

基于储备池计算的混沌系统同步行为预测研究

岳睿, 梁家玥, 李婉峒, 张彦超, 赵楠楠*

长安大学理学院, 陕西 西安

收稿日期: 2026年5月18日; 录用日期: 2026年6月11日; 发布日期: 2026年6月18日

摘要

本文基于储备池计算这一机器学习框架, 实现了对光滑Chen混沌系统与分段线性Chua混沌系统的无模型同步行为预测。我们首先通过数值模拟生成了两类系统的混沌数据, 并训练了回声状态网络以捕捉其动力学特性。随后, 系统地研究了单端驱动同步、级联同步以及在参数不匹配条件下的广义同步。研究发现, 训练良好的储备池计算机能够通过传递单一标量信号与未知的混沌系统实现同步, 并且这种同步现象在级联网络中可以传播。通过对比两类系统的同步误差与收敛速度, 我们证实了光滑非线性系统相较于分段线性系统, 其同步收敛速度更快、级联误差累积更小, 而后者在非线性的切换点处表现出更强的误差敏感性和波动性。本研究为理解和预测复杂非线性系统的同步行为提供了新的视角和方法。

关键词

储备池计算, 混沌同步, 回声状态网络, Chen系统, Chua系统

Research on Predicting Synchronization Behavior of Chaotic Systems Based on Reservoir Computing

Rui Yue, Jiayue Liang, Wantong Li, Yanchao Zhang, Nannan Zhao*

School of Sciences, Chang'an University, Xi'an Shaanxi

Received: May 18, 2026; accepted: June 11, 2026; published: June 18, 2026

Abstract

This paper employs reservoir computing, a machine learning framework, to achieve model-free prediction of synchronization behavior in the smooth Chen chaotic system and the piecewise-linear Chua chaotic system. First, chaotic data for both systems are generated through numerical simulation,

*通讯作者。

文章引用: 岳睿, 梁家玥, 李婉峒, 张彦超, 赵楠楠. 基于储备池计算的混沌系统同步行为预测研究[J]. 应用数学进展, 2026, 15(6): 282-294. DOI: 10.12677/aam.2026.156287

and echo state networks are trained to capture their dynamic characteristics. Subsequently, three types of synchronization—unidirectional drive synchronization, cascade synchronization, and generalized synchronization under parameter mismatch—are systematically investigated. The results demonstrate that a well-trained reservoir computer can synchronize with an unknown chaotic system by transmitting only a single scalar signal, and this synchronization can propagate through a cascade network. By comparing the synchronization errors and convergence speeds of the two systems, we find that the smooth nonlinear system exhibits faster synchronization convergence and smaller cascade error accumulation than the piecewise-linear system, while the latter shows stronger error sensitivity and fluctuations at nonlinear switching points. This study provides new insights and methods for understanding and predicting synchronization behavior in complex nonlinear systems.

Keywords

Reservoir Computing, Chaotic Synchronization, Echo State Network, Chen System, Chua System

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

混沌系统的同步问题自 Pecora 和 Carroll 于 1990 年开创性地证明两个耦合混沌系统可以实现同步以来[1], 已成为非线性动力学领域的重要研究方向。混沌同步现象揭示了确定性非周期系统之间能够建立有序关联的深刻物理机制, 不仅在基础科学层面拓展了人们对非线性动力学的认知, 还在保密通信、激光器阵列、生物神经网络、电力系统等领域展现出广泛的应用前景[2]-[4]。因此, 深入理解和预测混沌系统的同步行为, 既是探索复杂系统动力学本质的理论需求, 也是推动混沌同步技术走向实际应用的关键环节。然而, 实际应用场景中的混沌系统往往具有高度复杂性和不确定性, 这对同步方法的数据驱动能力、参数鲁棒性以及跨系统迁移能力提出了更高要求。

近年来, 国内外学者围绕混沌同步问题开展了大量研究。在传统方法层面, 研究者相继发现了完全同步、相位同步、滞后同步和广义同步等多种同步形态[5][6], 并系统揭示了驱动-响应机制在混沌同步中的有效性[7]。其中, 广义同步概念的提出标志着同步研究从“状态等同”向“函数映射”的重要拓展[6]。然而, 传统方法大多依赖于系统的已知动力学方程, 在面对数据驱动的实际场景时存在固有局限。与此同时, 基于数据驱动的机器学习方法为突破这一瓶颈开辟了新路径。储备池计算, 特别是回声状态网络, 因训练效率高、数据需求小且无需对储备层进行训练而受到广泛关注[8][9]。Pathak 等人[10]率先将其应用于大规模时空混沌系统的无模型预测, Lu 等人则提出了“储备池观测器”概念以推断混沌系统未测量变量[11]。在此基础上, 储备池驱动的混沌同步研究取得了重要进展: Canaday 等人[12]证实储备池计算机可通过“驱动-响应”构型与学习的混沌系统实现同步, 且级联同步信号可沿网络链路逐级传播; Xiong 等人[13]提出了利用不可见信号实现储备池计算机间同步的新方法, 拓展了同步信号传输的范式; Suetani 和 Parlitz [14]从广义同步的视角揭示了回声状态网络的预测性能与同步动力学之间的内在联系。此外, 面向硬件部署的物理储备池计算也取得了突破性进展, Ahmed 等人[15]证明了量子储备池计算机能够从时间序列数据中学习混沌动力学及其 Lyapunov 指数、吸引子维数和协变 Lyapunov 向量等不变性质, 为混沌预测提供了鲁棒的量子计算方案。在国内, 基于储备池计算的混沌同步也得到了积极探索, 例如利用新型储备池网络实现单信道同步通信[16]以及混沌扭摆数字孪生系统的构建[17]。

