Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2026, 15(6), 62-67
Published Online June 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.156266

Hans汉斯

函数列积分极限问题的多种解法与比较分析

龙厚权，朱永婷*

国防科技大学外国语学院，江苏 南京

收稿日期：2026年5月4日；录用日期：2026年5月29日；发布日期：2026年6月5日

摘　要

本文以一道典型的函数列积分极限试题为研究对象，系统给出六种求解方法，分别基于夹逼准则、换元变形、分部积分递推、积分第一与第二中值定理、柯西–施瓦茨不等式及勒贝格控制收敛定理。通过对各方法的思路解析、知识点梳理与思维层次分析，展现一题多解在深化微积分理解、拓展解题思路中的作用。进一步探讨了方法的一般化推广与变式问题求解，并通过多维度对比表格进行系统比较，为函数列积分极限的学习与教学提供参考。

关键词

函数列积分极限，一题多解，数学竞赛

Multiple Solutions and Comparative Analysis of the Limit Problem of Integral of Function Sequence

Houquan Long, Yongting Zhu*

College of International Studies, National University of Defense Technology, Nanjing Jiangsu

Received: May 4, 2026; accepted: May 29, 2026; published: June 5, 2026

Abstract

Taking a typical test question of the limit of integral of function sequence as the research object, this paper systematically presents six solving methods, which are respectively based on the squeeze theorem, substitution transformation, integration by parts recursion, the first and second mean value theorems for integrals, Cauchy-Schwarz inequality and Lebesgue dominated convergence theorem. Through the analysis of ideas, knowledge points and thinking levels of each method, this

*通讯作者。

文章引用：龙厚权，朱永婷. 函数列积分极限问题的多种解法与比较分析[J]. 应用数学进展, 2026, 15(6): 62-67.
DOI: 10.12677/aam.2026.156266

paper demonstrates the role of multiple solutions to one problem in deepening the understanding of calculus and expanding problem-solving ideas. It further discusses the generalization of methods and the solution of variant problems, and conducts a systematic comparison through a multi-dimensional comparison table, providing reference for the learning and teaching of the limit of integral of function sequence.

Keywords

Limit of Integral of Function Sequence, Multiple Solutions to One Problem, Mathematics Competition

1. 题目呈现

函数列积分极限是高等数学、数学分析及大学生数学竞赛中的常见题型，其求解方法往往涉及微积分、不等式、实变函数等多个知识模块，能有效考查解题者的知识掌握程度与思维灵活性。

第十七届全国大学生数学竞赛决赛非数学 B 组试题中，有这样一道典型题目：

试题[1] 设数列 $a_n=\int_0^1 x^n e^x dx\ (n=0,1,2,\cdots)$，求 $\lim_{n\to\infty} a_n$。

该问题看似简洁，却可通过多种方法求解，不同方法依托不同的数学理论，体现了从基础微积分到现代分析的知识层级递进。本文以此题为例，系统梳理六种解法，分析其知识点与适用场景，并探讨一题多解在教学中的价值[2]-[4]。

2. 六种解法呈现

解法 1 [5] [6]应用单调性和夹逼准则解答

因为 e^x 在 $[0,1]$ 上连续且单调递增，故

$$1\le e^x\le e,\ \ x\in[0,1]$$

由定积分的保序性，

$$0\le\int_0^1 x^n dx\le a_n\le e\int_0^1 x^n dx=\frac{e}{n+1}$$

由夹逼准则即得

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0$$

注 1 本解法是最朴素的直接估值思维，核心是利用函数有界性对被积函数整体放缩，属于低年级微积分的基础工具。优点是思路直观、计算量极小、逻辑清晰，是考场与教学中的首选标准解法；缺点是依赖被积函数的整体有界性，对无界或振荡剧烈的函数难以适用，思维层次偏基础，仅完成极限判定，不涉及更精细的结构分析。

解法 2 应用换元法变形解答[5]

对原积分做变量替换简化结构，令 $t=x^{n+1}$，则 $x=t^{\frac{1}{n+1}}$， $dx=\frac{1}{n+1}t^{-\frac{n}{n+1}}dt$，代入得

$$a_n=\int_0^1 e^{t^{\frac{1}{n+1}}}\cdot t^{\frac{n}{n+1}}\cdot\frac{1}{n+1}t^{-\frac{n}{n+1}}dt=\frac{1}{n+1}\int_0^1 e^{t^{\frac{1}{n+1}}}dt$$

因为 $1\le e^{t^{\frac{1}{n+1}}}\le e$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$，由有界乘无穷小得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

注 2 本解法体现积分变形思维，通过换元将原式转化为更简洁的形式，有界乘无穷小收尾。换元本身不直接给出极限，但能清晰揭示积分结构，是从直接估值到技巧处理的自然过渡，思路朴实、易于理解。

解法 3 应用分部积分构造递推关系解答[5]

对 a_n 分部积分，令 $u=e^x$，$d\upsilon=x^n dx$，则

$$a_n=\left.\frac{e^x x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1-\frac{1}{n+1}\int_0^1 e^x x^{n+1}dx=\frac{e}{n+1}-\frac{1}{n+1}a_{n+1}$$

