

指数保费准则下基于Ornstein-Uhlenbeck过程的比例再保险与投资

郭诗颖

福建师范大学数学与统计学院, 福建 福州

收稿日期: 2026年5月13日; 录用日期: 2026年6月7日; 发布日期: 2026年6月16日

摘要

本文研究了风险资产价格受Ornstein-Uhlenbeck过程影响下的最优投资与比例再保险问题。保险公司通过购买比例再保险, 并将其财富投资于由无风险资产和风险资产构成的金融市场。采用扩散逼近模型刻画保险风险, 并假设再保险保费按指数保费准则计算, 同时考虑保险市场与金融市场之间存在相关性。保险公司的目标是最大化其终端财富的期望指数效用, 应用随机控制理论和HJB方程, 我们推导出了值函数与最优策略。最后, 通过数值分析验证了模型参数对最优策略的影响。

关键词

指数保费准则, 比例再保险, 指数效用, Ornstein-Uhlenbeck过程

Proportional Reinsurance and Investment Based on the Ornstein-Uhlenbeck Process under the Exponential Premium Principle

Shiyong Guo

School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou Fujian

Received: May 13, 2026; accepted: June 7, 2026; published: June 16, 2026

Abstract

This paper investigates the optimal investment and proportional reinsurance problem when the price of the risky asset follows an Ornstein-Uhlenbeck process. The insurance company purchases proportional reinsurance and invests its wealth in a financial market consisting of a risk-free asset and a risky asset. The insurance risk is modeled using a diffusion approximation approach. The

reinsurance premium is calculated under the exponential premium principle, and the correlation between the insurance market and the financial market is taken into account. The insurer aims to maximize the expected exponential utility of terminal wealth. By applying stochastic control theory and the Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation, we derive the value function and the optimal strategy. Finally, numerical analysis is conducted to illustrate the impact of model parameters on the optimal strategy.

Keywords

Exponential Premium Principle, Proportional Reinsurance, Exponential Utility, Ornstein-Uhlenbeck Process

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

再保险与投资作为保险公司风险管理与资本增值的两大核心手段，长期以来一直是精算数学与金融工程领域的研究焦点。在经典的风险管理框架中，保险人通过再保险合同将部分承保风险转移给再保险人，同时利用金融市场投资提升盈利能力并分散经营风险。早期的研究，如 Browne [1]研究了保险公司在不可控随机现金流下，以最大化最终财富和最小化破产概率为目标的最优投资策略。此后，大量学者围绕不同优化目标下的再保险与投资策略展开了深入研究，包括均值-方差准则(Zeng and Li, 2011 [2])以及破产概率最小化(David Promislow and Young, 2005 [3])等。

在风险定价方面，再保险保费准则的选择至关重要。尽管期望值保费准则和方差保费准则因其计算简便而被广泛采用，但在刻画风险厌恶特性方面存在一定局限。本文采用在数学性质上更具优势的指数保费原则(亦称零效用原则)。该原则不仅满足独立风险的可加性，而且能够自然刻画保险人的风险厌恶偏好。Young 和 Zariphopoulou (2002, 2003) [4] [5]以及 Musiela 和 Zariphopoulou (2004) [6]的研究进一步展示了该原则在动态保险风险定价与金融资产评估中的理论优势。指数保费准则下的近期研究见文[7]。

在金融市场建模方面，传统的几何布朗运动难以刻画风险资产价格的均值回归特性。因此，Ornstein-Uhlenbeck (OU)过程逐渐被用于描述具有均值回复特征的利率、波动率及风险资产价格 Liang 等人(2011) [8]在 OU 过程驱动的金融市场中研究了保险公司的最优投资与比例再保险策略问题。在此基础上，Li 等人(2022) [9]进一步在该框架下引入股息、交易成本以及净利润条件等因素，对保险公司的最优投资与再保险策略进行了扩展研究。然而，现有研究多假设保险市场与金融市场相互独立，这在实际中可能低估由系统性风险引发的相关性影响。

基于上述研究背景，本文在风险资产价格由 Ornstein-Uhlenbeck 过程驱动的框架下，采用扩散逼近模型刻画保险公司的盈余过程，并考虑保险风险与金融市场波动之间存在相关性，研究了指数保费准则下的最优再保险和投资问题。利用 Fleming 和 Soner (2006) [10]提出的随机控制理论与动态规划方法，建立相应的 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)方程，推导出在终端财富期望指数效用最大化目标下保险公司最优投资与比例再保险策略的显式表达式。与现有研究不同，本文进一步引入了保险风险与金融市场之间的相关性，并分析该相关性对最优再保险比例和投资策略的影响。

2. 模型的建立

在经典风险模型下，盈余过程 X_t 由下式给出

$$X_t = x + ct - S_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

其中 x 为初始盈余, c 为单位时间的保险费率, 索赔数过程 N_t 是一个强度为 λ 的齐次泊松过程, $\{Y_i, i \geq 1\}$ 是一个正的、独立同分布的索赔额随机变量序列, 具有共同的分布 $F(y)$ 。用 $M_Y(r) = E(e^{rY})$ 表示 Y 的矩母函数。通常, 我们假设索赔数过程 N_t 独立于索赔额 Y_i , 并且存在 $0 < \zeta \leq +\infty$ 使得 $\lim_{r \rightarrow \zeta} E(Ye^{rY}) = +\infty$, 且对于 $0 < r < \zeta$, $E(Ye^{rY}) = M_Y'(r)$ 存在。

