

# 基于修正数值通量的HWENO高精度有限体积方法

史杰卫, 刘红霞

太原理工大学数学学院, 山西 晋中

收稿日期: 2026年5月23日; 录用日期: 2026年6月17日; 发布日期: 2026年6月23日

## 摘要

本文为双曲守恒律方程构造了一种改进的通用数值通量, 并发展了一类新型高阶有限体积格式。传统 Godunov 格式基于分段常数近似与黎曼求解器计算界面通量, 虽具备守恒性与间断捕捉能力, 但仅为一阶精度, 数值耗散显著, 难以兼顾光滑区域的分辨率要求。为此, 本文在 Godunov 格式框架基础上, 采用分段二次多项式重构单元解, 并通过守恒约束与插值条件确定多项式系数, 突破低阶格式的精度局限。同时, 引入 Hermite Weighted Essentially Non-Oscillatory (HWENO) 方法对守恒变量进行高阶重构, 结合 HWENO 限制器实现导数近似, 辅以 SSP Runge-Kutta 方法完成时间离散, 构建了完整的高阶格式体系。对经典基准算例的数值精度测试结果表明, 所提格式适用于标量守恒律方程与欧拉方程的求解, 在光滑区域可稳定达到理论五阶收敛精度, 展现出优异的高阶近似性能。

## 关键词

双曲守恒律, 有限体积法, 高精度, HWENO 格式

# High-Order HWENO Finite Volume Method Based on Modified Numerical Flux

Jiewei Shi, Hongxia Liu

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi

Received: May 23, 2026; accepted: June 17, 2026; published: June 23, 2026

## Abstract

This paper constructs an improved general numerical flux and develops a new class of high-order finite volume schemes for hyperbolic conservation laws. The traditional Godunov scheme computes the interface flux based on piecewise constant approximation and Riemann solvers. Although it

satisfies conservation and possesses good shock-capturing capability, it is only first-order accurate with requirements in smooth regions. To address this limitation, based on the Godunov framework, this paper reconstructs the cell solution using piecewise quadratic polynomials, with coefficients determined by conservation constraints and interpolation conditions, thereby overcoming the accuracy limitations of low-order schemes. Meanwhile, the Hermite Weighted Essentially Non-Oscillatory (HWENO) method is introduced for high-order reconstruction of conservative variables. Combined with HWENO limiters for derivative approximation and the SSP Runge-Kutta method for time discretization, a complete high-order scheme system is established. Numerical accuracy tests on classical benchmark problems show that the proposed scheme is applicable to solving scalar conservation laws and Euler equations, stably achieving the theoretical fifth-order convergence accuracy in smooth regions, and demonstrating excellent high-order approximation performance.

## Keywords

Hyperbolic Conservation Laws, Finite Volume Method, High-Order Accuracy, HWENO Scheme

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

双曲守恒律是描述流体运动、气体动力学等诸多物理过程的核心方程, 因强非线性易产生激波、间断等复杂结构, 难以求解解析解, 数值模拟成为主要研究手段。传统数值格式难以同时兼顾间断捕捉稳定性与模拟精度, 普遍存在数值振荡或耗散过大的缺陷。随着工程领域对多尺度复杂流动模拟要求不断提高, 研发高精度、低耗散、强稳定的高阶数值格式, 成为双曲守恒律数值计算的研究重点[1] [2]。

双曲守恒律数值方法持续向高精度、低耗散方向发展, 经典 Godunov [3]格式奠定了守恒型间断捕捉算法基础, 但仅为一阶精度且耗散明显。基于 TVD 理论发展的 ENO 格式[4]-[6]通过自适应模板选取实现高阶无振荡计算, 后续 WENO 格式[7] [8]以加权组合多模板信息的方式进一步提升计算精度与鲁棒性, 成为主流高阶数值方法。HWENO 格式[9] [10]结合埃尔米特插值优势, 同步利用函数值与导数值参与重构, 可在紧致模板下实现高精度计算, 对细微观流动结构捕捉能力更强。经过多年优化完善, 各类改进 HWENO 格式不断被提出, 有效弥补了传统方法的不足, 但复杂强间断问题下的计算稳定性与精度仍有优化空间[11]-[13]。

本文研究双曲守恒律的高阶有限体积数值方法, 以完善守恒律方程求解理论、提升数值模拟精度与可靠性为目标。理论层面, 本文完善高阶有限体积格式的构造框架, 深入分析非线性加权机制与限制器在高精度重构中的作用机理, 可为同类高阶守恒型算法的设计与优化提供理论参考与技术支撑。针对传统 Godunov 格式精度低、数值耗散偏大的不足, 本文在有限体积框架下采用分段二次多项式实现解的高阶空间重构, 利用单元平均值约束与插值条件确定多项式系数, 从构造上提升格式的逼近精度。在此基础上, 对守恒变量采用 HWENO 非线性自适应加权策略, 根据局部解的光滑程度自适应调整模板权重, 并引入 HWENO 限制器[14]。对导数项进行约束与修正, 在保证光滑区域高阶精度的同时, 有效抑制非物理振荡, 全面提升格式的计算精度、数值稳定性与整体计算效率。

全文共分为五部分: 第 1 节介绍研究背景与国内外研究现状, 阐明研究意义与主要研究内容; 第 2 节构造双曲守恒律方程的新型有限体积离散格式, 并对格式的基本性质与精度进行理论分析; 第 3 节详细阐述 HWENO 高阶重构方法与限制器的构造原理及实现过程; 第 4 节通过多类经典光滑解算例开展数

