

Hadamard分数阶扩散方程的时空Legendre谱方法

王婧涵, 曹俊英, 王自强*

贵州民族大学数据科学与信息工程学院, 贵州 贵阳

收稿日期: 2026年5月18日; 录用日期: 2026年6月11日; 发布日期: 2026年6月18日

摘要

本文主要研究Hadamard时间分数阶扩散方程的时空谱方法, 对Hadamard时间分数阶扩散方程在空间方向采用Legendre-Galerkin谱方法构建高效的空间数值求解格式, 减少计算成本; 在时间上采用Legendre谱配置法进行离散, 使得方程在时间和空间上全局离散, 得到时空全离散的高精度数值格式。最后通过数值算例求解对其准确性与有效性进行验证。数值实验表明, 该方法误差达到 10^{-16} , 具有优异的谱精度, 验证了离散格式的高效性与可靠性。

关键词

Hadamard分数阶导数, Legendre-Galerkin谱方法, Legendre谱配置法, 高精度数值格式

The Space-Time Legendre Spectral Method for Hadamard Fractional Diffusion Equations

Jinghan Wang, Junying Cao, Ziqiang Wang*

School of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang Guizhou

Received: May 18, 2026; accepted: June 11, 2026; published: June 18, 2026

Abstract

This paper focuses on the space-time spectral method for the Hadamard-type time-fractional diffusion equation. For the spatial discretization of the equation, the Legendre-Galerkin spectral method

*通讯作者。

is adopted to construct an efficient numerical spatial scheme to reduce the computational cost. The Legendre spectral collocation method is employed for temporal discretization, which enables global discretization of the equation in both time and space domains, and yields a fully discrete high-precision space-time numerical scheme. Finally, numerical examples are carried out to verify the accuracy and effectiveness of the proposed method. Numerical results demonstrate that the method achieves an error of 10^{-16} , exhibits excellent spectral accuracy, and validates the high efficiency and reliability of the established discretization scheme.

Keywords

Hadamard Fractional Derivative, Legendre-Galerkin Spectral Method, Legendre Spectral Collocation Method, High-Precision Numerical Scheme

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

分数阶扩散方程因其能精确描述反常扩散、记忆依赖和非局部效应等复杂物理过程,在粘弹性材料、地下溶质运输、生物组织传质等领域具有广泛应用[1]。

在[2]中,基于移位 Legendre 多项式、Gauss-Legendre 求积法则和谱配点法提出了一种分数阶积分微分方程的高精度数值近似,在[3]中基于高斯型求积公式分析了具有弱奇异核的一类 Volterra 积分方程的 Chebyshev 和 Legendre 伪谱方法,并进行了误差分析,通过数值算例对理论预测进行了验证。在[4]中研究了一致精度的二维非线性分数阶 Hadamard 积分方程的高效数值格式,基于改进的 block-by-block 思想,采用分段双二次对数插值法逼近积分函数,构造了高阶数值格式。在[5]中 Istafa 等人使用基于改进的经典 Legendre 多项式下的 Hadamard Legendre 多项式求解线性和非线性的 Hadamard 分数阶微分方程,并在此基础上推出二维的 Hadamard Legendre 多项式获得了针对二维 Caputo-Hadamard 分数阶微分方程的数值解。在[6]中基于 Legendre-Galerkin 近似,给出了直接求解二阶和四阶椭圆型方程的高效简化算法。在[7]中,采用费马多项式的截断级数来近似求解结果,并使用求积公式进行离散化处理。在[8]中, Jian 等采用时间 L2 方法和空间 Legendre-Galerkin 谱方法,对四阶时间分数阶偏微分方程的数值解法进行了研究。在[9]中,针对含时间 Caputo-Hadamard 导数的 Allen-Cahn 方程,提出在时间方向采用新推导的差分格式离散,空间方向通过各向异性非协调拟 Wilson 有限元法(FEM)进行逼近,并通过数值算例验证了结论的准确性。在[10]中,对经典 Haar 小波进行修正,使其与 Hadamard 型算子相适配。推导得到运算矩阵,并利用其将微分方程转化为代数方程组,利用改进 Haar 小波的运算矩阵求得其数值解。传统的 Caputo 型分数阶导数虽已广泛应用于扩散方程的求解,但在描述对数时间尺度下的问题时存在局限。Hadamard 分数阶导数通过引入对数形式的分数阶算子,能更本质地描述相关过程。

基于上述理论,本文研究了 Hadamard 时间分数阶扩散方程的时空谱方法,对 Hadamard 时间分数阶扩散方程在空间上采用高效的 Legendre-Galerkin 谱方法,在时间上采用 Legendre 谱配置方法,使得方程在时间和空间上全局离散,得到时空全离散的高精度数值格式。最后通过数值算例求解进行验证。

2. 问题描述与预备知识

本文探讨 Hadamard 分数阶时间导数的扩散方程,将空间和时间区域分别定义为 $\Lambda = [0, 1]$, $I = [1, T]$,

时空区域可写为 $\Omega = \Lambda \times I$ ，边界条件定义为 $\Gamma = \partial\Lambda \times (1, T]$ ，考虑以下扩散方程问题：

$${}^c H_t^\alpha u(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \tag{1}$$

