本文将证明定理 2。定理 2 强于定理 1，原因如下：对于任意不含 4 至 7-圈且不含相交三角形的平面图  $G$ ，若  $G$  不含三角形，则  $G$  的围长至少为 5，由已知结论可知  $G$  是  $(I, F)$ -可分解的。下设  $G$  含有一个三角形  $T$ ，可将  $G$  重新嵌入平面使得  $G$  的未定界面的边界恰好为  $T$ 。则由定理 2 可知，任意  $T$  的  $(I, F)$ -着

色均可超延拓至图  $G$ , 得到  $G$  的  $(I, F)$ -着色。

接下来介绍本文需要的一些其他术语。给定一个平面图。3-面上的内 3-点称为坏 3-点。设  $k$  是一个正整数。 $8^+$ -面边界上由  $k$  个连续的坏 3-点组合的一条路称为坏  $k$ -路。若一条坏 4-路  $v_1v_2v_3v_4$  上的边  $v_1v_2$  和  $v_3v_4$  均关联一个 3-面, 则称  $v_1v_2v_3v_4$  为串。对于圈  $C$ , 用  $int(C)$  和  $ext(C)$  分别表示  $C$  内部与外部的顶点集合。若  $int(C)$  与  $ext(C)$  均非空, 则称  $C$  为分离圈。分别用  $d(v)$ 、 $d(f)$ 、 $|C|$  表示顶点  $v$  的度数、面  $f$  的边界圈长和圈  $C$  的长度。一个  $k$ -点、 $k^+$ -点和  $k^-$ -点分别指度数为  $k$ 、度数至少为  $k$  和度数至多为  $k$  的顶点, 关于圈和面作类似定义。

### 3. 定理 2 的证明

定理 2 的证明采用反证法。设  $G$  是定理 2 的一个极小反例, 满足  $|V(G)| + |E(G)|$  极小, 则存在  $G[V(D)]$  的一个  $(I, F)$ -着色  $\phi$ , 使得  $\phi$  不能超延拓至  $G$ 。记  $D$  为  $G$  的未定界面  $f_0$  的边界。接下来证明图  $G$  的一些结构性质。

**引理 1:**  $D$  无弦。

证明: 若  $D$  有一条弦  $e$ , 则  $e$  将图  $G$  划分成两个子图(均含  $e$ )。由  $G$  的极小性,  $\phi$  可分别超延拓至这两个子图, 从而形成  $\phi$  到  $G$  的一个超延拓, 矛盾。 ■

**引理 2:**  $G$  的任意内顶点的度数至少为 3。

证明: 若  $G$  含有一个度数至多为 2 的内顶点  $v$ , 则  $\phi$  可超延拓至  $G-v$ 。然后, 若  $v$  没有已染颜色  $I$  的邻点, 则给  $v$  染颜色  $I$ ; 否则, 给  $v$  染颜色  $F$ 。由此可得  $\phi$  在  $G$  的一个超延拓, 矛盾。 ■

**引理 3:**  $G$  不含有可分离的  $11^-$ -圈。

证明: 假设  $G$  含有可分离的  $11^-$ -圈  $C$ 。则  $\phi$  可超延拓至  $G-int(C)$ 。然后,  $C$  上的染色可超延拓至  $G-ext(C)$ , 从而得到  $\phi$  在  $G$  上的一个超延拓, 矛盾。 ■

**引理 4:**  $G$  是 2-连通的。特别地,  $G$  上所有面的边界均为圈。

证明: 假设  $G$  不是 2-连通的, 则  $G$  含有割点  $v$  及悬挂块  $B$ , 使得  $B-v$  与  $D$  点不交。首先, 将  $\phi$  超延拓至  $G-(B-v)$ 。接下来将说明  $v$  的颜色可延拓为  $B$  的  $(I, F)$ -染色, 从而得到  $\phi$  在  $G$  上的一个超延拓, 矛盾。