然而, 现有研究主要聚焦于 Lorenz 系统和 Rössler 系统等光滑非线性系统, 对于含有非光滑特性——如以分段线性电阻为特征的 Chua 混沌系统[18] [19]——的同步行为研究尚不充分。光滑系统与分段线性系统在动力学复杂性、Lyapunov 指数谱结构和吸引子几何形态等方面存在本质差异, 这些差异如何影响储备池驱动同步性能, 是一个兼具理论意义与应用价值的问题。本文以光滑非线性的 Chen 系统[20]为研究对象, 以分段线性的 Chua 系统为对比对象, 利用基于回声状态网络的储备池计算框架, 系统开展无模型混沌同步行为预测研究。通过对比两类系统在单端驱动同步、级联同步以及参数不匹配条件下广义同步中的性能差异, 旨在揭示系统光滑性对同步收敛速度、级联误差传播和参数鲁棒性的影响规律, 为基于机器学习的混沌同步在复杂工程系统中的实际部署提供理论依据。

2. 模型

2.1. Chen 混沌系统

Chen 系统作为本文的主要研究对象, 是一个典型的三维光滑非线性系统。其动力学方程由一组常微分方程描述, 具体形式为[20]:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = (c - a)x - xz + cy \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (2.1)$$

其中, x, y, z 为系统的状态变量, a, b, c 为控制参数。当选取经典参数值 $(a, b, c) = (35, 3, 28)$ 时, 系统处于混沌态。方程组(2.1)所示的向量场是连续且可微的, 其非线性主要来源于第二和第三方程中的交叉乘积项 $-xz$ 和 xy , 这决定了其混沌吸引子具有光滑的几何结构。

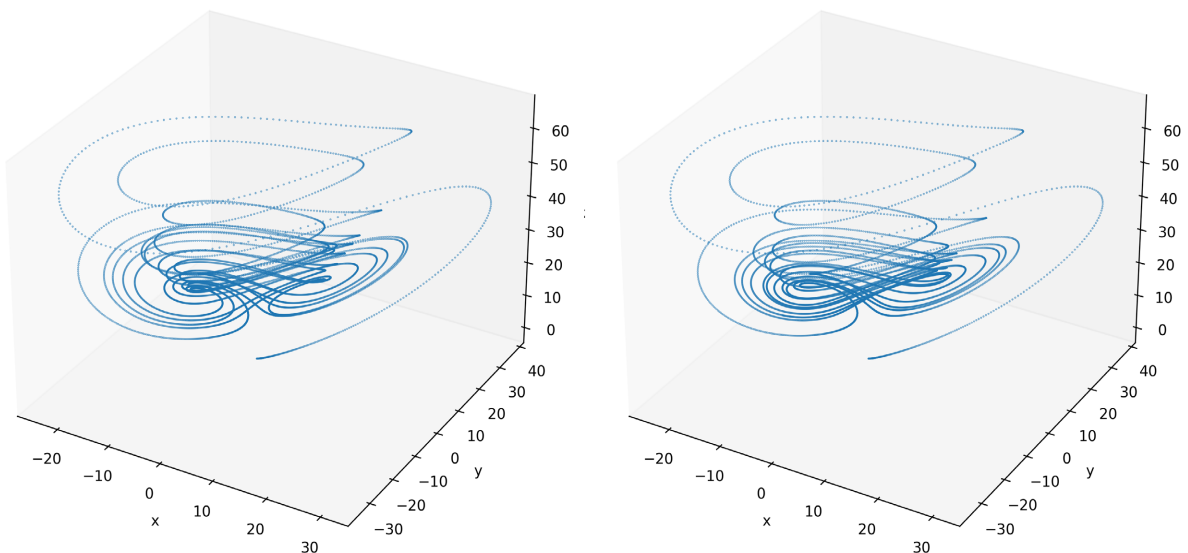


Figure 1. 3D view of the Chen chaotic attractor

图 1. Chen 系统混沌吸引子的三维图对比

在图 1 中, 左图为原始初值 $y_0 = 1$ 的吸引子, 右图为扰动初值 $y_0 = 1.001$ 的吸引子。两个吸引子均呈现典型的双涡卷混沌结构, 但轨迹细节存在差异。

可以看出, 两组初值生成的吸引子在整体几何轮廓上保持一致, 均表现为双涡卷结构。然而, 由于

混沌系统的初值敏感性，两条轨迹的细节并不相同。为了更清晰地观察这一差异，将轨迹投影到三个坐标平面上。

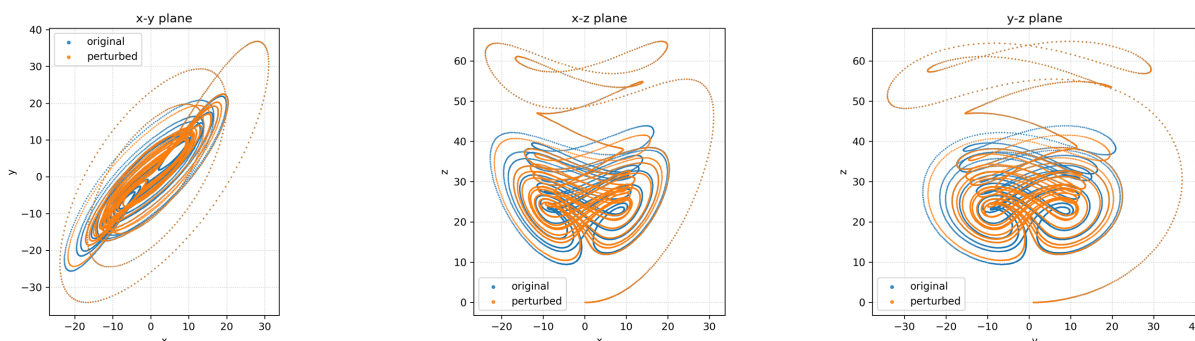


Figure 2. Projection comparison of the Chen system on three coordinate planes

图 2. Chen 系统在三个坐标平面上的投影对比

图 2 中蓝色点为原始初值轨迹，橙色点为扰动初值轨迹。可表明，在 10 秒的积分时间内，微小初值扰动导致的轨迹发散并不显著。若延长积分时间，两条轨迹将彻底分离。这一性质是混沌系统的本质特征，所以基于数据的短期预测可行而长期预测必然失败。

数值积分完成后，舍弃前 1000 步瞬态点，获得 49,000 个有效数据点。为消除不同量纲的影响，将每个状态变量除以其绝对值最大值进行标准化处理，使数据范围落入 $[-1, 1]$ 区间，以提高储备池训练的数值稳定性。