再保险是保险人向再保险人支付保险费, 再保险人承担保险人相应损失的一种商业合同。将总索赔 S_t 按比例分为两个部分, 保险公司占比 $q \in [0, 1]$, 再保险公司占比 $1 - q$, 那么保险公司应付索赔额为 $S_1(t) = \sum_{i=1}^{N_t} qY_i$, 再保险公司应付索赔额为 $S_2(t) = \sum_{i=1}^{N_t} (1 - q)Y_i$ 。我们假设保险人和再保险人都根据指数保费准则收取保险费, 但有不同的安全负荷。即 $c = \beta_1^{-1} \lambda [M_Y(\beta_1) - 1]$, $\delta(q) = \beta_2^{-1} \lambda [M_Y(\beta_2(1 - q)) - 1]$, 其中 β_1 ($\beta_1 > 0$) 是保险公司的安全载荷, β_2 ($\beta_2 > 0$) 是再保险公司的安全载荷。

记 $E[Y_i] = \mu < \infty$ 和 $E[Y_i^2] = \sigma^2 < \infty$, 所以保险公司盈余过程的近似扩散可以表示为 $dX(t) = [c - \delta(q) - \lambda q \mu] dt + q \sqrt{\lambda} \sigma dB_t$, 其中 dB_t 是标准布朗运动。

我们假设保险公司是风险厌恶型的, 其效用函数为 $U(x)$ 满足 $U'(x) > 0$ 且 $U''(x) < 0$ 。需要注意的是, 由于保险业务的存在, 保险人的盈余有正的概率可能为负。因此, 我们采用具有恒定绝对风险厌恶系数的指数效用函数, 即: $U(x) = -\frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma x)$, 其中 $\gamma > 0$ 为恒定绝对风险厌恶系数。

3. 扩散逼近风险模型下的最优策略和值函数

在本文中, 我们允许保险公司将盈余投资于风险资产和无风险资产。假设无风险资产的价格过程为: $dP_0(t) = rP_0(t)dt$, 其中 $r > 0$ 是无风险利率。风险资产的价格过程为: $dP(t) = P(t)[a(t)dt + b dW_1(t)]$, 其中 $a(t) = a + m(t)$, $m(t)$ 是 $dm(t) = \alpha m(t)dt + \beta dW_2(t)$ 的解, a, b, α 和 β 是已知常数, 且 $a, b > 0$ 。

假设 B_t 与 $W_2(t)$ 相互独立, 但 B_t 与 $W_1(t)$, $W_1(t)$ 与 $W_2(t)$ 不独立, 且 $Cov(W_1(t), W_2(t)) = \rho_1 t$, $Cov(B_t, W_1(t)) = \rho_2 t$, $t \geq 0$ 。

设 π_t 为 t 时刻投资在风险资产的总额, 则盈余过程可以改写为

$$\begin{cases} dX_t^{\pi, q} = [rX_t^{\pi, q} + (m(t) + a - r)\pi_t + c - \delta(q) - \lambda q \mu] dt + q \sqrt{\lambda} \sigma dB_t + b \pi_t dW_1(t), \\ dm(t) = \alpha m(t) dt + \beta dW_2(t), m(0) = m_0. \end{cases}$$

现在, 我们考虑保险公司终端财富期望效用最大化的最优再保险问题, 值函数为

$$V(t, x, m) = \sup_{\pi, q} E[U(X_T) | (X_t, m(t)) = (x, m)]. \quad (1)$$

命题 1 由(1)式定义的 $V(t, x, m)$ 满足 $V(t, x, m) < 0$, $V_x > 0$, $V_{xx} < 0$ 。

证明 类似于 Zhou, Yuen 和 Yin (2017) [11] 的定理 3.1 中采用的证明方法即可得, 我们在此省略其证明。

为了解决问题(1), 我们采用由 Fleming 和 Soner (2006) [10] 所描述的动态规划原理技术。可以证明, 值函数满足以下 HJB 方程:

$$\sup_{q, \pi} \mathcal{A}^{q, \pi} V(t, x) = 0, \quad (2)$$

其中算子

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{q,\pi}V(t,x) = & V_t + [rx + (m+a-r)\pi + c - \delta(q) - \lambda q\mu]V_x + \alpha mV_m \\ & + \frac{1}{2}[\pi^2 b^2 + q^2 \lambda \sigma^2 + 2\pi b \rho_2 q \sqrt{\lambda} \sigma]V_{xx} + \frac{1}{2}\beta^2 V_{mm} + b\pi\beta\rho_1 V_{xm}, \end{aligned}$$

其终端条件为

$$V(T, x, m) = U(x). \quad (3)$$

定理 2 (验证定理) 设 $W(t, x, m) \in C^{1,2,2}([0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ 是满足(2)和(3)的一个解, 则对于所有的 (t, x, m) , 有 $W(t, x, m) = V(t, x, m)$ 。此外, 如果存在可容许策略 (q^*, π^*) 使得对于所有 (t, x, m) , 有

$$\mathcal{A}^{q^*, \pi^*} W(t, x, m) = 0,$$

则策略 (q^*, π^*) 为最优的投资和再保险策略, 即 $E[U(X_T^*) | (X_t^*, m(t)) = (x, m)] = V(t, x, m)$, 这里 X_T^* 是最优策略下的盈余过程。