其中 Δ 表示拉普拉斯算子， Ω 是有界区域， T 为任意正数。考虑方程(1)中的初边值问题如下：

$$\begin{cases} u(x, 1) = u_0(x), & x \in \Lambda, \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Lambda, t \in [1, T], \end{cases} \tag{2}$$

其中区域 Ω 的边界为 $\partial\Omega$ 。

α 阶 Caputo-Hadamard 导数定义如下[5]：

$${}^c H_t^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{-\alpha} \left(s \frac{d}{ds}\right) u(s) \frac{ds}{s}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{3}$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数。

2.1. Hadamard-Legendre 多项式基本定义与性质

分别定义 $P_M(\Lambda)$ 为空间变量 x 对应的 Legendre 多项式空间， $P_N(I)$ 为时间变量 t 对应的 Hadamard-Legendre 多项式空间。对于整数对 (M, N) ，记 $W := (M, N)$ ，可以引入时空谱逼近空间：

$$S_W := P_M^0(\Lambda) \otimes P_N(I) \subset B^{\frac{\alpha}{2}, 1}(\Omega),$$

其中 $P_M^0(\Lambda) := P_M(\Lambda) \cap H_0^1(\Lambda)$ ， $H_0^1(\Lambda)$ 为希尔伯特空间， $B^{\frac{\alpha}{2}, 1}(\Omega) = H^{\frac{\alpha}{2}}(I, L^2(\Lambda)) \cap L^2(I, H_0^1(\Lambda))$ 。

移位的 Legendre 多项式[2]定义为：

$$L_i(\tilde{x}) = \sum_{j=0}^i \frac{(-1)^{i+j} (j+i)!}{(i+j)(j!)^2} \tilde{x}^j, \tag{4}$$

将移位的 Legendre 多项式通过对数变换，得到 $[1, e]$ 上的 i 次 Hadamard-Legendre 多项式[11]：

$$L_i^H(\tilde{t}) = \sum_{j=0}^i \frac{(-1)^{i+j} (j+i)!}{(i+j)(j!)^2} (\log \tilde{t})^j. \tag{5}$$

设 $\zeta_i (i = 0, 1, \dots, k)$ 为 Gauss-Lobatto-Legendre 节点(GLL)，因此可定义 S_W 空间中离散后的点 x_i, t_j ，其中

$$x_i = \frac{\zeta_i + 1}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, k,$$

$$t_j = e^{x_j}, \quad j = 0, 1, \dots, k.$$

Legendre 多项式满足如下正交关系：

$$(L_k(x), L_j(x)) = \frac{2}{2k+1} \delta_{kj}, \quad \forall k, j \geq 0, \tag{6}$$

及递推关系：

$$(2k+1)L_k(x) = L'_{k+1}(x) - L'_{k-1}(x). \tag{7}$$

2.2. 二阶方程 Legendre-Galerkin 高效格式

对于 Legendre-Galerkin 谱方法而言，其实际计算效率依赖于基函数的选取。所以高效算法的核心任

务是选取合适的基函数,使得由 Legendre-Galerkin 离散后的弱形式所导出的线性方程组尽可能简洁。根据参考文献[6],下述引理是算法高效性的关键。

引理 1 [6]定义

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{4k+6}}, \quad \phi_k(x) = c_k(L_k(x) - L_{k+2}(x)),$$

以及

$$a_{j,k} = (\phi_k(x), \phi_j(x)), \quad b_{j,k} = (\phi'_k(x), \phi'_j(x)),$$

则有

$$a_{j,k} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases} \quad b_{j,k} = b_{k,j} = \begin{cases} c_k c_j \left(\frac{2}{2j+1} + \frac{2}{2j+5} \right), & k = j, \\ -c_k c_j \frac{2}{2k+1}, & k = j+2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (8)$$

且

$$V = \text{span} \{ \phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_{M-2}(x) \}.$$

3. 全离散格式的构造

为高效离散 Hadamard 分数阶扩散方程,采用 Legendre-Galerkin 谱方法,选取高效求解的基函数格式,借助 Legendre 正交多项式的谱精度优势构建空间离散格式。并在半离散基础上,引入 Hadamard-Legendre 分数阶多项式,采用谱配置法对 Hadamard 分数阶导数进行数值离散。最终形成全离散格式。

3.1. 空间半离散格式构造

对问题(1)原方程两边乘以测试函数 v ,并在 Ω 上做 L^2 内积,通过格林公式有:

$$\int_{\Omega} {}^c H_t^\alpha u \cdot v dx dt + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dt = \int_{\Omega} (f(x,t)) \cdot v dx dt, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (9)$$

则问题(1)的标准 Legendre-Galerkin 逼近格式为:

$$({}^c H_t^\alpha u(x,t), v) + (\nabla u, \nabla v) = (f(x,t), v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (10)$$