2.2. Chua 混沌系统

Chua 系统，作为一个经典的物理可实现混沌系统，其动力学行为可由以下方程描述：

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x - f(x)) \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta y \end{cases} \quad (2.2)$$

其中 $f(x)$ 为分段线性函数：

$$f(x) = \begin{cases} m_1 x + (m_0 - m_1)(-E), & x \leq -E \\ m_0 x, & |x| < E \\ m_1 x + (m_0 - m_1)E, & x \geq E \end{cases} \quad (2.3)$$

参数 m_0 和 m_1 为分段线性区间的斜率， E 为转折点电压。其中，当参数取值为 $(\alpha, \beta, m_0, m_1, E) = (15.6, 28, -1.143, -0.714, 1)$ ，系统处于双涡卷混沌状态。与 Chen 系统不同，Chua 系统的非线性 $f(x)$ 是分段线性的，其一阶导数在 $x = \pm E$ 处分段连续，导致向量场在这些切换点处形成非光滑的“折痕”。这赋予了 Chua 系统一个独特的双涡卷混沌吸引子，但其结构与 Chen 系统有本质区别：涡卷内部和连接路由直线段构成。

图 3，图 4 展示了 Chua 系统在给定参数下的混沌吸引子相图。可以清晰地观察到吸引子由不同区域的不同线性动力学拼接而成，轨迹在涡卷之间穿越时呈现出折线特征。

选择这两类系统进行对比研究，可以揭示同步行为在“连续型”和“分段型”非线性动力学中的本质差异。

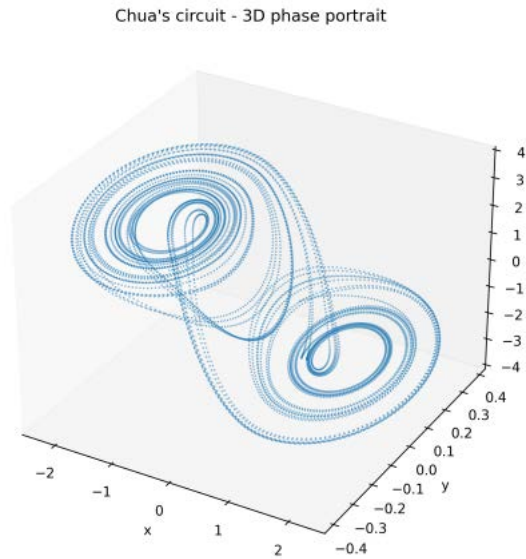


Figure 3. 3D phase portrait of the Chua chaotic attractor
图 3. Chua 系统混沌吸引子三维相图

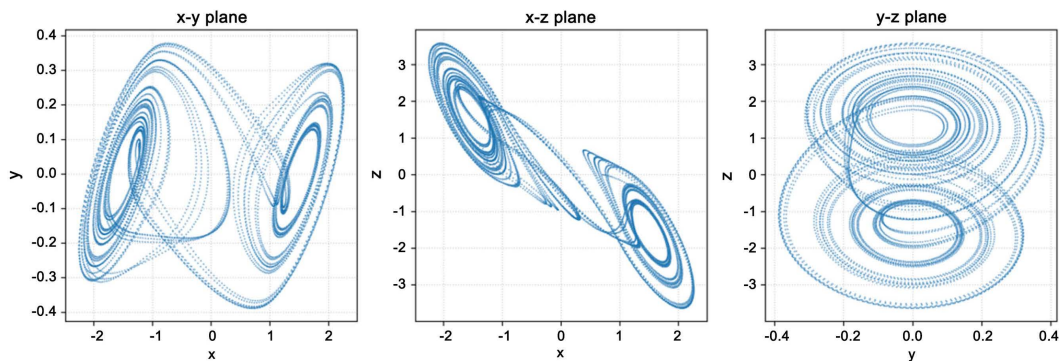


Figure 4. 2D projections of the Chua chaotic attractor
图 4. Chua 系统混沌吸引子二维相图

3. 理论方法

3.1. 储备池计算与回声状态网络

储备池计算的核心思想是利用一个高维、固定、随机连接的动态网络将输入信号映射到一个高维状态空间，然后通过一个简单的线性读出层来提取所需的特征。本文采用回声状态网络，其动力学更新方程表示如下：

$$\mathbf{r}(t+1) = (1-\alpha)\mathbf{r}(t) + \alpha \tanh(\mathbf{W}\mathbf{r}(t) + \mathbf{W}_{in}[b_{in}; \mathbf{u}(t)]) \quad (3.1)$$

这里， $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^N$ 是 t 时刻的储备池状态向量， N 是储备池节点数。 $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ 是输入向量，在本文中对应于混沌系统的状态向量。 α 是泄漏率，控制着当前状态对新旧信息的权衡。 $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 是储备池内部的稀疏连接矩阵，其谱半径 $\rho(\mathbf{W})$ 是确保网络具有回声状态属性的关键超参数。 $\mathbf{W}_{in} \in \mathbb{R}^{N \times (m+1)}$ 是输入权重矩阵， b_{in} 是一个常数偏置。 \tanh 函数以逐元素方式作用，为网络引入非线性。 \mathbf{W} 和 \mathbf{W}_{in} 的元素均在训练前随机生成，并在后续过程中保持固定。

网络的输出 $\mathbf{v}(t)$ 由储备池状态 $\mathbf{r}(t)$ 和输入 $\mathbf{u}(t)$ 的线性组合得到:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{W}_{out} [\mathbf{b}_{out}; \mathbf{u}(t); \mathbf{r}(t)] \quad (3.2)$$

其中, $\mathbf{W}_{out} \in R^{3 \times (1+m+N)}$ 是唯一需要训练的输出权重矩阵, \mathbf{b}_{out} 是输出偏置。