假设值函数有如下形式:

$$V(t, x, m) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma k(t)x + H(t, m)}, \quad (4)$$

其中 $k(t) = e^{r(T-t)}$ 。因为 $V(T, x, m) = U(x)$, 故 $H(T, m) = 0$ 。设 H_t, H_m, H_{mm} 为 $H(t, m)$ 的偏导数, 由(4)可得,

$$\begin{cases} V_x = \frac{\partial V}{\partial x} = -\gamma k(t)V, \\ V_{xx} = \gamma^2 k(t)^2 V, \\ V_m = H_m V, \\ V_{mm} = (H_{mm} + H_m^2)V, \\ V_{xm} = \frac{\partial}{\partial x}(VH_m) = -\gamma k H_m V, \\ V_t = (-\gamma k'(t)x + H_t)V. \end{cases} \quad (5)$$

将(5)逐项代入(2)中, 把公共因子 V 消掉, 得到化简后的 HJB 方程为

$$\begin{aligned} \inf_{q,\pi} \left\{ & H_t - (m+a-r)\pi\gamma k(t) - c\gamma k(t) + \delta(q)\gamma k(t) + \lambda q\mu\gamma k(t) + H_m\alpha m + \frac{1}{2}\pi^2 b^2 \gamma^2 k^2(t) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}q^2 \lambda \sigma^2 \gamma^2 k^2(t) + \pi b \rho_2 q \sqrt{\lambda} \sigma \gamma^2 k^2(t) + \frac{1}{2}\beta^2 [H_m^2 + H_{mm}] - b\pi\beta\rho_1 H_m \gamma k(t) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

对(6)分别关于 q, π 求偏导, 并令其为 0, 得到

$$\begin{cases} \delta'(q)\gamma k(t) + \lambda\mu\gamma k(t) + q\lambda\sigma^2\gamma^2 k^2(t) + \pi b\rho_2\sigma\sqrt{\lambda}\gamma^2 k^2(t) = 0, \\ -(m+a-r)\gamma k(t) + \pi b^2\gamma^2 k^2(t) + b\rho_2 q\sqrt{\lambda}\sigma\gamma^2 k^2(t) - b\beta\rho_1 H_m \gamma k(t) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

由于 $\delta'(q) = -\lambda M'_y(\beta_2(1-q))$, (7)化简为:

$$\begin{cases} \lambda M'_y(\beta_2(1-q^*)) = \lambda\mu + \frac{\rho_2\sqrt{\lambda}\sigma}{b}(m+a-r+b\beta\rho_1 H_m) + [\lambda\sigma^2\gamma k(t) - \rho_2^2\lambda\sigma^2\gamma k(t)]q^*, \\ \pi^* = \frac{m+a-r+b\beta\rho_1 H_m}{b^2\gamma k(t)} - \frac{\rho_2\sqrt{\lambda}\sigma}{b}q^*. \end{cases} \quad (8)$$

引理 1 对 $\forall t \in [0, T]$, (8) 存在唯一解 $q^*(t) \in [0, 1]$, $\pi^*(t) \in R$ 。

证明 只需要证存在唯一的 $q^*(t) \in [0, 1]$ 。令

$$f(q) = \lambda M'_Y(\beta_2(1-q)) - \lambda\mu - \frac{\rho_2\sqrt{\lambda}\sigma}{b}(m+a-r+b\beta\rho_1H_m) - [\lambda\sigma^2\gamma k(t) - \rho_2^2\lambda\sigma^2\gamma k(t)]q. \quad (9)$$

对(9)求导, 得到

$$\begin{aligned} f'(q) &= -\beta_2\lambda M''_Y(\beta_2(1-q)) - (\lambda\sigma^2\gamma k(t) - \rho_2^2\lambda\sigma^2\gamma k(t)) \\ &= -[\beta_2\lambda M''_Y(\beta_2(1-q)) + \lambda\sigma^2\gamma k(t)(1-\rho_2^2)] < 0. \end{aligned}$$

从而 $f(q)$ 是单调递减的。接下来看 $f(0)$, $f(1)$ 的取值。对(9)分别令 $q=0$ 和 $q=1$, 得

$$\begin{aligned} f(0) &= \lambda M'_Y(\beta_2) - \lambda\mu - \frac{\rho_2\sqrt{\lambda}\sigma}{b}(m+a-r+b\beta\rho_1H_m) \\ &= \lambda[M'_Y(\beta_2) - \mu] - \frac{\rho_2\sqrt{\lambda}\sigma}{b}(m+a-r+b\beta\rho_1H_m), \\ f(1) &= -\frac{\rho_2\sqrt{\lambda}\sigma}{b}(m+a-r+b\beta\rho_1H_m) - \lambda\sigma^2\gamma k(t)(1-\rho_2^2). \end{aligned}$$

分两种情况进行讨论:

(1) 当 $\frac{\rho_2\sqrt{\lambda}\sigma}{b}(m+a-r+b\beta\rho_1H_m) \leq 0$ 时, $f(0) > 0$ 。现在考虑 $f(1)$ 的取值情况, 此时需比较 $-\frac{\rho_2\sqrt{\lambda}\sigma}{b}(m+a-r+b\beta\rho_1H_m)$ 和 $\lambda\sigma^2\gamma k(t)(1-\rho_2^2)$ 的大小。