值实验, 重点验证格式的收敛精度与数值性能; 第 5 节对全文工作进行系统总结, 分析研究中存在的不足, 并对未来可拓展的研究方向进行展望。

## 2. 高阶修正数值通量构造与格式分析

本节首先从一维线性对流方程出发, 介绍有限体积方法的基本框架与 Godunov 格式的构造流程。在此基础上, 采用分段二次多项式替代传统分段常数重构, 推导得到高阶有限体积离散格式, 并给出相应的修正数值通量。随后将一维标量情形推广至非线性守恒律方程与双曲守恒律方程组, 最终形成适用于多维问题的统一高阶有限体积格式。

一维线性方程

$$u_t + au_x = 0, \tag{1}$$

其中  $u$  是空间变量  $x$  及时间  $t$  的函数,  $a > 0$ 。我们采用均匀网格点  $\{x_{i+1/2}\}$  等分空间域, 用  $\{t_n\}$  等分空间域。

单元格  $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ ; 符号  $\Delta x$  表示单元长度, 即  $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ ;  $x_i$  表示单元格  $I_i$  的单元中心, 即  $x_i = x_{i-1/2} + \Delta x/2$ ; 符号  $\Delta t$  表示时间间隔, 即  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ 。定义  $u$  在时刻  $t_n$  时每个单元格上  $I_i$  的单元平均值为

$$\bar{u}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} u(x, t_n) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N. \tag{2}$$

Godunov 方法是求解双曲守恒律方程的经典一阶有限体积格式, 流程为: 用当前时刻的单元平均值, 构造单元内为常数的分段函数; 以该分段函数为初值, 在一个时间步内求解双曲守恒律方程; 对得到的新时刻连续解, 重新计算各单元平均值, 更新离散数据, 完成一个时间步循环。为推广该方法, 以获得高阶精度, 我们仅在第一步用分段二次多项式取代分段常数函数, 其余步骤同原 Godunov 方法相同。这个分段二次多项式应当满足在单元  $I_i$  上的单元平均值等于  $\bar{u}_i^n$ 。可以得到如下的格式:

$$\begin{aligned} \bar{u}_i^{n+1} = & \bar{u}_i^n - \lambda(\bar{u}_i^n - \bar{u}_{i-1}^n) - \frac{1}{2} \lambda(1 - \lambda)(\bar{u}_i^n - 2\bar{u}_{i-1}^n + \bar{u}_{i-2}^n) \\ & - \frac{1}{6} \lambda(\lambda - 1)(2\lambda - 1)(\bar{u}_{i+1}^n - 3\bar{u}_i^n + 3\bar{u}_{i-1}^n - \bar{u}_{i-2}^n). \end{aligned} \tag{3}$$

这个格式可以看作 Beam-Warming (B-W) 格式加一个修正项。接下来我们将证明这是一个三阶格式。利用 Taylor 展开, 可以得到

$$\bar{u}_{i-2}^n = u(x_i, t_n) - 2\Delta x u_x(x_i, t_n) + \frac{49\Delta x^2}{24} u_{xx}(x_i, t_n) - \frac{17\Delta x^3}{12} u_{xxx}(x_i, t_n) + O(\Delta x^4), \tag{4}$$

$$\bar{u}_{i-1}^n = u(x_i, t_n) - \Delta x u_x(x_i, t_n) + \frac{13}{24} \Delta x^2 u_{xx}(x_i, t_n) - \frac{5}{24} \Delta x^3 u_{xxx}(x_i, t_n) + O(\Delta x^4), \tag{5}$$

$$\bar{u}_i^n = u(x_i, t_n) + \frac{1}{24} \Delta x^2 u_{xx}(x_i, t_n) + O(\Delta x^4), \tag{6}$$

$$\bar{u}_{i+1}^n = u(x_i, t_n) + \Delta x u_x(x_i, t_n) + \frac{13}{24} \Delta x^2 u_{xx}(x_i, t_n) + \frac{5}{24} \Delta x^3 u_{xxx}(x_i, t_n) + O(\Delta x^4). \tag{7}$$

代入(3)式右端计算得到

$$RHS = \bar{u}_i^n - \lambda \Delta x u_x(x_i, t_n) + \frac{\lambda^2 \Delta x^2}{2} u_{xx}(x_i, t_n) - \frac{\lambda(1 + 4\lambda^2) \Delta x^3}{24} u_{xxx}(x_i, t_n) + O(\Delta x^4). \tag{8}$$

由方程(1)可以得到

$$u_t = -au_x, \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u_{ttt} = -a^3 u_{xxx}.$$