仅考虑平面图  $B$ 。设  $D_2$  是  $B$  的未定界面  $f_2$  的边界,  $v_1$  和  $v_2$  是  $v$  在  $D_2$  上的两个邻点。首先, 若  $v$  不与任何  $11^-$ -圈相关联, 则在  $v_1$  和  $v_2$  之间往  $f_2$  内添加一条长为 6 的路  $P$ 。则  $vv_1v_2$  与  $P$  形成一个 8-圈  $C$ 。容易验证,  $B+P$  是不含 4 至 7-圈且不含相交三角形的平面图。因此,  $v$  上的颜色可延拓为  $C$  的  $(I, F)$ -染色, 然后进一步超延拓至  $B+P$ , 得到  $B$  上的  $(I, F)$ -染色。其次, 若  $v$  与某个  $11^-$ -圈  $C$  相关联, 则  $v$  上的颜色可延拓为  $B[V(C)]$  的  $(I, F)$ -染色, 然后分别进一步超延拓至  $B-int(C)$  和  $B-ext(C)$ , 得到  $B$  上的  $(I, F)$ -染色。 ■

**引理 5:**  $G$  不含有串。

证明: 假设  $G$  含有串  $v_1v_2v_3v_4$ 。不妨假设  $G$  中存在  $8^+$ -面  $f$ , 其边界上含有路  $v_0v_1v_2v_3v_4v_5$ , 且存在 3-面  $[v_1t_{12}v_2]$  和  $[v_3t_{34}v_4]$ 。在  $G$  中进行如下操作, 所得图记作  $H$ : 删除顶点  $v_1, v_2, v_3, v_4$ , 并将  $v_0$  与  $t_{34}$  粘合。

首先, 将说明  $H$  是不含 4 至 7-圈且不含相交三角形的平面图(采用反证法)。如若不然, 因为  $G$  是不含 4 至 7-圈且不含相交三角形的平面图, 则上述图操作产生新的 4 至 7-圈或者产生新的相交三角形。接下来分两种情况讨论:

情况 1: 假设上述图操作产生新的 4 至 7-圈。则在  $G$  中,  $v_0v_1v_2v_3t_{34}$  包含在某个  $11^-$ -圈  $C$  上。若  $t_{12}$  不在  $C$  上, 则  $C$  是一个分离  $11^-$ -圈(分离了  $t_{12}$  和  $v_4$ ), 与引理 3 矛盾。因此,  $t_{12}$  必在  $C$  上。因为  $G$  不含 4 至 7-圈, 故圈  $C$  被两条弦  $t_{12}v_1$  和  $t_{12}v_2$  划分成一个 3-面和两个  $8^+$ -圈。由此可得,  $C$  的圈长至少为 15, 矛盾。

情况 2: 假设上述图操作产生新的相交三角形。类似于情况 1, 可以证明上述图操作不会产生新的三

角形。因此，新的相交三角形的交点必是由  $v_0$  与  $t_{34}$  粘合而来。则在  $G$  中， $[v_3t_{34}v_4]$  相交于另一个三角形，与  $G$  不含相交三角形这一已知条件矛盾。

其次，将说明  $D$  是  $H$  的未定面的边界且  $\phi$  是图  $H$  中  $D$  上的正常的  $(I, F)$ -染色。为此，只需验证对于两个粘点  $v_0$  与  $t_{34}$ ，若其中一个为外顶点，则另一个既不为外顶点，也不相邻于外顶点(反证法)。如若不然， $G$  必含有一条路  $P$  使得  $P$  的两端点均为外顶点， $P$  上边数为 4 或 5，且  $P$  包含  $v_0v_1v_2v_3t_{34}$ 。则  $P$  将  $D$  分成两个圈，记  $C$  为其中较小圈。因为  $|D| \leq 11$ ，故  $|C| \leq \frac{1}{2}(|D| + 5 \times 2) \leq 11$ 。类似于情况 1 的证明过程，无论  $t_{12}$  是否在  $C$  上，均能导出矛盾。

由  $G$  的极小性， $\phi$  可超延拓至  $H$  (所得染色仍记作  $\phi$ )。接下来进行染色的调整和补染，得到  $\phi$  在  $G$  上的超延拓。根据  $t_{12}$  和  $t_{34}$  的染色分以下四种情况讨论：