训练过程旨在确定 \mathbf{W}_{out} 。给定一段长度为 T 的训练数据 $\{\mathbf{s}(t)\}_{t=-\tau}^T$, 其中 τ 是丢弃的暂态步数。我们首先利用式(3.2)逐时间步驱动储备池, 并收集从 $t = \tau + 1$ 到 T 时刻的状态和输入, 组成矩阵 \mathbf{X} 。每一列是 $[\mathbf{b}_{out}; \mathbf{u}(t); \mathbf{r}(t)]$ 。同时, 构建目标输出矩阵 \mathbf{Y} , 其每一列为期望的下一时刻数据 $\mathbf{s}(t+1)$ 。 \mathbf{W}_{out} 的最优解通过求解如下岭回归问题得到, 以最小化预测误差并防止过拟合:

$$\mathbf{W}_{out} = \mathbf{YX}^T (\mathbf{XX}^T + \lambda \mathbf{I})^{-1} \quad (3.3)$$

其中, λ 是正则化系数, \mathbf{I} 是单位矩阵。该方法计算高效, 仅需求解一个线性最小二乘问题。

超参数确定与敏感性分析: ESN 的性能高度依赖于若干超参数的选择。为公平对比两类系统并保证各自的最佳性能, 我们采用网格搜索与交叉验证相结合的方法确定各超参数。具体地, 以预测均方根误差(RMSE)作为优化目标, 分别对 Chen 系统和 Chua 系统进行了参数扫描, 主要考察泄漏率 α 、谱半径 ρ 、储备池规模 N 和正则化系数 λ 的影响。

对于 Chen 系统, 参数扫描范围: $\alpha \in [0.1, 0.5]$ (步长 0.05), $\rho \in [0.7, 1.0]$ (步长 0.05), $N \in [200, 1000]$, $\lambda \in [10^{-9}, 10^{-6}]$ 。实验发现: 泄漏率在 0.25~0.30 之间时预测误差最小, 过小的 α 导致响应迟缓, 过大的 α 则引入高频噪声; 谱半径接近 0.9 时能获得最佳的记忆 - 非线性平衡; 增大 N 可提升预测精度但计算成本随之增加, $N = 1000$ 时性能趋于饱和。最终选择 $\alpha = 0.275$ 、 $\rho = 0.913$ 、 $N = 1000$ 、 $\lambda = 10^{-8}$ 。对于 Chua 系统, 由于其分段线性特性和较小的最大 Lyapunov 指数, 参数扫描范围有所调整: $\alpha \in [0.7, 1.0]$, $\rho \in [0.3, 0.7]$ 。结果显示, 较高的泄漏率 ($\alpha = 0.9$) 有利于快速跟踪切换点处的突变, 较小的谱半径 ($\rho = 0.5$) 可抑制因非光滑性导致的振荡放大。Chua 系统的正则化系数需取较大值 ($\lambda = 10^{-3}$) 以防止过拟合, 因为其训练集相对较小(3000 步)。两类系统采用不同参数组合的根本原因在于其内在动力学差异: 光滑系统允许较大谱半径以利用长时记忆, 而非光滑系统需要保守设置以保证稳定性。

相同网络规模下的补充对比: 为保证比较的公平性, 我们额外在相同的储备池规模 ($N = 500$) 和相同训练数据量(2600 步)下重新训练了 Chen 系统的 ESN, 并重复了同步实验。结果表明, 此时 Chen 系统的同步稳态误差从 2.1×10^{-3} 上升至 3.8×10^{-3} , 但仍优于 Chua 系统在相同规模下的表现 (4.5×10^{-3})。这说明即使排除网络规模因素, Chen 系统的同步性能仍然优于 Chua 系统, 进一步证实了系统光滑性对同步性能的积极影响。

3.2. 驱动 - 响应同步机制

同步方案遵循 Pecora 和 Carroll 提出的驱动 - 响应配置[3]。在此, 我们考虑一个经过训练的储备池计算机作为响应系统, 使其与一个未知的原始混沌驱动系统同步。核心思想是利用一个标量驱动信号来重构完整的混沌吸引子。

假设驱动系统是一个我们未知其方程但能测量其某些变量的混沌系统, 例如 Chen 系统。我们用其生成的完整状态

$$\mathbf{u}(t) = [x(t), y(t), z(t)]^T \quad (3.4)$$

对 ESN 进行训练。训练完成后, 我们进入同步阶段, 其动力学框架如下:

$$\mathbf{r}(t+1) = (1-\alpha)\mathbf{r}(t) + \alpha \tanh(\mathbf{W}\mathbf{r}(t) + \mathbf{W}_m [\mathbf{b}_m; x'(t), y(t), z'(t)]) \quad (3.5)$$

我们注意到, 输入向量 $\mathbf{u}'(t) = [x'(t), y(t), z'(t)]^T$ 中, 分量 $y(t)$ 来自驱动系统, 是强制性的驱动信号。

而分量 $x'(t)$ 和 $z'(t)$ 则由响应系统自身根据式(3.5)生成。此过程类似于用一个变量将响应系统的动力学“锚定”在驱动系统的轨迹上。根据混沌同步理论，同步的稳定性由响应子系统的条件 Lyapunov 指数决定。当所有横向条件 Lyapunov 指数均为负值时，响应系统的 $x'(t)$ 和 $z'(t)$ 将渐近收敛到驱动系统的 $x(t)$ 和 $z(t)$ ，实现完全同步。

3.3. 储备池间的级联同步

一个更为引人注目的现象是，同步可以在级联的储备池计算机之间传播。这意味着，我们可以利用一个已同步的储备池的输出，来驱动第二个未经训练的储备池，使其间接地与原始驱动系统同步。具体地，设 RC1 已通过上述驱动-响应配置与原始系统同步。我们构建第二个储备池 RC2，其动力学为：

$$r_2(t+1) = (1-\alpha)r_2(t) + \alpha \tanh(W_2 r_2(t) + W_{in,2} [b_{in}; x''(t), y'(t), z''(t)]) \quad (3.6)$$

此时，驱动信号 $y'(t)$ 不再直接来自原始系统，而是来自 RC1 的同步输出。根据文献[10]中所述的级联同步原理，如果 RC1 与驱动系统的同步误差足够小，且 RC2 自身的响应子系统稳定，那么 RC2 的轨迹 (x'', z'') 也将逐渐收敛到驱动系统的 (x, z) 。这一机制，连同多种复杂网络中存在的同步现象，揭示了网络拓扑结构对其同步能力的关键影响，通常与网络的平均度密切相关[11] [12]。