根据以上 3 个式子, 求得(3)式左边为

$$\begin{aligned} LHS &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t_{n+1}) dx \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left( u(x, t_n) + \Delta t u_t(x, t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}(x, t_n) + \frac{\Delta t^3}{6} u_{ttt}(x, t_n) \right) dx + O(\Delta x^4) \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t_n) dx + \frac{\Delta t}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_t(x, t_n) dx + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_{tt}(x, t_n) dx \\ &\quad + \frac{\Delta t^3}{6\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_{ttt}(x, t_n) dx + O(\Delta x^4) \\ &= \bar{u}_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_x(x, t_n) dx + \frac{a^2\Delta t^2}{2\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_{xx}(x, t_n) dx \\ &\quad + \frac{a^3\Delta t^3}{6\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_{xxx}(x, t_n) dx + O(\Delta x^4) \\ &= \bar{u}_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} \left( \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left( u_x(x_i, t_n) + u_{xx}(x_i, t_n)(x-x_i) + \frac{1}{2} u_{xxx}(x_i, t_n)(x-x_i)^2 \right) dx + O(\Delta x^5) \right) \\ &\quad + \frac{a^2\Delta t^2}{2\Delta x} \left( \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (u_{xx}(x_i, t_n) + u_{xxx}(x_i, t_n)(x-x_i)) dx + O(\Delta x^3) \right) \\ &\quad - \frac{a^3\Delta t^3}{6\Delta x} \left( \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_{xxx}(x_i, t_n) dx + O(\Delta x^3) \right) \\ &= \bar{u}_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} \left( \Delta x u_x(x_i, t_n) + \frac{1}{24} \Delta x^3 u_{xxx}(x_i, t_n) + O(\Delta x^5) \right) \\ &\quad + \frac{a^2\Delta t^2}{2\Delta x} \left( \Delta x u_{xx}(x_i, t_n) + O(\Delta x^3) \right) - \frac{a^3\Delta t^3}{6\Delta x} \left( \Delta x u_{xxx}(x_i, t_n) + O(\Delta x^3) \right) \\ &= \bar{u}_i^n - \lambda \Delta x u_x(x_i, t_n) + \frac{\lambda^2 \Delta x^2}{2} u_{xx}(x_i, t_n) - \frac{\lambda(1+4\lambda^2)\Delta x^3}{24} u_{xxx}(x_i, t_n) + O(\Delta x^4). \end{aligned} \quad (9)$$

忽略  $O(\Delta x^4)$ , (8)和(9)有完全相同的前 4 项, 这就证明了格式(3)是 3 阶的。

将格式(3)写成守恒形式:

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{f}_{i+1/2} - \hat{f}_{i-1/2}), \quad (10)$$

其中  $\hat{f}_{i+1/2}$  是数值通量, 其值为

$$\hat{f}_{i+1/2} = a\bar{u}_i^n + \frac{1}{2}a(1-\lambda)(\bar{u}_i^n - \bar{u}_{i-1}^n) + \frac{1}{6}a(\lambda-1)(\lambda-2)(\bar{u}_{i+1}^n - 2\bar{u}_i^n + \bar{u}_{i-1}^n). \quad (11)$$

在第 3 章 HWENO 重构的基础上, 用重构后的单元界面  $\{u_{i+1/2}^\pm\}$  值取代单元平均值, 可以得到高阶重构后的数值通量

$$\begin{aligned} \hat{f}_{i+1/2} &= a\bar{u}_{i+1/2} + \frac{1}{2}a(1-\lambda)(u_{i+1/2}^+ - u_{i+1/2}^-) \\ &\quad + \frac{1}{6}a(\lambda-1)(\lambda+1)(u_{i+1/2}^+ - u_{i+1/2}^- - u_{i-1/2}^+ + u_{i-1/2}^-). \end{aligned} \quad (12)$$

进一步考虑一维标量守恒律方程:

$$u_t + f(u)_x = 0, \tag{13}$$

其中  $f(u)$  为通量函数。局部波速定义为  $a(u) = f'(u)$ ，随空间坐标  $x$  和时间  $t$  变化。

记单元平均值为

$$\bar{u}_i(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} u(x,t) dx, \tag{14}$$

在  $I_i$  上积分方程(13)，并除以  $\Delta x$ ，得到半离散格式

$$\frac{d}{dt} \bar{u}_i(t) = -\frac{1}{\Delta x} (f(x_{i+1/2}, t) - f(x_{i-1/2}, t)). \tag{15}$$

用数值通量近似界面通量，得到守恒形半离散格式

$$\frac{d}{dt} \bar{u}_i(t) = -\frac{1}{\Delta x} (\hat{f}_{i+1/2} - \hat{f}_{i-1/2}). \tag{16}$$

其中  $\hat{f}_{i+1/2}$  是数值通量。

采用 Roe 平均定义界面波速

$$a_{i+1/2}^n = \begin{cases} \frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n}, & u_{i+1}^n \neq u_i^n, \\ f'(u_i^n), & u_{i+1}^n = u_i^n, \end{cases} \tag{17}$$

定义单元界面  $x_{i+1/2}$  处的局部 Courant 数为

$$\lambda_{i+1/2}^n = a_{i+1/2}^n \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}. \tag{18}$$

注意，局部 Courant 数的绝对值必须小于 1。

基于局部波速与 Courant 数，将线性情形的修正通量推广至非线性标量守恒律，得到

$$\begin{aligned} \hat{f}_{i+1/2} = & f(u_{i+1/2}^-) + \frac{1}{2} \lambda_{i+1/2}^n (1 - \lambda_{i+1/2}^n) (f(u_{i+1/2}^+) - f(u_{i+1/2}^-)) \\ & + \frac{1}{6} \lambda_{i+1/2}^n (\lambda_{i+1/2}^n - 1) (\lambda_{i+1/2}^n + 1) (f(u_{i+1/2}^+) - f(u_{i+1/2}^-) - f(u_{i-1/2}^+) + f(u_{i-1/2}^-)). \end{aligned} \tag{19}$$

在此一维标量格式的基础上，结合局部特征分解技术，可将上述标量格式推广至一维双曲守恒律方程组。通过将方程组在界面处投影至特征空间，在每个特征场分别应用标量守恒律的数值格式，再通过逆特征变换重构得到界面数值通量，从而保证格式在方程组情形下依然保持严格的守恒性与稳定性，避免了直接对非线性方程组应用标量格式可能产生的伪振荡或失稳问题。