若 $-\frac{\rho_2\sqrt{\lambda}\sigma}{b}(m+a-r+b\beta\rho_1H_m) \geq \lambda\sigma^2\gamma k(t)(1-\rho_2^2)$, 此时 $f(1) \geq 0$, 则取 $q^*(t) = 1$ 。

若 $-\frac{\rho_2\sqrt{\lambda}\sigma}{b}(m+a-r+b\beta\rho_1H_m) < \lambda\sigma^2\gamma k(t)(1-\rho_2^2)$, 此时 $f(1) < 0$, 则存在唯一的 $q^*(t) \in (0, 1)$ 。

(2) 当 $\frac{\rho_2\sqrt{\lambda}\sigma}{b}(m+a-r+b\beta\rho_1H_m) > 0$ 时, $f(1) < 0$, 现在考虑 $f(0)$ 的取值情况, 此时需比较 $\lambda[M'_Y(\beta_2) - \mu]$ 和 $\frac{\rho_2\sqrt{\lambda}\sigma}{b}(m+a-r+b\beta\rho_1H_m)$ 的大小。

若 $\lambda[M'_Y(\beta_2) - \mu] > \frac{\rho_2\sqrt{\lambda}\sigma}{b}(m+a-r+b\beta\rho_1H_m)$, 此时 $f(0) > 0$, 则存在唯一的 $q^*(t) \in (0, 1)$ 。

若 $\lambda[M'_Y(\beta_2) - \mu] \leq \frac{\rho_2\sqrt{\lambda}\sigma}{b}(m+a-r+b\beta\rho_1H_m)$, 此时 $f(0) \leq 0$, 则取 $q^*(t) = 0$ 。

定理 3 (4) 式中的 $H(t, m)$ 具有如下表达式

$$H(t, m) = Q(t)m^2 + J(t)m + L(t), t \in [0, T], \quad (10)$$

其中 $Q(t), J(t), L(t)$ 分别由(15), (18)和(20)给出, 其终端条件为

$$Q(T) = J(T) = L(T) = 0. \quad (11)$$

证明 由(10)及 $H(T, m) = 0$, 知(11)成立。将

$$\begin{cases} H_t = Q'(t)m^2 + J'(t)m + L'(t), \\ H_m = 2mQ(t) + J(t), \\ H_{mm} = 2Q(t), \end{cases}$$

代入 HJB 方程(6)得到

$$\begin{aligned}
& Q'(t)m^2 + J'(t)m + L'(t) - (m+a-r)\pi^* \gamma k(t) - c\gamma k(t) + \delta(q^*) \gamma k(t) + \lambda q^* u \gamma k(t) \\
& + 2\alpha m^2 Q(t) + \alpha m J(t) + \frac{1}{2} \pi^{*2} b^2 \gamma^2 k^2(t) + \frac{1}{2} q^{*2} \lambda \sigma^2 \gamma^2 k^2(t) + \pi^* b \rho_2 q^* \sqrt{\lambda} \sigma \gamma^2 k^2(t) \\
& + 2m^2 \beta^2 Q^2(t) + 2m\beta^2 Q(t)J(t) + \frac{1}{2} \beta^2 J^2(t) + \beta^2 Q(t) - 2mb\pi^* \beta \rho_1 \gamma k(t) Q(t) n \\
& - b\pi^* \beta \rho_1 \gamma k(t) J(t) = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

q^* 和 π^* 如引理 1 所述, 记 $A = \frac{1+2b\beta\rho_1 Q(t)}{b^2 \gamma k(t)}$, $B = \frac{a-r+b\beta\rho_1 J(t)-b\rho_2 \sqrt{\lambda} \sigma \gamma k(t) q^*}{b^2 \gamma k(t)}$,

则

$$\begin{aligned}
\pi^* &= \frac{m+a-r+b\beta\rho_1 H_m}{b^2 \gamma k(t)} - \frac{\rho_2 \sqrt{\lambda} \sigma}{b} q^* \\
&= \frac{m(1+2b\beta\rho_1 Q(t))}{b^2 \gamma k(t)} + \frac{a-r+b\beta\rho_1 J(t)-b\rho_2 \sqrt{\lambda} \sigma \gamma k(t) q^*}{b^2 \gamma k(t)} \\
&= mA + B.
\end{aligned}$$

将 q^* 和 π^* 代入(12), 化简并根据 m 的次方重新调整, 得到

$$\begin{aligned}
& \left[Q'(t) - A\gamma k(t) + 2\alpha Q(t) + \frac{1}{2} A^2 b^2 \gamma^2 k^2(t) + 2\beta^2 Q^2(t) - 2Ab\beta\rho_1 \gamma k(t) Q(t) \right] m^2 \\
& + \left[J'(t) - B\gamma k(t) - (a-r)A\gamma k(t) + \alpha J(t) + b^2 \gamma^2 k^2(t) AB + Ab\rho_2 q^* \sqrt{\lambda} \sigma \gamma^2 k^2(t) \right. \\
& \left. + 2\beta^2 Q(t)J(t) - 2Bb\beta\rho_1 \gamma k(t) Q(t) - Ab\beta\rho_1 \gamma k(t) J(t) \right] m \\
& + \left[L'(t) - B(a-r)\gamma k(t) - c\gamma k(t) + \delta(q^*) \gamma k(t) + \lambda q^* u \gamma k(t) + \frac{1}{2} B^2 b^2 \gamma^2 k^2(t) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} q^{*2} \lambda \sigma^2 \gamma^2 k^2(t) + Bb\rho_2 q^* \sqrt{\lambda} \sigma \gamma^2 k^2(t) + \frac{1}{2} \beta^2 J^2(t) + \beta^2 Q(t) - Bb\beta\rho_1 \gamma k(t) J(t) \right] = 0.
\end{aligned}$$