由于在区间 $x\in[0,1]$ 上，被积函数 $e^x x^n\ge 0$ 且不恒为零，故数列 $\{a_n\}$ 恒为正，即 $a_n>0$。因此，

$$0<a_n=\frac{e}{n+1}-\frac{1}{n+1}a_{n+1}\le\frac{e}{n+1}$$

令 $n\to\infty$，即得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

注 3 本解法体现构造递推思维，不再被动放缩，而是主动通过分部积分建立 a_n 与 a_{n+1} 的关联，属于技巧性更强的中层分析思维。优点是不仅能得到极限，还能给出 a_n 的阶估计，可推广到更一般的 $\int_0^1 f(x)x^n dx$ 型问题；缺点是对分部积分的选取与递推不等式处理有一定技巧要求，不如夹逼法直接，思维门槛高于基础估值，但仍属于经典微积分框架。

解法 4 应用积分第一中值定理解答[2] [7]

积分第一中值定理的定义为：如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上不变号，并且 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是可积的，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使下式成立

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

对本题中的积分 $a_n=\int_0^1 x^n e^x dx$，取 $f(x)=e^x$，$g(x)=x^n$。由于 e^x 在 $[0,1]$ 上连续有界，x^n 在 $[0,1]$ 上非负不变号，故由积分第一中值定理，存在 $\xi_n\in(0,1)$，使得

$$a_n=e^{\xi_n}\int_0^1 x^n dx$$

计算 $\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$，因此

$$a_n=\frac{e^{\xi_n}}{n+1}$$

由于 $\xi_n\in(0,1)$，故 e^{ξ_n} 是有界量，而 $\frac{1}{n+1}\to 0\ (n\to\infty)$，由有界量与无穷小的乘积仍为无穷小量，得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

需要注意的是，若误将 x^n 作为被提取的函数，写成 $a_n=\xi_n^n\int_0^1 e^x dx$，则因 ξ^n 可能趋近于 1 (例如取

$\xi^n=1-\frac{1}{n}$时，$\xi_n^n\to\frac{1}{\mathrm{e}}\neq 0$)，无法直接得到极限为 0 的结论。

注 4 本解法是中值简化思维，本质是夹逼准则的升级方法，用中值定理把连续有界因子从积分中提取出来。优点是步骤更精炼、形式更优雅，体现对积分结构的敏锐识别；缺点是适用条件更严格，第一中值定理要求被积函数可拆为“连续函数 × 不变号函数”，第二中值定理要求被积函数可拆为“单调函数 × 可积函数”通用性略弱于夹逼准则，思维层次介于基础方法与构造性方法之间。

解法 5 应用柯西－施瓦兹不等式构造上下界解答[7]

由积分形式的柯西－施瓦兹不等式，若 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则

$$\left[\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\le\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g^2(x)\mathrm{d}x$$

取 $f(x)=\mathrm{e}^x$，$g(x)=x^n$，得

$$a_n^2\le\left(\int_0^1\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 x^{2n}\mathrm{d}x\right)=\frac{\mathrm{e}^2-1}{2}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

因此

$$0\le a_n\le\sqrt{\frac{\mathrm{e}^2-1}{2(2n+1)}}\to 0\quad(n\to\infty)$$

注 5 本解法不再对被积函数逐点估计，而是依托经典不等式，将积分表达式视为函数空间中元素的内积形式，属于更具普遍性的分析技巧。优点是不依赖单调性与中值条件，适用面更广；缺点是放缩往往偏松，只能得到极限存在性，难以给出精确阶，思维层次高于基础估值，但仍属于经典分析工具。

解法 6 应用勒贝格控制收敛定理解答[8]

首先考虑函数列 $f_n(x)=x^n\mathrm{e}^x$ 在区间 $[0,1]$ 上的收敛性：对任意 $x\in[0,1)$，当 $n\to\infty$ 时，$x^n\to 0$，故 $f_n(x)\to 0$；仅在 $x=1$ 处，$f_n(1)=\mathrm{e}$，不收敛于 0，但该单点为零测集，不影响数列在 $[0,1]$ 上的几乎处处收敛性，即

$$f_n(x)\xrightarrow{a.e.}0$$

其次，构造控制函数 $g(x)=\mathrm{e}$，对所有 n 及 $x\in[0,1]$，有

$$|f_n(x)|=|x^n\mathrm{e}^x|\le\mathrm{e}^x\le\mathrm{e}=g(x)$$

常数函数 $g(x)=\mathrm{e}$ 在 $[0,1]$ 上显然可积。根据勒贝格控制收敛定理，极限运算与积分运算可交换顺序，因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty}x^n\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=0$$

注 6 本解法是五种方法中理论层次最高的一种，它不再先求积分再取极限，而是直接回答“为何可以交换极限与积分”这一问题。优点是普适性极强，对更一般的函数列极限问题统一适用；缺点是知识门槛高，超出低年级微积分范围，在非数学类竞赛中若不注明条件易显不够严谨，体现从具体计算到抽象理论的最高阶递进。