对于更为复杂的二维守恒律问题，则采用逐维扩展的思路，将一维格式的构造思想与离散方式推广应用到二维标量守恒律与二维守恒律方程组中。具体而言，在每个坐标方向上独立应用前述一维高阶有限体积格式，分别对通量进行重构与离散，再通过方向分裂或算子分裂的方式合成得到二维半离散格式。这种构造方式不仅保留了一维格式的高精度、无振荡特性，也简化了多维格式的推导与实现过程，最终形成适用于多维标量与方程组问题的统一高阶有限体积格式体系。

### 3. HWENO 高阶重构方法与限制器设计

为了在保持格式稳定性与无振荡特性的同时，将第 2 推导的修正数值通量格式提升至高阶精度，本节引入 HWENO 重构方法，对单元界面处的守恒变量及其导数进行高阶近似。通过对守恒变量及其导数的联合重构，不仅能为修正数值通量提供更高阶的界面状态近似，还能为后续的高阶时间离散提供必要

的导数信息支撑, 为构建完整的高阶有限体积格式奠定基础。

考虑一维标量方程

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (20)$$

网格划分同第 2 节。令  $v = u_x$ ,  $g(u, v) = f'(u)v$ 。方程(20)对  $x$  求偏导数得到

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0, & u(x, 0) = u_0(x), \\ v_t + (g(u, v))_x = 0, & v(x, 0) = v_0(x). \end{cases} \quad (21)$$

定义  $u$ 、 $v$  在时刻  $t$  时每个单元格上  $I_i$  的单元平均值为

$$\bar{u}_i(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} u(x, t) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (22)$$

$$\bar{v}_i(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} v(x, t) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (23)$$

我们通过  $\{\bar{u}_i, \bar{v}_i\}$ , 用经典的 HWENO 的方法重构  $\{u_{i+1/2}^\pm\}$ , 具体方法可见 qiu 和 shu 的论文。

双曲型守恒律的解通常包含间断, 其导数在间断附近会出现剧烈变化, 易导致数值不稳定。因此, 本文引入 HWENO 限制器对导数项进行约束, 以抑制非物理振荡并保持高阶精度。该限制器基于四次多项式与两个线性多项式的凸组合构造, 线性权重可选取为和为 1 的人工正数。下面详细描述该限制器的构造细节:

步骤 1: 给出小模板  $S_0 = \{I_{i-1}, I_i\}$  和  $S_- = \{I_i, I_{i+1}\}$ , 以及大模板  $S = \{I_{i-1}, I_i, I_{i+1}\}$ 。由下述条件确定一个四次多项式  $q_0(x)$ , 两个线性函数  $q_1(x)$  和  $q_2(x)$ 。

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta x} \int_{I_{i+j}} q_0(x) dx = \bar{u}_{i+j}, & j = -1, 0, 1, \\ \frac{1}{\Delta x} \int_{I_{i+j}} q_0'(x) dx = \bar{v}_{i+j}, & j = -1, 1, \end{cases} \quad (24)$$

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{I_{i+j}} q_1(x) dx = \bar{u}_{i+j}, \quad j = -1, 0, \quad (25)$$

$$\begin{cases} q_0'(x_{i+1/2}) = \frac{3}{4\Delta x} (\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}) - \frac{1}{4} (\bar{v}_{i-1} + \bar{v}_{i+1}), \\ q_1'(x_{i+1/2}) = \frac{1}{\Delta x} (\bar{u}_i - \bar{u}_{i-1}), \\ q_2'(x_{i+1/2}) = \frac{1}{\Delta x} (\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i). \end{cases} \quad (26)$$

求出  $q_0(x)$ ,  $q_1(x)$ ,  $q_2(x)$  在点  $x_{i+1/2}$  处的导数值为

$$\begin{cases} q_0'(x_{i+1/2}) = \frac{3}{4\Delta x} (\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}) - \frac{1}{4} (\bar{v}_{i-1} + \bar{v}_{i+1}), \\ q_1'(x_{i+1/2}) = \frac{1}{\Delta x} (\bar{u}_i - \bar{u}_{i-1}), \\ q_2'(x_{i+1/2}) = \frac{1}{\Delta x} (\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i). \end{cases} \quad (27)$$

步骤 2: 线性权  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  可以是满足

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1, \tag{28}$$

的任意正数。

步骤 3: 按照下式计算光滑指示子

$$\beta_j = \sum_{l=1}^r \int_{I_i} \Delta x^{2l-1} \left( \frac{d^l}{dx^l} q_j(x) \right)^2 dx, \quad j = 0, 1, 2. \tag{29}$$

其中  $r$  是  $q_j(x)$  的次数。求出光滑指示子的表达式为

$$\begin{cases} \beta_0 = \left( \alpha_1 + \frac{1}{4} \alpha_3 \right)^2 + \frac{13}{3} \left( \alpha_2 + \frac{63}{130} \alpha_4 \right)^2 + \frac{781}{20} \alpha_3^2 + \frac{1421461}{2275} \alpha_4^2, \\ \beta_1 = (\bar{u}_i - \bar{u}_{i-1})^2, \\ \beta_2 = (\bar{u}_i - \bar{u}_{i+1})^2. \end{cases} \tag{30}$$

其中

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\frac{\Delta x}{4} (\bar{v}_{i-1} + \bar{v}_{i+1}) + \frac{3}{4} (\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}), \\ \alpha_2 = \frac{\Delta x}{4} (\bar{v}_{i-1} - \bar{v}_{i+1}) + \bar{u}_{i-1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i+1}, \\ \alpha_3 = \frac{\Delta x}{4} (\bar{v}_{i-1} + \bar{v}_{i+1}) + \frac{1}{4} (\bar{u}_{i-1} - \bar{u}_{i+1}), \\ \alpha_4 = \frac{\Delta x}{4} (\bar{v}_{i+1} - \bar{v}_{i-1}) - \frac{1}{2} (\bar{u}_{i-1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i+1}). \end{cases} \tag{31}$$