情况 1：假设  $\phi(v_0) = \phi(t_{34}) = I$  且  $\phi(t_{12}) = I$ 。则将顶点  $v_1, v_2, v_3, v_4$  均用颜色  $F$  补染即可。

情况 2：假设  $\phi(v_0) = \phi(t_{34}) = I$  且  $\phi(t_{12}) = F$ 。则将顶点  $v_1, v_2, v_3, v_4$  分别用颜色  $F, I, F, F$  补染即可。

情况 3：假设  $\phi(v_0) = \phi(t_{34}) = F$  且  $\phi(t_{12}) = I$ 。若  $\phi(v_5) = I$ ，则将顶点  $v_1, v_2, v_3, v_4$  分别用颜色  $F, F, I, F$  补染即可。若  $\phi(v_5) = F$ ，则将顶点  $v_1, v_2, v_3, v_4$  分别用颜色  $F, F, F, I$  补染即可。

情况 4：假设  $\phi(v_0) = \phi(t_{34}) = F$  且  $\phi(t_{12}) = F$ 。若  $\phi(v_5) = I$ ，则将顶点  $v_1, v_2, v_3, v_4$  分别用颜色  $I, F, I, F$  补染即可。因此，不妨假设  $\phi(v_5) = F$ 。若对于染色  $\phi$  和图  $G$ ，顶点对  $\{v_0, t_{12}\}$  和  $\{t_{12}, t_{34}\}$  均是  $F$ -连通的，则形成  $\phi$  下图  $H$  的一个  $F$ -圈，与  $\phi$  是图  $H$  的  $(I, F)$ -染色矛盾。因此， $\{v_0, t_{12}\}$  和  $\{t_{12}, t_{34}\}$  中至少有一个顶点对不是  $F$ -连通的。若  $\{v_0, t_{12}\}$  不是  $F$ -连通的，则将顶点  $v_1, v_2, v_3, v_4$  分别用颜色  $F, I, F, I$  补染即可。若  $\{t_{12}, t_{34}\}$  不是  $F$ -连通的，则将顶点  $v_1, v_2, v_3, v_4$  分别用颜色  $I, F, F, I$  补染即可。 ■

$G$  中顶点和面的初始权值函数  $ch$  的定义如下：

$$f(x) = \begin{cases} d(v) - 4, & v \in V(G); \\ d(f) - 4, & f \in F(G) \setminus f_0; \\ d(f) + 4, & f = f_0. \end{cases}$$

由欧拉公式  $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$  及握手定理  $\sum_{v \in V(G)} d(v) = \sum_{f \in F(G)} d(f) = 2|E(G)|$ ，可得：

$$\sum_{x \in V(G) \cup F(G)} ch(x) = \sum_{v \in V(G)} (d(v) - 4) + \sum_{f \in F(G)} (d(f) - 4) + 8 = 0.$$

让权值按如下规则进行转移：

R1：未定界面  $f_0$  给每个关联顶点转权  $4/3$ 。

R2：设  $f$  是一个  $8^+$ -面且  $f \neq f_0$ ， $v$  是  $f$  关联的一个顶点。

(1) 若  $d(v) = 2$ ，则  $f$  给  $v$  转权 2。

(2) 若  $v$  是一个内 3-点且关联一个 3-面，则  $f$  给  $v$  转权  $2/3$ 。

(3) 若  $v$  是一个内 3-点且不关联任何 3-面，则  $f$  给  $v$  转权  $1/3$ 。

(4) 若  $v$  是一个内 4-点且关联一个 3-面，且该 3-面不与  $f$  相邻，则  $f$  给  $v$  转权  $1/3$ 。

R3：任意  $3^+$ -点给每个关联的 3-面转权  $1/3$ 。

记  $ch$  为权值转移完成后  $G$  中顶点和面的最终权值函数。因为权值仅进行转移，权值总和并未增加或减少。故， $\sum_{x \in V(G) \cup F(G)} ch'(x) = \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} ch(x) = 0$ 。

而另一方面，我们将通过以下 3 个论断说明对于任意  $x \in V(G) \cup F(G)$ ，有  $ch'(x) \geq 0$  并且  $ch'(f_0) > 0$ ，矛盾。故而定理 2 得证。