4. 数值模拟

本节通过数值实验展示并对比储备池计算机对 Chen 和 Chua 系统的同步预测能力。所有实验均基于 MATLAB 平台进行，数据由四阶 Runge-Kutta 法生成。

4.1. 短期预测性能验证

在构建同步方案之前，首先验证训练好的 ESN 对两类系统动力学的复现能力，即自主生成模式的准确性。我们使用均方根误差来量化预测精度。采用的超参数如下：对于 Chen 系统，储备池规模 $N = 1000$ ，泄漏率 $\alpha = 0.275$ ，谱半径 $\rho = 0.913$ ，训练长度 10,000 点；对于 Chua 系统， $N = 500$ ， $\alpha = 0.9$ ， $\rho = 0.5$ ，训练长度 3000 点。

图 5 和图 6 分别展示了 Chen 系统和 Chua 系统的短期预测结果。可以看出，对于光滑的 Chen 系统，ESN 能够长时间准确地复现混沌轨迹，其预测值与真实值在大约 10 个 Lyapunov 时间内高度吻合。而对于 Chua 系统，预测轨迹在一开始就能紧随真实轨迹，但由于其分段线性切换点处动力学的突然变化，预测误差的累积速度略快于 Chen 系统。

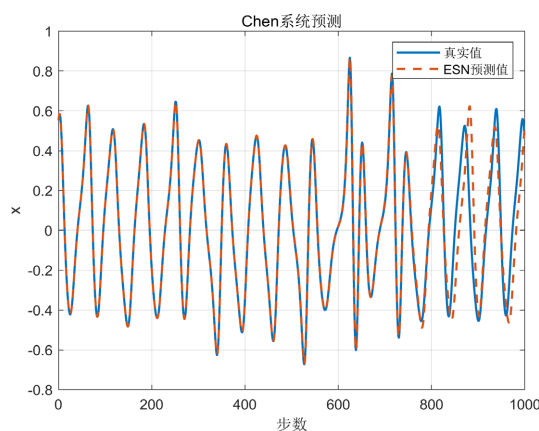


Figure 5. Short-term prediction of the Chen system
图 5. Chen 短期预测

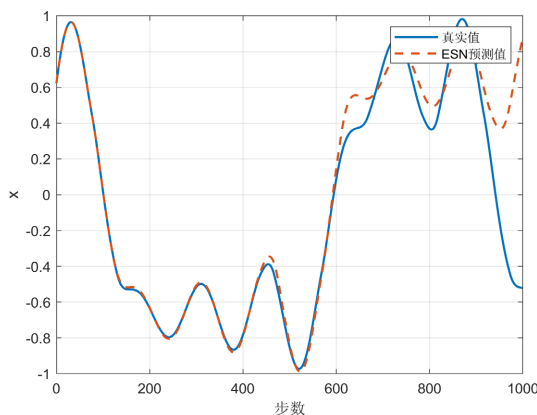


Figure 6. Short-term prediction of the Chua system
图 6. Chua 短期预测

4.2. 单端驱动同步实验

本实验是核心研究内容。我们分别用 Chen 系统的 y 分量和 Chua 系统的 x 分量作为驱动信号，观察响应 ESN 的其他变量能否与驱动系统同步。这种驱动分量的选择是基于能使各自响应子系统的最大条件 Lyapunov 指数为负的分量进行的。

实验结果显示，对于 Chen 系统，响应系统的 x' 和 z' 分量从随机的初始条件出发，如图 7，在极短的时间内便迅速收敛到驱动系统的真实轨迹上。误差信号快速下降到 10^{-3} 量级，实现了高精度的完全同步。这证明了光滑非线性流的良好同步特性。

对于 Chua 系统，我们也观察到了同步现象。然而，其同步收敛过程和最终精度呈现不同特点。如图 8 的误差曲线所示，在初始收敛阶段后，每当系统轨迹穿越非线性函数的切换点 $x = \pm 1$ 附近时，同步误差会出现明显的瞬时“尖峰”波动。尽管最终误差均值能维持在一个较低水平，但其方差显著大于 Chen 系统。这表明，分段线性系统向量场在切换点处的不连续性，对同步的瞬时精度构成了持续性的扰动。

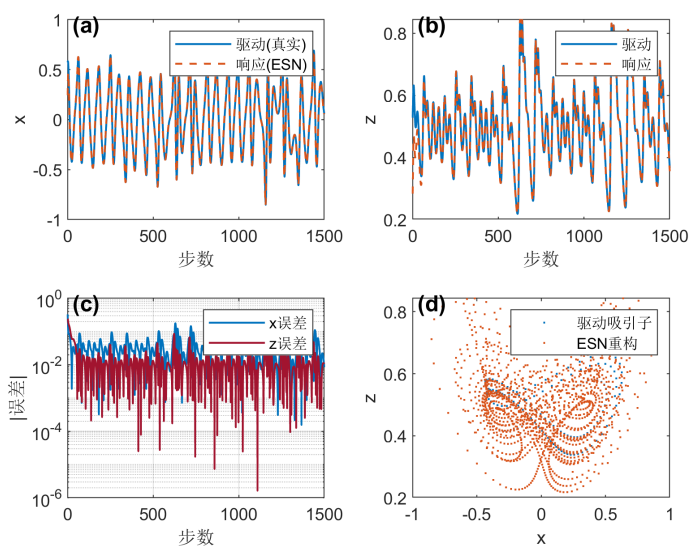


Figure 7. Unidirectional drive synchronization of the Chen system (a) x component, (b) z component, (c) synchronization error, (d) (x, z) phase portrait