为了使上述等式对于所有可能 m 均成立, 根据多项式恒等定理, 关于 m^2, m 和常数项的系数必须分别严格为零。然而由(8)可知, 最优再保险策略 q^* 并非显式给出, 而是一个隐式函数, 更重要的是, q^* 的求解依赖于 H_m , 这意味着 q^* 与 m 产生了非线性耦合。在指数保费与 OU 过程的联合框架下, 直接进行全局变量分离存在困难。因此, 为了推导常微分方程, 我们在分离变量时对 q^* 进行了解耦处理, 将其视为在给定初始状态下, 通过数值寻根算法局部计算得到的最优参数。这一处理既保证了 HJB 方程降维分解的理论可行性, 也为第 4 节采用数值逼近算法求解隐式方程提供了直接依据。

基于此, 我们可以得到 $Q(t), J(t), L(t)$ 满足的如下三个常微分方程:

$Q(t)$ 是下列微分方程

$$Q'(t) - A\gamma k(t) + 2\alpha Q(t) + \frac{1}{2} A^2 b^2 \gamma^2 k^2(t) + 2\beta^2 Q^2(t) - 2Ab\beta\rho_1 \gamma k(t) Q(t) = 0 \tag{13}$$

的解。将 A, B 代入(13)并化简, 得

$$Q'(t) + 2\beta^2 (1 - \rho_1^2) Q^2(t) + 2 \left(\alpha - \frac{\beta \rho_1}{b} \right) Q(t) - \frac{1}{2b^2} = 0. \tag{14}$$

令 $D = 2\beta^2 (1 - \rho_1^2)$, $E = 2 \left(\alpha - \frac{\beta \rho_1}{b} \right)$, $C = -\frac{1}{2b^2}$, (14) 是一个 $E^2 - 4DC > 0$ 的正规黎卡提方程, 使用标准方法可以得到带有终端条件 $K(T) = 0$ 的解为

$$Q(t) = C_1 + \frac{e^{t\sqrt{E^2-4DC}}}{\frac{D}{\sqrt{E^2-4DC}}(e^{t\sqrt{E^2-4DC}} - e^{T\sqrt{E^2-4DC}}) - \frac{1}{C_1}e^{T\sqrt{E^2-4DC}}}, \quad (15)$$

其中 $C_1 = \frac{-E - \sqrt{E^2 - 4DC}}{2D}$ 。

$J(t)$ 是下列微分方程

$$J'(t) - B\gamma k(t) - (a-r)A\gamma k(t) + \alpha J(t) + b^2\gamma^2 k^2(t)AB + Ab\rho_2 q^* \sqrt{\lambda}\sigma\gamma^2 k^2(t) + 2\beta^2 Q(t)J(t) - 2Bb\beta\rho_1\gamma k(t)Q(t) - Ab\beta\rho_1\gamma k(t)J(t) = 0 \quad (16)$$

的解。将 A, B 代入(16)并化简, 得

$$J'(t) + \left[\alpha - \frac{\beta\rho_1}{b} J(t) + 2\beta^2(1-\rho_1^2)Q(t) \right] J(t) + \left[2\beta\rho_1\rho_2\sqrt{\lambda}\sigma\gamma k(t)q^* - \frac{2(a-r)\beta\rho_1}{b} \right] Q(t) + \frac{\rho_2 q^* \sqrt{\lambda}\sigma\gamma k(t)}{b} - \frac{a-r}{b^2} = 0. \quad (17)$$

令

$$p(t) = 2Q(t)\beta^2(1-\rho_1^2) + \alpha - \frac{\beta\rho_1}{b},$$

$$q(t) = \left[2\beta\rho_1\rho_2\sqrt{\lambda}\sigma\gamma k(t)q^* - \frac{2(a-r)\beta\rho_1}{b} \right] Q(t) + \frac{\rho_2 q^* \sqrt{\lambda}\sigma\gamma k(t)}{b} - \frac{a-r}{b^2}.$$

求解(17), 得

$$J(t) = -e^{\int_t^T p(s)ds} \int_t^T q(s)e^{-\int_t^s p(u)du} ds. \quad (18)$$

$L(t)$ 是下列微分方程

$$L'(t) - B(a-r)\gamma k(t) - c\gamma k(t) + \delta(q^*)\gamma k(t) + \lambda q^* \mu\gamma k(t) + \frac{1}{2}B^2b^2\gamma^2 k^2(t) + \frac{1}{2}q^{*2}\lambda\sigma^2\gamma^2 k^2(t) + Bb\rho_2 q^* \sqrt{\lambda}\sigma\gamma^2 k^2(t) + \frac{1}{2}\beta^2 J^2(t) + \beta^2 Q(t) - Bb\beta\rho_1\gamma k(t)J(t) = 0 \quad (19)$$