**论断 1：** 对于任意  $v \in V(G)$ ，有  $ch'(v) \geq 0$ 。

证明：由引理 3， $G$  中所有三角形均为 3-面。设  $k$  为  $v$  所关联的 3-面个数。因为  $G$  不含相交三角形， $k \leq 1$ 。因为  $G$  不含 4 至 7-圈， $v$  所关联的其他面均为  $8^+$ -面。

假设  $d(v) = 2$ 。由引理 2， $v$  为外顶点。由引理 1 知  $D$  无弦，因此  $v$  关联的另一个面(非  $f_0$ )不是 3-面。因此，根据 R1 和 R2(1)， $v$  从两个关联的面分别得权  $\frac{4}{3}$  和  $\frac{2}{3}$ 。故， $ch'(v) = d(v) - 4 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 0$ 。

假设  $v$  为外  $3^+$ -点。则根据 R1 和 R3， $v$  从  $f_0$  得权  $\frac{4}{3}$ ，且  $v$  给每个关联的 3-面转权  $\frac{1}{3}$ 。故  
 $ch'(v) = d(v) - 4 + \frac{4}{3} - \frac{1}{3}k \geq 0$ 。

假设  $v$  为内 3-点。若  $k = 0$ ，则根据 R2(1)， $v$  从每个关联的面得权  $\frac{1}{3}$ 。故， $ch'(v) = d(v) - 4 + \frac{1}{3} \times 3 = 0$ 。  
 若  $k = 1$ ，则根据 R2(2)和 R3， $v$  从两个关联的  $8^+$ -面各得权  $\frac{2}{3}$ ，且  $v$  给关联的那个 3-面转权  $\frac{1}{3}$ 。故，  
 $ch'(v) = d(v) - 4 + \frac{2}{3} \times 2 - \frac{1}{3} = 0$ 。

假设  $v$  为内 4-点。若  $k = 0$ ，则  $v$  没有任何权值转入或者转出。故， $ch'(v) = d(v) - 4 = 0$ 。若  $k = 1$ ，则根据 R2(4)和 R3， $v$  从关联的一个  $8^+$ -面得权  $\frac{1}{3}$ ，而  $v$  给关联的那个 3-面转权  $\frac{1}{3}$ 。故，

$$ch'(v) = d(v) - 4 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0。$$

假设  $v$  为内  $5^+$ -点。则  $v$  仅给关联的 3-面转权。根据 R3， $ch'(v) \geq d(v) - 4 - \frac{1}{3}k > 0$ 。 ■

**论断 2:** 对于任意  $f \in F(G) \setminus f_0$ ，有  $ch'(f) \geq 0$ 。

证明：若  $d(f) = 3$ ，则根据 R3， $f$  从每个关联的顶点得权  $\frac{1}{3}$ 。故， $ch'(f) \geq d(f) - 4 + \frac{1}{3} \times 3 = 0$ 。因为  $G$  不含 4 至 7-圈，接下来不妨设  $d(f) \geq 8$ 。

对于  $i \in \{0, 1, 2\}$ ，设  $a_i$  为  $f$  所关联的顶点中会从  $f$  得权  $\frac{i}{3}$  的顶点个数。由权转移规则可知， $d(f) = a_0 + a_1 + a_2$ ，且

$$ch'(f) \geq d(f) - 4 - \frac{1}{3}a_1 - \frac{2}{3}a_2 \geq \frac{1}{3}d(f) - 4 + \frac{2}{3}a_0 + \frac{1}{3}a_1。$$

因此，若  $2a_0 + a_1 \geq 12 - d(f)$ ，则  $ch'(f) \geq 0$ ，得证。接下来只需验证  $2a_0 + a_1 \geq 12 - d(f)$  成立即可。

若  $|V(f) \cap V(D)| \geq 2$ ，则  $f$  含有至少 2 个外  $3^+$ -点，故  $a_0 \geq 2$ 。又因为  $d(f) \geq 8$ ，故  $2a_0 + a_1 \geq 12 - d(f)$ ，得证。接下来不妨设  $|V(f) \cap V(D)| \leq 1$ 。