步骤 4: 非线性权的表达式为

$$\omega_j = \frac{\bar{\omega}_j}{\sum_{k=0}^2 \bar{\omega}_k}, \quad j = 0, 1, 2. \tag{32}$$

其中

$$\bar{\omega}_k = \gamma_k \left( 1 + \frac{\tau}{\beta_k + \epsilon} \right), \quad k = 0, 1, 2. \tag{33}$$

这里  $\tau = (|\beta_0 - \beta_1| + |\beta_0 - \beta_2|)^2 / 4$ ,  $\epsilon = 10^{-6}$  是为了防止分母为 0。最终定义重构值  $v_{i+1/2}^-$  为

$$\begin{aligned} v_{i+1/2}^- = & \omega_0 \left( \frac{1}{\gamma_0} q'_0(x_{i+1/2}) - \frac{\gamma_1}{\gamma_0} q'_1(x_{i+1/2}) - \frac{\gamma_2}{\gamma_0} q'_2(x_{i+1/2}) \right) \\ & + \omega_1 q'_1(x_{i+1/2}) + \omega_2 q'_2(x_{i+1/2}). \end{aligned} \tag{34}$$

重构  $v_{i-1/2}^+$  是上述步骤关于  $x_i$  的镜像对称。

至此, 我们从  $\{\bar{u}_i, \bar{v}_i\}$  重构了  $\{u_{i+1/2}^\pm\}$  和  $\{v_{i+1/2}^\pm\}$ , 代入在第二章求得的格式中, 不妨将控制方程的通量记为  $\hat{f}_{i+1/2}$ , 将导数方程的通量记为  $\hat{g}_{i+1/2}$ , 并且记

$$L_i^1(\bar{u}_i^n, \bar{v}_i^n) = -\frac{1}{\Delta x} (\hat{f}_{i+1/2} - \hat{f}_{i-1/2}), \quad i = 1, 2, \dots, N. \tag{35}$$

$$L_i^2(\bar{u}_i^n, \bar{v}_i^n) = -\frac{1}{\Delta x} (\hat{g}_{i+1/2} - \hat{g}_{i-1/2}), \quad i = 1, 2, \dots, N. \tag{36}$$

对于时间离散, 我们使用显示 3 阶 SSP Runge-Kutta 格式, 得到以下的全离散格式:

$$\begin{cases} (\bar{u}_1)_i = \bar{u}_i^n + \Delta t L_i^1(\bar{u}_i, \bar{v}_i), \\ (\bar{v}_1)_i = \bar{v}_i^n + \Delta t L_i^2(\bar{u}_i, \bar{v}_i), \end{cases} \quad (37a)$$

$$\begin{cases} (\bar{u}_2)_i = \frac{3}{4}\bar{u}_i^n + \frac{1}{4}\left((\bar{u}_1)_{i+1/2}^- + \Delta t L_i^1((\bar{u}_1)_i, (\bar{v}_1)_i)\right), \\ (\bar{v}_2)_i = \frac{3}{4}\bar{v}_i^n + \frac{1}{4}\left((\bar{v}_1)_{i+1/2}^- + \Delta t L_i^2((\bar{u}_1)_i, (\bar{v}_1)_i)\right), \end{cases} \quad (37b)$$

$$\begin{cases} \bar{u}_i^{n+1} = \frac{1}{3}\bar{u}_i^n + \frac{2}{3}\left((\bar{u}_2)_{i+1/2}^- + \Delta t L_i^1((\bar{u}_2)_i, (\bar{v}_2)_i)\right), \\ \bar{v}_i^{n+1} = \frac{1}{3}\bar{v}_i^n + \frac{2}{3}\left((\bar{v}_2)_{i+1/2}^- + \Delta t L_i^2((\bar{u}_2)_i, (\bar{v}_2)_i)\right). \end{cases} \quad (37c)$$

对于一维双曲守恒律方程组, 利用局部特征分解技术将守恒变量投影至特征空间, 在每个特征场分别应用上述标量 HWENO 重构格式, 再通过逆特征变换重构界面通量, 从而保证格式在方程组情形下的守恒性与稳定性。

对于二维问题, 采用逐维扩展策略, 将一维格式分别应用于  $x$  与  $y$  方向, 对每个方向的通量进行 HWENO 重构与修正通量离散, 再通过方向分裂合成得到二维格式, 最终形成适用于多维标量与方程组问题的统一高阶有限体积格式体系。

#### 4. 数值算例

为验证本文所提修正数值通量与 HWENO 重构有限体积格式的理论高阶精度, 本章选取多类具有光滑解的经典双曲守恒律基准算例进行数值实验。所有算例均在光滑解条件下开展, 通过计算不同网格分辨率下的数值误差与收敛阶, 系统检验格式在光滑区域能否达到设计的五阶收敛精度, 从而验证格式构造的正确性与高阶近似性能。

例 1 一维线性对流方程

$$u_t + u_x = 0, \quad (38)$$

初始条件为

$$u(x, 0) = \sin(\pi x). \quad (39)$$

采用以 2 为周期的边界条件。数值计算结果见表 1。使用本文的计算方法, 我们给出了  $L_1$ 、 $L_\infty$  误差, 并且达到了预计的 5 阶精度。