的解。将 A, B 代入(19)并化简, 得

$$L'(t) + M(t) + \frac{1}{2}\beta^2(1-\rho_1^2)J^2(t) + \beta^2 Q(t) + \left[\beta\rho_1\rho_2\sqrt{\lambda}\sigma\gamma k(t)q^* - \frac{(a-r)\beta\rho_1}{b} \right] J(t) = 0,$$

其中

$$M(t) = \gamma k(t) \left[-\frac{(a-r)^2}{2b^2} - c + \delta(q^*) + \lambda q^* \mu \right] + \frac{(1-\rho_2^2)\lambda\sigma^2\gamma^2 k^2(t)q^{*2}}{2} + \frac{(a-r)\rho_2 q^* \sqrt{\lambda}\sigma\gamma k(t)}{b}.$$

故

$$L(t) = \int_t^T \left[M(t) + \frac{1}{2}\beta^2(1-\rho_1^2)J^2(t) + \beta^2 Q(t) + \left[\beta\rho_1\rho_2\sqrt{\lambda}\sigma\gamma k(t)q^* - \frac{(a-r)\beta\rho_1}{b} \right] J(t) \right] ds. \quad (20)$$

下面给出本文的主要结果。

定理 4 值函数为

$$V(t, x, m) = -\frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma x k(t) + H(t, m)),$$

其中 $H(t, m)$ 见定理 3, 最优再保险和投资组合策略 (q^*, π^*) 如引理 1 所述。

证明 容易验证 $V(t, x, m)$ 及 (q^*, π^*) 满足验证定理的所有条件, 得证。

4. 数值分析

在本节中, 我们通过数值方法考察模型中关键参数对最优再保险策略和最优投资策略的影响。由于最优再保险比例 $q^*(t)$ 由一类非线性隐式方程刻画, 一般情况下不存在解析解, 因此本文采用数值方法对其进行求解, 并在此基础上进一步计算最优投资策略 $\pi^*(t)$ 。

在整个数值分析过程中, 时间区间取为 $[0, T]$, 并对时间进行均匀离散。对于给定参数和状态变量, 在每一个离散时刻, 利用数值求根方法求解最优再保险比例 $q^*(t)$, 随后将其代入最优投资策略的显式表达式中, 得到对应的最优投资策略 $\pi^*(t)$ 。除特别说明外, 基本参数固定为: $\lambda = 1$, $\mu = 12$, $\sigma = 1$, $a = 0.2$, $b = 0.5$, $\rho_1 = 0.2$, $\rho_2 = 0.3$, $\beta = 0.5$, $m = 0.2$, $T = 2$ 。

4.1. 风险厌恶系数对最优再保险策略的影响

首先考察风险厌恶系数 γ 对最优再保险策略 $q^*(t)$ 的影响。图 1 给出了在不同风险厌恶系数 $\gamma \in \{0.6, 0.8, 1\}$ 下, 最优自留比例 $q^*(t)$ 随时间的变化情况。

从图 1 可以看出, 随着风险厌恶系数 γ 的增大, 最优自留比例 $q^*(t)$ 整体呈下降趋势。这表明风险厌恶程度越高, 保险公司越倾向于通过再保险转移保险风险, 从而降低自身承担的索赔风险。该结果符合经济直觉: 当保险公司对风险更加敏感时, 其最优决策是减少风险暴露, 增加对再保险的依赖。

此外, 不同 γ 下的 $q^*(t)$ 随时间变化趋势基本一致, 说明风险厌恶系数主要影响自留比例的整体水平, 而不会显著改变其随时间演化的结构特征。

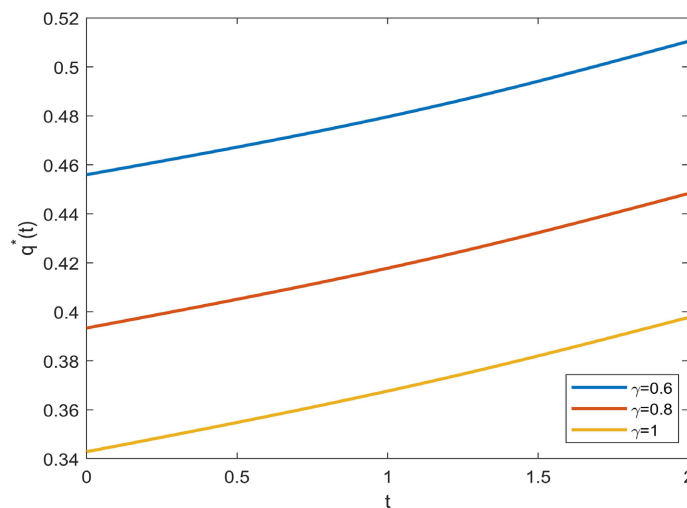


Figure 1. Effect of risk aversion γ on optimal reinsurance $q^*(t)$

图 1. 风险厌恶系数 γ 对最优再保险策略 $q^*(t)$ 的影响

4.2. 风险厌恶系数对最优投资策略的影响

接下来分析风险厌恶系数 γ 对最优投资策略 $\pi^*(t)$ 的影响。图 2 描述了在 $\gamma \in \{0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$ 取值