3. 变式拓展

原题的成功解决很大程度上依赖于被积函数 e^x 的连续有界性以及积分区间 $[0,1]$ 较为简单。本节探讨将特殊函数 e^x 替换为一般连续函数 $f(x)$，或改变积分区间时，六种解法的有效性如何变化，并通过变式

问题引导读者思考最优解法的选择。

若将原题直接推广为 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续。由 $|f(x)|\le M$，夹逼准则直接给出 $\left|\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x\right|\le \dfrac{M}{n+1}\to 0$，依然是最直接的方法；换元、中值定理及控制收敛定理同样适用。但当问题变为带权重的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x$ 时，精度要求陡然升高[1]。此时夹逼准则只能得到有界性，难以提取精确极限；而分部积分递推或积分第二中值定理则可深入分析阶的结构。例如，若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微，由分部积分

$$n\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=\frac{n}{n+1}f(1)-\frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)\mathrm{d}x\to f(1)$$

恰能得出精确值。这说明方法的选择必须与问题对信息深度的需求相匹配。

为具体起见，提出以下变式问题：

(1) 求极限 $L_1=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\ln(1+x)\mathrm{d}x$；

(2) 求极限 $L_2=\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n\ln(1+x)\mathrm{d}x$。

对于 L_1，因 $|\ln(1+x)|\le\ln 2$，夹逼准则一步到位给出 0，当属最优。对于 L_2，夹逼无法获得精确值，而利用分部积分有

$$n\int_0^1 x^n\ln(1+x)\mathrm{d}x=\frac{n}{n+1}\ln 2-\frac{n}{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x\to\ln 2$$

此时分部积分为最优解。读者可尝试用其他方法求解 L_2，对比所获得的信息量与推导效率，从而体会在不同目标下选择恰当工具的重要性。

若进一步改变积分区间，例如考虑 $\int_0^a x^n f(x)\mathrm{d}x$，其中 $a>0$，通过放缩 $t=\dfrac{x}{a}$ 即可化为 $[0,1]$ 上的问题，各方法的适用性与原问题一致，不加赘述。

4. 方法总结

以上六种解法与推广探讨共同揭示了一条由浅入深、由算到理的学习路径。夹逼准则以其直观性和低门槛成为基础首选；换元与分部积分体现了变形与构造的技巧；中值定理和积分不等式展现了以点代面和整体估计的思想；勒贝格控制收敛定理则将极限与积分的交换上升为一般原理。不同方法适用于不同情境，且在“仅得极限”与“可得阶估计”之间存在本质差异。为帮助读者系统回顾和比较，表 1 从理论基础、适用条件、信息量、普适性和思维特点五个维度进行横向对比。

Table 1. Multi-dimensional comparison of six solution methods
表 1. 六种解法多维度对比

方法	理论基础	适用条件	信息量	普适性	思维特点
夹逼准则	数列极限	被积函数有界，可整体放缩为幂函数积分	仅得极限	较弱	直接整体放缩，直观简洁
换元变形	积分换元法	可通过代换分离参数，简化积分结构	仅得极限	一般	变形化简，揭示结构特征
分部积分递推	分部积分法	被积函数可微且递推关系可控	可以得阶估计	较强	主动构造递推，深入阶的分析

续表

积分第一中值定理	积分中值定理	连续函数 × 不变号函数	仅得极限	较弱	中值点提取，简化积分形式
柯西－施瓦茨不等式	积分不等式	被积函数平方可积	仅得极限	较强	内积估计，摆脱逐点限制
勒贝格控制收敛定理	实变函数论	几乎处处收敛且存在可积控制函数	仅得极限	极强	极限积分交换，统一抽象框架

通过表 1 可以清晰看出，若目标仅为证明极限为零，夹逼准则或控制收敛定理最为省力；若需揭示收敛速率或得到非零极限，分部积分等构造性方法价值凸显。在实际学习和竞赛中，建议读者先以直观方法建立直觉，再根据问题精度要求选择层次适宜的工具，实现从“会做”到“会选”的跨越。

基金项目

国防科技大学第三批校级规划课程。

参考文献

[1] 大学生数学竞赛网站[EB/OL]. http://www.cmathc.cn/, 2026-05-05.

[2] 魏光美. 一道积分极限题的七种解法[J]. 高等数学研究, 2022, 25(6): 41-42+50.

[3] 肖左键, 朱永婷. 一道大学生数学竞赛决赛试题的四种解法[J]. 应用数学进展, 2026, 15(1): 1-5.

[4] 张光威, 朱永婷. 一道二阶线性微分方程题目的多种解法及思想方法的意义[J]. 应用数学进展, 2025, 14(2): 410-417.

[5] 同济大学数学系. 高等数学(上册) [M]. 第 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[6] 邢家省, 杨义川, 王拥军. 函数列的黎曼积分的极限定理及其应用[J]. 四川理工学院学报(自然科学版), 2017, 30(3): 73-78.

[7] 华东师范大学数学系. 数学分析(上册) [M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[8] 周民强. 实变函数论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2018.