**Table 1.** Accuracy and error of one-dimensional convection equation

**表 1.** 一维对流方程的精度及误差

| $N$ | $L_1$ 误差 | 精度   | $L_\infty$ 误差 | 精度   |
|-----|----------|------|---------------|------|
| 10  | 2.97E-2  | -    | 2.43E-2       | -    |
| 20  | 1.01E-3  | 4.86 | 1.08E-3       | 4.62 |
| 40  | 3.24E-5  | 4.97 | 3.45E-5       | 4.97 |
| 80  | 9.88E-7  | 5.04 | 1.11E-6       | 4.96 |
| 160 | 3.05E-8  | 5.02 | 3.40E-8       | 5.03 |
| 320 | 9.51E-10 | 5.01 | 1.05E-9       | 5.01 |

例 2 一维 Burgers 方程

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0, \tag{40}$$

初始条件为

$$u(x, 0) = 0.5 + \sin(\pi x). \tag{41}$$

采用以 2 为周期的周期边界。当  $t = 1/(2\pi)$  时它的解仍然是光滑的。在表 2 中, 列出了该格式的  $L_1$ 、 $L_\infty$  误差及精度, 我们可以看到这个格式具有 5 阶精度。

进一步验证本文方法的有效性, 本文选取已有文献中针对同一算例的数值结果进行对比分析(见表 3)。与本文所采用的基于分段二次多项式重构的有限体积格式不同, 现有文献采用通量分裂方法, 并在此基础上对数值通量进行重构, 以此构造双曲守恒律的数值求解格式。

**Table 2.** Accuracy and error of one-dimensional Burgers equation

**表 2.** 一维 Burgers 方程的精度及误差

| $N$ | $L_1$ 误差 | 精度   | $L_\infty$ 误差 | 精度   |
|-----|----------|------|---------------|------|
| 10  | 3.11E-2  | -    | 2.90E-2       | -    |
| 20  | 1.50E-3  | 4.37 | 1.07E-3       | 4.77 |
| 40  | 4.23E-5  | 5.16 | 2.87E-5       | 5.22 |
| 80  | 1.41E-6  | 4.91 | 9.51E-7       | 4.92 |
| 160 | 5.25E-8  | 4.75 | 2.82E-8       | 5.08 |
| 320 | 1.73E-10 | 4.93 | 8.43E-10      | 5.07 |

**Table 3.** Numerical results of different calculation methods in Example 2

**表 3.** 算例 2 不同方法计算结果

| $N$ | $L_1$ 误差 | 精度   | $L_\infty$ 误差 | 精度   |
|-----|----------|------|---------------|------|
| 10  | 3.21E-2  | -    | 6.71E-2       | -    |
| 20  | 2.51E-3  | 3.68 | 7.98E-3       | 3.07 |
| 40  | 1.05E-4  | 4.58 | 4.82E-4       | 4.05 |
| 80  | 3.36E-6  | 4.96 | 1.68E-5       | 4.84 |
| 160 | 1.22E-7  | 5.13 | 6.53E-7       | 4.69 |
| 320 | 3.48E-9  | 5.46 | 3.20E-8       | 4.35 |

例 3 一维 Euler 方程组

$$u_t + f(u)_x = 0, \tag{42}$$

其中

$$u = (\rho, \rho v, E)^T, \quad f(u) = (\rho v, \rho v^2 + p, v(E + p))^T. \tag{43}$$

符号  $\rho$  是密度,  $v$  是速度,  $p$  是压强,  $E$  是总能量, 有如下关系式成立

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho v^2, \quad (44)$$

符号  $\gamma$  是比热比, 取值为  $\gamma = 1.4$ 。初始条件为

$$\begin{cases} \rho(x, 0) = 1 + 0.2 \sin(\pi x), \\ v(x, 0) = 1, \\ p(x, 0) = 1. \end{cases} \quad (45)$$

采用以 2 为周期的周期边界条件。数值计算结果见表 4。我们展示了计算一维 Euler 方程组的误差及精度, 其中精度达到了 5 阶。

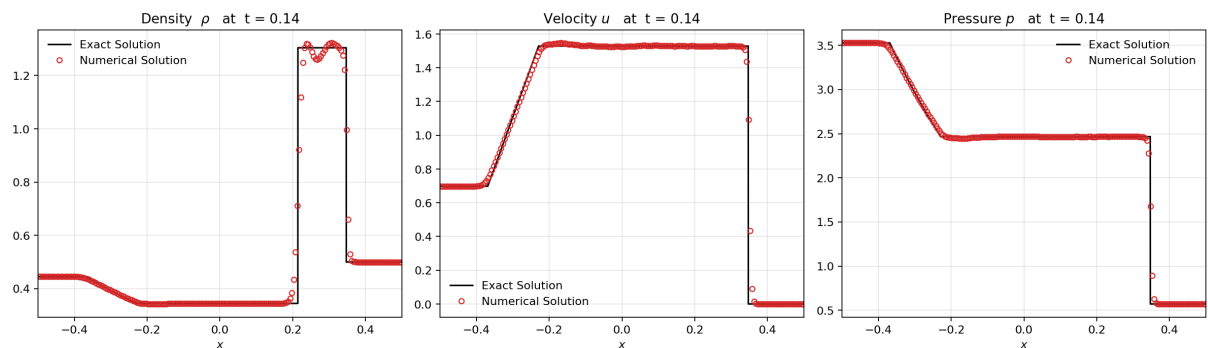
**Table 4.** Error and accuracy of one-dimensional Euler equation system  
**表 4.** 一维 Euler 方程组的误差和精度

| $N$ | $L_1$ 误差 | 精度   | $L_\infty$ 误差 | 精度   |
|-----|----------|------|---------------|------|
| 10  | 2.65E-2  | -    | 2.28E-2       | -    |
| 20  | 9.22E-4  | 4.85 | 7.60E-4       | 4.91 |
| 40  | 3.01E-5  | 4.94 | 2.52E-5       | 4.92 |
| 80  | 9.38E-7  | 5.01 | 7.53E-7       | 5.07 |
| 160 | 2.74E-8  | 5.10 | 2.93E-8       | 4.98 |
| 320 | 8.72E-10 | 4.98 | 7.76E-8       | 4.95 |