下，最优投资策略随时间的变化情况。

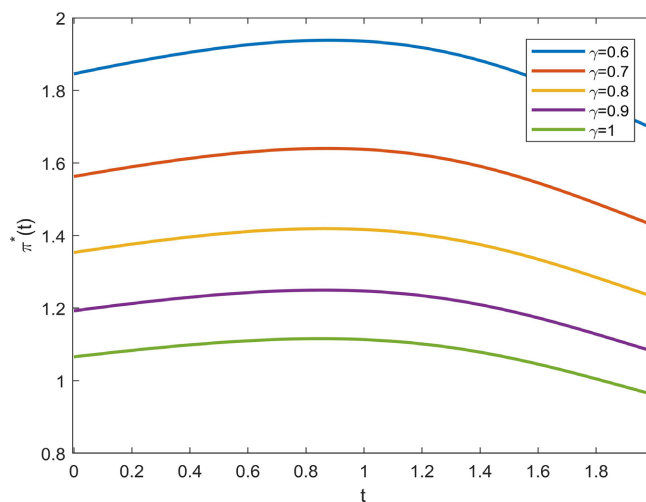


Figure 2. Effect of risk aversion γ on optimal investment $\pi^*(t)$

图 2. 风险厌恶系数 γ 对最优投资策略 $\pi^*(t)$ 的影响

从图 2 可以观察到，随着风险厌恶系数的增加，最优投资策略 $\pi^*(t)$ 显著下降，即保险公司在风险资产中的最优投资比例随风险厌恶程度的提高而减少，这一结果与经典投资组合理论的结论一致：风险厌恶程度越高，投资者越倾向于规避金融市场风险，从而减少对风险资产的配置。

同时可以发现，在不同 γ 下， $\pi^*(t)$ 随时间呈现出相似的非单调变化趋势，这反映了有限投资期限以及风险资产收益过程均值回复特性的共同作用。

4.3. 再保险安全载荷对最优投资策略的影响

图 3 展示了再保险公司安全载荷参数 $\beta_2 \in \{0.5, 0.55, 0.6\}$ 对最优投资策略 $\pi^*(t)$ 的影响。

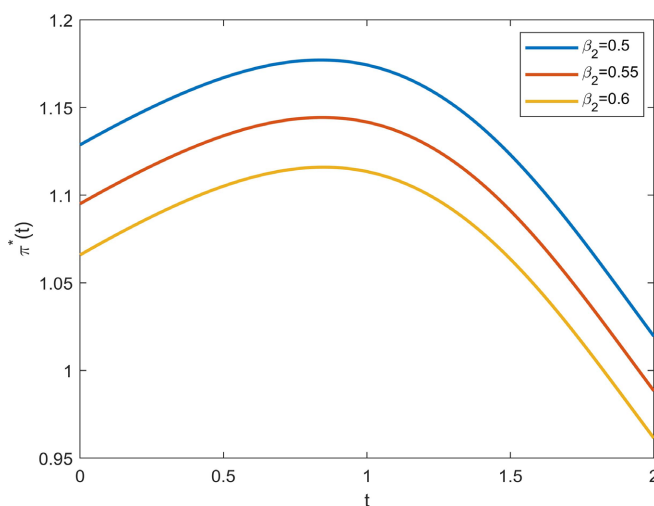


Figure 3. Effect of reinsurance safety loading β_2 on optimal investment $\pi^*(t)$

图 3. 再保险安全载荷 β_2 对最优再保险策略 $\pi^*(t)$ 的影响

由图 3 可知, 随着再保险安全载荷 β_2 的增大, 最优投资策略 $\pi^*(t)$ 整体向下移动, 即保险公司在风险资产中的最优投资水平下降, 其经济含义在于: 当再保险价格提高时, 保险公司减少再保险购买, 从而提高自留比例并承担更多的保险风险。由于保险风险与金融风险同时存在, 为维持整体风险水平的平衡, 保险公司会相应降低在风险资产中的投资比例。

因此, 再保险市场的定价机制不仅影响保险公司的再保险决策, 也通过风险联动效应对其金融投资行为产生重要影响。

4.4. 无风险利率对最优投资策略的影响

最后, 考察无风险利率 r 对最优投资策略 $\pi^*(t)$ 的影响。

图 4 给出了在 $r \in \{0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.1\}$ 不同取值下, 最优投资策略的变化情况。

从图 4 可以看出, 随着无风险利率的上升, 最优投资策略 $\pi^*(t)$ 明显下降。这表明当无风险资产的收益率提高时, 保险公司更倾向于将财富配置于无风险资产, 从而减少对风险资产的投资。这一结论与经典金融理论完全一致, 进一步验证了模型结果的合理性。