在此情况下， $f$  没有 2-点。因此， $a_2$  即为  $f$  上坏 3-点的顶点个数。记  $f = [u_1 u_2 \cdots u_k]$ 。由引理 5 可知：(1)  $f$  不含坏 5-路；(2) 若  $f$  含坏 4-路  $u_2 u_3 u_4 u_5$ ，则  $f$  均不给  $u_1$  和  $u_6$  转权，故  $a_0 \geq 2$ ，得证。因此，接下来不妨设  $f$  不含坏 4-路。

在此情况下， $f$  含有至少  $\frac{d(f)}{4}$  个非坏 3-点，即  $a_0 + a_1 \geq \frac{d(f)}{4}$ 。因此，若  $d(f) \geq 9$ ，则  $2a_0 + a_1 \geq \frac{d(f)}{4} \geq 12 - d(f)$ ，得证。因此，接下来不妨设  $d(f) = 8$ 。

在此情况下， $f$  含有至多两条坏 3-路。若  $f$  含有两条坏 3-路，不妨设为  $u_1 u_2 u_3$  和  $u_5 u_6 u_7$ ，则  $f$  均不给  $u_4$  和  $u_8$  转权，故  $a_0 \geq 2$ ，得证。若  $f$  含有恰好一条坏 3-路，不妨设为  $u_1 u_2 u_3$ ，则  $u_4$  和  $u_8$  中至少有一个顶点不从  $f$  得权，并且  $f$  含有至少 3 个非坏 3-点，故  $2a_0 + a_1 \geq 4$ ，得证。 ■

**论断 3:**  $ch'(f_0) > 0$ 。

证明: 根据 R1, 面  $f_0$  给每个关联的顶点转权  $\frac{4}{3}$ , 故  $ch'(f_0) \geq d(f_0) + 4 - \frac{4}{3} \times d(f_0) = \frac{1}{3}(12 - d(f))$ 。因为  $d(f_0) \leq 11$ , 代入上式可得  $ch'(f_0) > 0$ 。 ■

定理 2 证毕。

## 4. 总结与展望

本文探讨平面图  $(I, F)$ -分解问题。受 Steinberg 猜想相关研究的驱动, 本文证明了任意不含 4 至 7-圈且不含相交三角形的平面图是  $(I, F)$ -可分解。本文在证明方法上首先建立合适的延拓定理, 然后探讨定理的极小反例的结构性质, 特别是关于三角形和小度点的可约构型, 最后采用权转移方法完成证明。后续研究可进一步探讨是否任意不含 4 至 7-圈的平面图是  $(I, F)$ -可分解。关于该问题, 研究的关键点在于探寻有关相交三角形的可约构型, 建立相应的结构性质。此外, 发展  $(I, F)$ -染色的补染技巧和优化权转移策略也将为问题的解决提供有效思路。

## 基金项目

本文受浙江省自然科学基金项目资助, 项目编号为 LY22A010016。

## 参考文献

- [1] Borodin, O.V. and Glebov, A.N. (2001) On the Partition of a Planar Graph of Girth 5 into an Empty and an Acyclic Subgraph, *Diskretn. Diskretni analiz i issledovanie operatsii*, **8**, 34-53. (In Russian)
- [2] Kawarabayashi, K. and Thomassen, C. (2009) Decomposing a Planar Graph of Girth 5 into an Independent Set and a Forest. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **99**, 674-684. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2008.11.002>
- [3] Liu, R. and Yu, G. (2020) Planar Graphs without Short Even Cycles Are Near-Bipartite. *Discrete Applied Mathematics*, **284**, 626-630. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2020.04.017>
- [4] Kang, Y., Lu, H. and Jin, L. (2025)  $(I, F)$ -partition of Planar Graphs without Cycles of Length 4, 6, or 9. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **45**, 129-150. <https://doi.org/10.7151/dmgt.2523>
- [5] Borodin, O.V., Glebov, A.N., Raspaud, A. and Salavatipour, M.R. (2005) Planar Graphs without Cycles of Length from 4 to 7 Are 3-Colorable. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **93**, 303-311. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2004.11.001>