例 4 在这个例子中, 我们考虑一维 Euler 方程组(42)的 Lax 问题, 其初始条件如下

$$(\rho, \mu, p) = \begin{cases} (0.445, 0.698, 3.528), & x < 0, \\ (0.5, 0, 0.571), & x > 0. \end{cases} \quad (46)$$

终止时刻取  $t = 0.14$ 。计算得到的密度  $\rho$ 、速度  $v$  和压力  $p$  的结果如图 1 所示



**Figure 1.** Comparison of numerical and exact solutions for 1D Euler Lax problem  
**图 1.** 一维欧拉方程 Lax 算例数值解与精确解对比

例 5 二维 Burgers 方程

$$u_t + \left( \frac{u^2}{2} \right)_x + \left( \frac{u^2}{2} \right)_y = 0, \quad (47)$$

初始条件为

$$u(x, y, 0) = 0.5 + \sin\left(\frac{\pi(x+y)}{2}\right). \quad (48)$$

两个方向上都采用以 4 为周期的周期边界条件。表 5 列出了本文格式的数值误差与收敛阶, 验证了该格式具有 5 阶精度。

**Table 5.** Error and accuracy of two-dimensional Burgers equation

**表 5.** 二维 Burgers 方程的误差和精度

| $N \times N$     | $L_1$ 误差 | 精度   | $L_\infty$ 误差 | 精度   |
|------------------|----------|------|---------------|------|
| $10 \times 10$   | 3.07E-2  | -    | 2.83E-2       | -    |
| $20 \times 20$   | 1.32E-3  | 4.54 | 9.85E-4       | 4.85 |
| $40 \times 40$   | 3.54E-5  | 5.23 | 2.72E-5       | 5.18 |
| $80 \times 80$   | 1.14E-7  | 4.96 | 8.31E-7       | 5.04 |
| $160 \times 160$ | 4.08E-8  | 4.81 | 2.73E-8       | 4.93 |
| $320 \times 320$ | 1.37E-9  | 4.90 | 7.89E-10      | 5.12 |

为进一步全面、客观地评估本文所提数值方法的精度、稳定性与间断捕捉能力, 验证该格式在求解双曲守恒律问题时的综合数值表现, 表 6 列出了已有经典文献中针对同一标准测试算例的数值结果, 与本文的数值结果开展横向对比分析。文献中的方法基于传统通量分裂技术构建数值格式, 其核心思路是先对守恒律方程的对流项通量进行方向分解, 再结合高阶多项式重构等技术对分裂后的通量进行高精度近似。通过与上述成熟方法的计算结果进行对比, 可直观凸显本文格式在振荡抑制、分辨率提升及计算效率等方面的优势, 充分验证所提方法的有效性与可靠性。

**Table 6.** Numerical results of different calculation methods in Example 5

**表 6.** 算例 5 不同方法计算结果

| $N \times N$     | $L_1$ 误差 | 精度   | $L_\infty$ 误差 | 精度   |
|------------------|----------|------|---------------|------|
| $10 \times 10$   | 6.61E-2  | -    | 6.94E-2       | -    |
| $20 \times 20$   | 5.47E-3  | 3.55 | 6.74E-3       | 3.38 |
| $40 \times 40$   | 8.13E-4  | 2.75 | 9.19E-4       | 2.87 |
| $80 \times 80$   | 1.97E-4  | 2.05 | 6.23E-4       | 0.56 |
| $160 \times 160$ | 1.02E-5  | 4.27 | 5.37E-5       | 3.54 |
| $320 \times 320$ | 9.28E-8  | 6.77 | 4.08E-9       | 7.04 |

例 6 二维 Euler 方程组

$$\zeta_t + f(\zeta)_x + g(\zeta)_y = 0, \quad (49)$$

其中

$$\begin{cases} \zeta = (\rho, \rho u, \rho v, E)^T, \\ f(\zeta) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, u(E+p))^T, \\ g(\zeta) = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, v(E+p))^T. \end{cases} \quad (50)$$

符号  $\rho$  是密度,  $(u, v)$  是速度,  $E$  是总能量,  $P$  是压力, 且有关系式

$$E = \frac{P}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2). \quad (51)$$

符号  $\gamma$  是比热比, 取值为  $\gamma = 1.4$ 。初始条件为

$$\begin{cases} \rho(x, y, 0) = 1 + 0.2 \sin(\pi(x + y)), \\ u(x, y, 0) = 0.7, \\ v(x, y, 0) = 0.3, \\ p(x, y, 0) = 1. \end{cases} \quad (52)$$