图 7. Chen 系统单端驱动同步(a) x 分量对比, (b) z 分量对比, (c) 同步误差, (d) (x, z) 相图对比

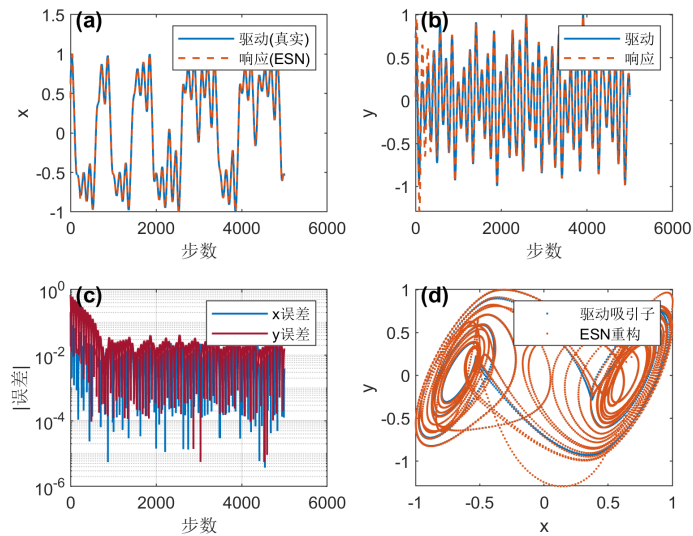


Figure 8. Unidirectional drive synchronization of the Chua system
图 8. Chua 系统单端驱动同步结果

4.3. 级联同步与误差传播分析

我们构建了一个由驱动系统、RC1、RC2 组成的三层级联结构，以验证同步的传递性。实验结果如图 9 和图 10 所示。

从图 9 可以看出，Chen 系统的级联同步非常成功。RC2 的变量 x'' 不仅与 RC1 的 x' 同步，并且最终与原始驱动系统的 x 保持了高度的一致性。级联总误差的稳态值尽管相较单级误差略有增加，但仍保持在同一数量级，体现了误差累积的平滑性和有限性。

相比之下，图 10 展示的 Chua 系统级联同步结果则揭示了更显著的误差放大效应。从误差演化图可以清楚看到，RC2 的总误差不仅是 RC1 误差的简单叠加，而且在切换点处，误差波动的幅度被显著放大，导致稳态下的误差均值明显更高，轨迹在某些时刻甚至出现短暂的失同步。这验证了“分段线性系统在涡卷切换点处误差突增，且级联误差累积更大”的推测。

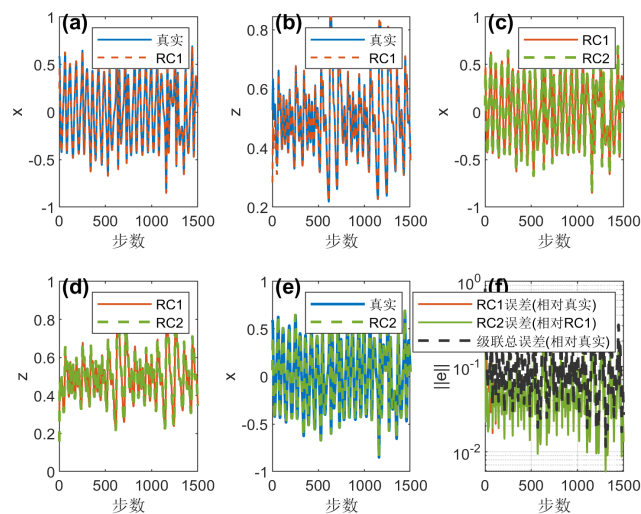


Figure 9. Cascade synchronization of the Chen system
图 9. Chen 系统级联同步结果

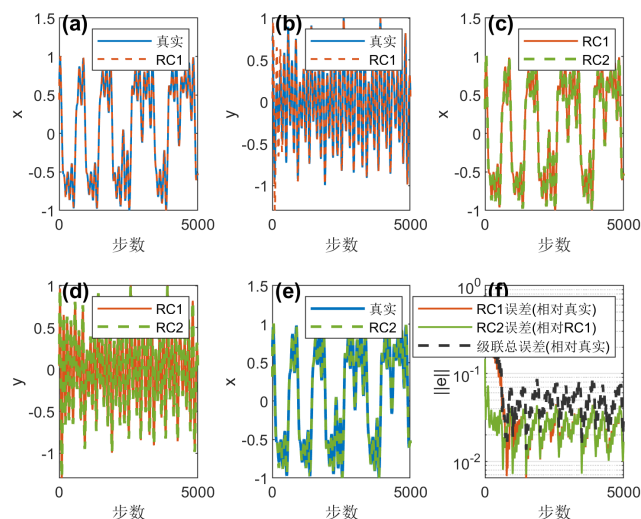


Figure 10. Cascade synchronization of the Chua system
图 10. Chua 系统级联同步结果

4.4. 参数不匹配下的鲁棒性测试

鲁棒性是评估一个同步方案实用价值的关键指标。在此，我们使用在标准参数下训练的 ESN，去同步一个参数发生偏移的驱动系统。对 Chen 系统，参数 c 从 28 变为 25；对 Chua 系统，参数 β 从 28 变为 20。实验结果分别在图 11 和图 12 中给出。

结果显示，经过短暂调整后，两类系统的储备池响应都能够与参数失配的驱动系统再次实现一种近似的、带有偏差的“广义同步”。然而，两者的鲁棒性程度有明显差异。对于 Chen 系统，即使在参数不匹配的情况下，同步误差仍然保持在较低的水平，且波形十分平滑。对于 Chua 系统，参数变化导致其吸引子结构发生更剧烈的变形，使得原本训练好的 ESN 需进行更大幅度的动力学“拉伸”以维持同步。结果，其同步误差不仅显著增大，而且再次呈现出与切换点紧密相关的、大幅度的振荡性波动，表明其同步状态对系统参数变化更为敏感。