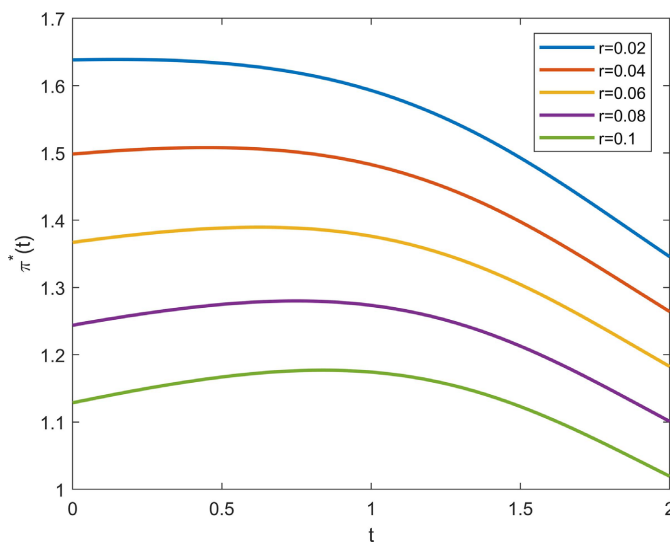


Figure 4. Effect of risk-free rate r on optimal reinsurance $\pi^*(t)$

图 4. 无风险利率 r 对最优再保险策略 $\pi^*(t)$ 的影响

4.5. 结果讨论与经济学意义

为明确本文的边际贡献, 我们将上述数值结果与现有经典模型进行对比分析。

与经典 GBM 模型对比, 在假设风险资产服从几何布朗运动(GBM)的框架下, 最优投资策略通常是静态或单调的。而本文采用 OU 过程捕捉了资产收益的均值回复特性, 使得最优投资比例 $\pi^*(t)$ 呈现出显著的非单调抛物线型动态调整, 体现了保险公司利用市场均值回归趋势进行跨期优化的经济行为。

与假设市场独立的模型对比, 本文引入了保险风险与金融市场波动之间的相关性。图 3 表明, 再保险安全载荷的提高不仅降低了再保险购买比例, 还会引发“风险溢出效应”——保险公司为维持总风险平衡, 会主动削减在风险资产上的投资。忽略这种联动性可能导致极端市场下的次优资产配置。

指数保费准则的优势, 相较于期望值或方差保费原则, 本文采用的指数保费准则在数学上避免了线性设定带来的边界解问题, 并在经济学意义上更平滑、精确地刻画了风险厌恶者在保险承保与资本市场

投资间的权衡行为。

4.6. 小结

综上所述, 数值结果清晰地表明, 风险厌恶程度、再保险安全载荷以及无风险利率等关键参数都会显著影响保险公司的最优再保险和投资决策。风险厌恶程度越高, 保险公司越倾向于降低风险暴露。再保险价格的提高会同时影响保险风险承担和金融投资行为。无风险利率的上升则促使保险公司减少风险资产配置。这些结论在经济意义上均具有合理解释, 进一步验证了本文模型与理论推导的有效性。

参考文献

- [1] Browne, S. (1995) Optimal Investment Policies for a Firm with a Random Risk Process: Exponential Utility and Minimizing the Probability of Ruin. *Mathematics of Operations Research*, **20**, 937-958. <https://doi.org/10.1287/moor.20.4.937>
- [2] Zeng, Y. and Li, Z. (2011) Optimal Time-Consistent Investment and Reinsurance Policies for Mean-Variance Insurers. *Insurance: Mathematics and Economics*, **49**, 145-154. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2011.01.001>
- [3] David Promislow, S. and Young, V.R. (2005) Minimizing the Probability of Ruin When Claims Follow Brownian Motion with Drift. *North American Actuarial Journal*, **9**, 110-128. <https://doi.org/10.1080/10920277.2005.10596214>
- [4] Young, V.R. and Zariphopoulou, T. (2002) Pricing Dynamic Insurance Risks Using the Principle of Equivalent Utility. *Scandinavian Actuarial Journal*, **2002**, 246-279. <https://doi.org/10.1080/03461230110106327>
- [5] Young, V.R. (2003) Equity-Indexed Life Insurance: Pricing and Reserving Using the Principle of Equivalent Utility. *North American Actuarial Journal*, **7**, 68-86. <https://doi.org/10.1080/10920277.2003.10596078>
- [6] Musiela, M. and Zariphopoulou, T. (2004) An Example of Indifference Prices under Exponential Preferences. *Finance and Stochastics*, **8**, 229-239. <https://doi.org/10.1007/s00780-003-0112-5>
- [7] Yao, D., Xu, R., Cheng, G. and Fan, K. (2023) Optimal Dividend and Risk Control Strategies for an Insurer with Two Groups of Reinsurers. *Stochastics*, **95**, 785-818. <https://doi.org/10.1080/17442508.2022.2124114>
- [8] Liang, Z., Yuen, K.C. and Guo, J. (2011) Optimal Proportional Reinsurance and Investment in a Stock Market with Ornstein-Uhlenbeck Process. *Insurance: Mathematics and Economics*, **49**, 207-215. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2011.04.005>
- [9] Li, Y., Mao, X., Song, Y. and Tao, J. (2022) Optimal Investment and Proportional Reinsurance Strategy under the Mean-Reverting Ornstein-Uhlenbeck Process and Net Profit Condition. *Journal of Industrial & Management Optimization*, **18**, 75-93. <https://doi.org/10.3934/jimo.2020143>
- [10] Fleming, W.H. and Soner, H.M. (2006) *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. Springer.
- [11] Zhou, M., Yuen, K.C. and Yin, C. (2017) Optimal Investment and Premium Control in a Nonlinear Diffusion Model. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, **33**, 945-958. <https://doi.org/10.1007/s10255-017-0709-7>