采用以 2 为周期的周期边界条件。数值计算结果见表 7。表 7 列出了用本文格式计算二维 Euler 方程组的数值误差与收敛阶, 验证了该格式具有 5 阶精度。

**Table 7.** Error and accuracy of two-dimensional Euler equation system

**表 7.** 二维 Euler 方程组的误差和精度

| $N \times N$     | $L_1$ 误差 | 精度   | $L_\infty$ 误差 | 精度   |
|------------------|----------|------|---------------|------|
| $10 \times 10$   | 2.63E-2  | -    | 2.51E-2       | -    |
| $20 \times 20$   | 9.68E-4  | 4.52 | 9.23E-4       | 4.70 |
| $40 \times 40$   | 3.14E-5  | 4.95 | 2.99E-5       | 4.88 |
| $80 \times 80$   | 9.57E-7  | 5.04 | 9.13E-7       | 4.99 |
| $160 \times 160$ | 3.28E-8  | 4.88 | 3.11E-8       | 4.95 |
| $320 \times 320$ | 1.04E-9  | 4.97 | 9.95E-10      | 4.92 |

## 5. 结论

本文针对双曲守恒律方程, 构造了基于修正数值通量与 HWENO 重构的五阶有限体积格式。在经典 Godunov 格式框架下, 采用分段二次多项式实现高阶空间重构, 结合守恒约束与插值条件确定多项式系数, 有效弥补了传统低阶格式数值耗散大、精度不足的缺陷。对守恒变量采用非线性自适应加权 HWENO 重构, 并引入 HWENO 限制器约束导数近似, 在光滑区域保持高阶收敛特性, 同时具备良好的稳定性。结合三阶 SSP Runge-Kutta 方法完成时间离散, 构建了完整的高精度有限体积格式体系。通过多个基准算例进行数值验证, 结果表明: 本文格式在光滑区域均可稳定达到理论五阶收敛精度。

未来可在本文工作基础上开展进一步研究, 将所提格式推广至包含激波、接触间断等复杂结构的流动问题, 提升格式对非光滑解的适应性与无振荡捕捉能力。同时可将格式扩展到二维、三维等更贴近实际的流动场景, 完善多维计算框架。此外, 还可结合自适应网格、高精度时间离散等技术优化算法效率, 进一步提升格式的鲁棒性与工程实用性, 为更广泛的双曲守恒律问题提供高效可靠的高精度数值方法。

## 参考文献

- [1] Liu, L., Zhang, L. and Gelb, A. (2026) Neural Entropy-Stable Conservative Flux Form Neural Networks for Learning Hyperbolic Conservation Laws. *Journal of Computational Physics*, **553**, Article ID: 114719. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2026.114719>
- [2] Kolotilov, V.A., Kurganov, A.A., Ostapenko, V.V., Khandeeva, N.A. and Chu, S. (2023) On the Accuracy of Shock-Capturing Schemes Calculating Gas-Dynamic Shock Waves. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **63**, 1341-1349. <https://doi.org/10.1134/s0965542523070060>

- 
- [3] Godunov, S.K. (1959) A Difference Scheme for Numerical Computation of Discontinuous Solutions of Hydrodynamic Equations. *Matematicheskii Sbornik*, **47**, 271-306.
- [4] Harten, A., Engquist, B., Osher, S. and Chakravarthy, S.R. (1987) Uniformly High Order Accurate Essentially Non-Oscillatory Schemes, III. *Journal of Computational Physics*, **71**, 231-303. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(87\)90031-3](https://doi.org/10.1016/0021-9991(87)90031-3)
- [5] Shu, C. and Osher, S. (1988) Efficient Implementation of Essentially Non-Oscillatory Shock-Capturing Schemes. *Journal of Computational Physics*, **77**, 439-471. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(88\)90177-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(88)90177-5)
- [6] Shu, C. and Osher, S. (1989) Efficient Implementation of Essentially Non-Oscillatory Shock-Capturing Schemes, II. *Journal of Computational Physics*, **83**, 32-78. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(89\)90222-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(89)90222-2)
- [7] Liu, X., Osher, S. and Chan, T. (1994) Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes. *Journal of Computational Physics*, **115**, 200-212. <https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1187>
- [8] Jiang, G.S. and Shu, C.W. (1996) Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes. *Journal of Computational Physics*, **126**, 202-228. <https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0130>
- [9] Qiu, J. and Shu, C.W. (2004) Hermite WENO Schemes and Their Application as Limiters for Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Method: One-Dimensional Case. *Journal of Computational Physics*, **193**, 115-135. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.07.026>
- [10] Qiu, J. and Shu, C.W. (2005) Hermite WENO Schemes and Their Application as Limiters for Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Method II: Two Dimensional Case. *Computers & Fluids*, **34**, 642-663. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2004.05.005>
- [11] Zhao, Z. and Qiu, J. (2020) A Hermite WENO Scheme with Artificial Linear Weights for Hyperbolic Conservation Laws. *Journal of Computational Physics*, **417**, Article ID: 109583. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.109583>
- [12] Fan, C., Zhang, X. and Qiu, J. (2021) Positivity-Preserving High Order Finite Volume Hybrid Hermite WENO Schemes for Compressible Navier-Stokes Equations. *Journal of Computational Physics*, **445**, Article ID: 110596. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110596>
- [13] Li, J., Shu, C.W. and Qiu, J. (2022) Moment-Based Multi-Resolution HWENO Scheme for Hyperbolic Conservation Laws. *Communications in Computational Physics*, **32**, 364-400. <https://doi.org/10.4208/cicp.oa-2022-0030>
- [14] Zhang, M. and Zhao, Z. (2023) A Fifth-Order Finite Difference HWENO Scheme Combined with Limiter for Hyperbolic Conservation Laws. *Journal of Computational Physics*, **472**, Article ID: 111676. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.111676>