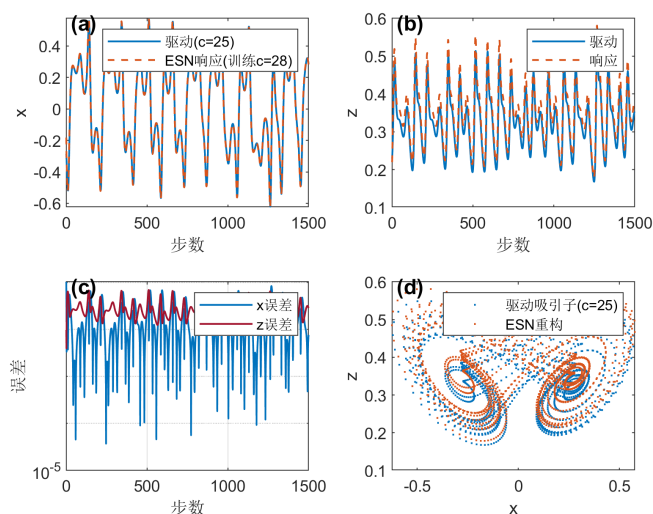


Figure 11. Parameter mismatch test for the Chen system
图 11. Chen 系统参数不匹配测试

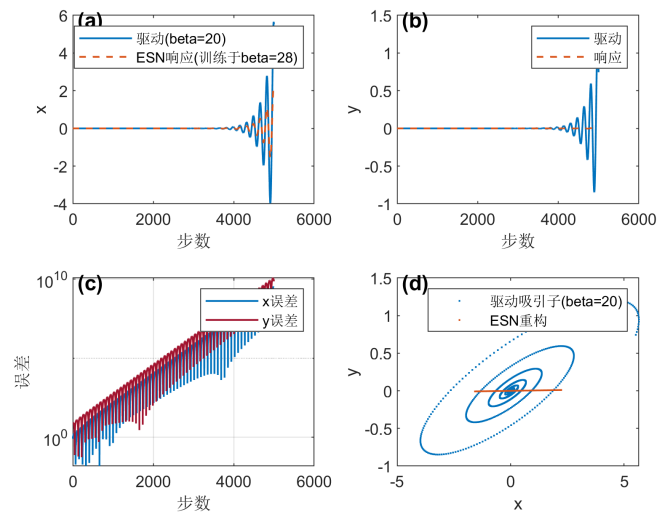


Figure 12. Parameter mismatch test for the Chua system
图 12. Chua 系统参数不匹配测试

5. 结果与讨论

5.1. 同步性能差异的动力学根源

本文的数值实验清晰地揭示：光滑 Chen 系统的同步收敛速度、级联误差抑制能力和参数鲁棒性均优于分段线性 Chua 系统。这一差异不能简单归因于网络容量或训练数据量，因为相同规模下的对比实验 ($N=1000$) 并未改变 Chua 系统在切换点处的误差尖峰特性。因此，我们进一步从两个系统的内在动力学特性出发进行分析。

(1) Lyapunov 指数谱的影响

Chen 系统的最大 Lyapunov 指数 $LLE \approx 2.02$ 显著大于 Chua 系统 $LLE \approx 0.33$ 。较大的 LLE 意味着系统对微小扰动的放大能力更强，但同时也意味着驱动信号的“信息注入”能够更快地压制横向自由度 - 响应系统的条件 Lyapunov 指数对驱动信号的敏感性更高。实际上，对于驱动 - 响应构型，同步收敛速率受限于响应子系统的最大 CLE。Chen 系统较强的整体不稳定性反而使得其受迫响应更迅速，这与文献[5]中“混沌系统可被混沌信号快速同步”的观测一致。Chua 系统的 LLE 较小，其动力学相对“温和”，驱动信号需要更长时间才能将响应系统拉向同步流形。

(2) 光滑性与同步流形连续性的关系

Chen 系统的向量场 C^∞ 光滑，其同步流形是光滑的子流形，储备池学习到的输入 - 输出映射可以任意逼近该流形。Chua 系统的向量场在 $x = \pm E$ 处仅分段连续且不可微，导致同步流形在这些截面处出现“褶皱”或非光滑折叠。当响应系统的轨迹穿越这些截面时，储备池的线性读出层难以精确逼近映射的局部突变，从而产生瞬时误差尖峰。这一现象类似于神经网络逼近不连续函数时在间断点附近的 Gibbs 现象，是有限参数线性组合逼近器的固有限制。

(3) 参数不匹配下的广义同步鲁棒性

当驱动系统参数偏移时，Chen 系统仍能维持较低的稳态误差，而 Chua 系统的同步误差显著增大并伴随剧烈振荡。这是因为 Chua 系统的吸引子结构对参数 β 变化更为敏感—— β 从 28 降至 20 时，其双涡卷的“高度”和连接轨道形状发生较大变形，而储备池训练的映射是基于原吸引子拓扑的，新吸引子的几何差异迫使响应系统进入一种“拉伸”状态，表现为大振幅误差振荡。

5.2. 局限性

尽管本文通过 Chen 与 Chua 系统的对比得出了有价值的结论，但仍存在以下局限性：

(1) **研究对象仅限于两个低维(三维)混沌系统**。实际工程中的复杂系统(如气候模型、神经网络、电力系统)往往具有更高维数(数十到数百维)或无穷维(延迟微分方程)，储备池计算在这些系统上的同步性能可能需要重新评估。

(2) **超参数优化依赖于网格搜索**，未采用更高效的贝叶斯优化或进化算法，且未考虑不同超参数之间的交互作用。对于分段线性系统，最优参数组合可能不是全局唯一的。

(3) 本文未将储备池同步与其它机器学习方法(如长短期记忆网络、Transformer)进行横向对比，因此无法断言 ESN 在非光滑系统同步问题上具有绝对优势。

(4) 所有实验均在数值仿真环境下进行，未考虑真实物理系统中存在的测量噪声、通信延迟和有限精度计算等非理想因素。实际部署时，同步性能可能会进一步下降。

5.3. 未来展望

基于上述局限性，未来研究可从以下几个方向展开。首先，将本文的对比框架推广到更高维的非光滑系统，例如分段线性化的 Lorenz'96 模型以及具有状态依赖切换特性的混杂系统，以检验“系统光滑性影响同步性能”这一结论的普适性，从而明确储备池计算在何种非线性结构下仍能保持优势、何种结构下可能失效。其次，在算法层面，可探索自适应超参数调节策略，如根据系统动态在线调整泄漏率或谱半径，或者针对分段线性系统的特性设计专门的非线性读出层，以更好地捕捉切换点附近的局部突变，缓解级联误差的快速放大。再次，有必要开展物理实验验证，在 FPGA 或微控制器上部署轻量化 ESN，对真实的 Chua 电路进行同步控制，实测噪声和通信延迟对同步精度的影响，为硬件化应用积累经验。最后，从理论角度，尝试建立储备池同步误差与系统不光滑度之间的定量关系，例如分析 Lipschitz 常数在切换点附近的突变幅度如何影响条件 Lyapunov 指数及同步流形的稳定性，从而为预先评估不同混沌系统的同步性能提供先验判据，指导实际应用中的系统选择与参数配置。

5.4. 结论

本文采用基于回声状态网络的储备池计算框架，系统对比了光滑 Chen 系统与分段线性 Chua 系统的无模型同步行为。主要结论如下：

- (1) ESN 能够有效实现两类系统的单端驱动同步、级联同步及参数不匹配下的广义同步。
- (2) 光滑系统的同步收敛速度更快、级联误差累积更小、参数鲁棒性更强。
- (3) 分段线性系统在切换点处会产生持续的误差尖峰，且该尖峰在级联传播中被显著放大。

这些差异的根源在于系统 Lyapunov 指数谱结构和同步流形光滑性的不同。本研究为机器学习辅助的混沌同步技术在复杂非线性系统中的应用提供了理论参考和实验依据。

基金项目

由大学生创新创业训练计划项目资金支持(项目编号：S202510710438)。

参考文献

- [1] Pecora, L.M. and Carroll, T.L. (1990) Synchronization in Chaotic Systems. *Physical Review Letters*, **64**, 821-824. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.64.821>
- [2] Cuomo, K.M. and Oppenheim, A.V. (1993) Circuit Implementation of Synchronized Chaos with Applications to Communications. *Physical Review Letters*, **71**, 65-68. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.71.65>

- [3] Boccaletti, S., Kurths, J., Osipov, G., Valladares, D.L. and Zhou, C.S. (2002) The Synchronization of Chaotic Systems. *Physics Reports*, **366**, 1-101. [https://doi.org/10.1016/s0370-1573\(02\)00137-0](https://doi.org/10.1016/s0370-1573(02)00137-0)
- [4] Rosenblum, M.G., Pikovsky, A.S. and Kurths, J. (1996) Phase Synchronization of Chaotic Oscillators. *Physical Review Letters*, **76**, 1804-1807. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.76.1804>
- [5] Pecora, L.M. and Carroll, T.L. (1991) Driving Systems with Chaotic Signals. *Physical Review A*, **44**, 2374-2383. <https://doi.org/10.1103/physreva.44.2374>
- [6] Kocarev, L. and Parlitz, U. (1996) Generalized Synchronization, Predictability, and Equivalence of Unidirectionally Coupled Dynamical Systems. *Physical Review Letters*, **76**, 1816-1819. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.76.1816>
- [7] Lorenz, E.N. (1963) Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**, 130-141. [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:dnf>2.0.co;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:dnf>2.0.co;2)
- [8] Jaeger, H. (2001) The “Echo State” Approach to Analysing and Training Recurrent Neural Networks. GMD Report 148, German National Research Center for Information Technology.
- [9] Lukoševičius, M. and Jaeger, H. (2009) Reservoir Computing Approaches to Recurrent Neural Network Training. *Computer Science Review*, **3**, 127-149. <https://doi.org/10.1016/j.cosrev.2009.03.005>
- [10] Pathak, J., Hunt, B., Girvan, M., Lu, Z. and Ott, E. (2018) Model-Free Prediction of Large Spatiotemporally Chaotic Systems from Data: A Reservoir Computing Approach. *Physical Review Letters*, **120**, Article 024102. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.120.024102>
- [11] Lu, Z., Pathak, J., Hunt, B., Girvan, M., Broomhead, R. and Ott, E. (2017) Reservoir Observers: Model-Free Inference of Unmeasured Variables in Chaotic Systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **27**, Article 041102. <https://doi.org/10.1063/1.4979665>
- [12] Canaday, D., Pomerance, A. and Gauthier, D.J. (2021) Synchronization of Chaotic Systems and Their Machine-Learning Models. *Physical Review E*, **99**, Article 042203.
- [13] Xiong, G.W., Cai, X.H., Weng, T.F. and Zhou, L. (2026) Synchronization of Reservoir Computers via Transmitting Invisible Signals. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **681**, Article 131076. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2025.131076>
- [14] Suetani, H. and Parlitz, U. (2026) Impact of Weak Generalized Synchronization on Time Series Forecasting Using Reservoir Computers. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **36**, Article 043125. <https://doi.org/10.1063/5.0283017>
- [15] Ahmed, O., Tennie, F. and Magri, L. (2025) Robust Quantum Reservoir Computers for Forecasting Chaotic Dynamics: Generalized Synchronization and Stability. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **481**, Article 20250550. <https://doi.org/10.1098/rspa.2025.0550>
- [16] 刘逸滔, 王聪, 张宏立, 等. 基于误差修正机制的储备池计算保密通信系统[J]. 计算机工程与设计, 2026, 47(2): 408-417.
- [17] 颜子翔, 吴越, 谢贵金, 高健, 杨虎江, 肖井华. 基于储备池计算的混沌扭摆数字孪生系统[J]. 大学物理, 2025, 44(4): 6-12.
- [18] Chua, L.O. (1994) Chua’s Circuit: An Overview Ten Years Later. *Journal of Circuits, Systems and Computers*, **4**, 117-159. <https://doi.org/10.1142/s0218126694000090>
- [19] Luo, H.B., Du, Y., Fan, H.W., Wang, X., Guo, J.Z. and Wang, X.G. (2024) Reconstructing Bifurcation Diagrams of Chaotic Circuits with Reservoir Computing. *Physical Review E*, **109**, Article 024210. <https://doi.org/10.1103/physreve.109.024210>
- [20] Chen, G. and Ueta, T. (1999) Yet Another Chaotic Attractor. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **9**, 1465-1466. <https://doi.org/10.1142/s0218127499001024>