其中 $(u, v) = \int_{\Omega} u v dx$ 为 $L^2(\Omega)$ 空间中的内积,其对应的范数记为 $\|\cdot\|$ 。

选取一组基函数 $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{M-2}\}$,将空间的近似解展开为基函数的线性组合:

$$u(x,t) = \sum_{i=0}^{M-2} \phi_i U_i(t), \quad (11)$$

则有

$${}^c H_t^\alpha u(x,t) = \sum_{i=1}^{M-2} \phi_i(x) {}^c H_t^\alpha U_i(t) = [\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{M-2}] \begin{bmatrix} {}^c H_t^\alpha U_0(t) \\ {}^c H_t^\alpha U_1(t) \\ \vdots \\ {}^c H_t^\alpha U_{M-2}(t) \end{bmatrix}.$$

代入变分形式(10),可得到线性方程组:

$$A \begin{bmatrix} {}^c H_t^\alpha U_0(t) \\ {}^c H_t^\alpha U_1(t) \\ \vdots \\ {}^c H_t^\alpha U_{M-2}(t) \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} U_0(t) \\ U_1(t) \\ \vdots \\ U_{M-2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f(\cdot, t), \phi_0(x)) \\ (f(\cdot, t), \phi_1(x)) \\ \vdots \\ (f(\cdot, t), \phi_{M-2}(x)) \end{bmatrix},$$

其中, 矩阵 A, B 用引理 1 中的高效数值格式进行展开, 有

$$A = \begin{bmatrix} (\phi_0, \phi_0) & (\phi_0, \phi_1) & \cdots & (\phi_0, \phi_{M-2}) \\ (\phi_1, \phi_0) & (\phi_1, \phi_1) & \cdots & (\phi_1, \phi_{M-2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\phi_{M-2}, \phi_0) & (\phi_{M-2}, \phi_1) & \cdots & (\phi_{M-2}, \phi_{M-2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,M-2} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,M-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M-2,0} & a_{M-2,1} & \cdots & a_{M-2,M-2} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} (\nabla \phi_0, \nabla \phi_0) & (\nabla \phi_0, \nabla \phi_1) & \cdots & (\nabla \phi_0, \nabla \phi_{M-2}) \\ (\nabla \phi_1, \nabla \phi_0) & (\nabla \phi_1, \nabla \phi_1) & \cdots & (\nabla \phi_1, \nabla \phi_{M-2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\nabla \phi_{M-2}, \nabla \phi_0) & (\nabla \phi_{M-2}, \nabla \phi_1) & \cdots & (\nabla \phi_{M-2}, \nabla \phi_{M-2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & \cdots & b_{0,M-2} \\ b_{1,0} & b_{1,1} & \cdots & b_{1,M-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{M-2,0} & b_{M-2,1} & \cdots & b_{M-2,M-2} \end{bmatrix},$$

这里 a, b 见公式(8)。

最终空间离散的半离散形式为:

$$A {}^c H_t^\alpha U(t) + BU(t) = f(t), \tag{12}$$

$$U(t) = [U_0(t), U_1(t), \dots, U_{M-2}(t)]^T, f(t) = [(f, \phi_0), (f, \phi_1), \dots, (f, \phi_{M-2})]^T.$$

3.2. 时空全离散格式构造

针对时间分数阶算子, 选取 Hadamard 分数阶 Legendre 谱配置格式, 利用分数阶 Hadamard-Legendre 多项式对时间分数阶项进行高精度离散。采用(5)中定义的 N 次 Hadamard-Legendre 多项式构造基函数, 取 $N+1$ 个 Gauss-Lobatto-Legendre(LGL)配置点 t_0, t_1, \dots, t_N 。对时间变量 t 采用基函数 $L_j^H(t)$ 展开表示为:

$$U_i(t) = \sum_{j=0}^N L_j^H(t) U_{L_{ij}}, \tag{13}$$

其中端点 t_0 对应初始时刻, 满足已知的 Dirichlet 型初始条件 $u(t_0) = U_{L_{t_0}}$ 。因此在离散过程中消去该端点, 保留 t_1, t_2, \dots, t_N 用于构造待求解的离散线性方程组。

参照[2]中的离散方式, 将 Gauss-Lobatto-Legendre 节点谱配置点代入, 可以将其分解为:

$$U_i(t) = \begin{bmatrix} L_1^H(t) & L_2^H(t) & \cdots & L_N^H(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{L_{i1}} \\ U_{L_{i2}} \\ \vdots \\ U_{L_{iN}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0^H(t_1) & L_1^H(t_1) & \cdots & L_N^H(t_1) \\ L_0^H(t_2) & L_1^H(t_2) & \cdots & L_N^H(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_0^H(t_N) & L_1^H(t_N) & \cdots & L_N^H(t_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{L_{i1}} \\ U_{L_{i2}} \\ \vdots \\ U_{L_{iN}} \end{bmatrix}.$$

Hadamard 分数阶算子离散后的矩阵形式为:

$${}^c H_t^\alpha U_i(t) = \begin{bmatrix} H_0^\alpha(t) & H_1^\alpha(t) & \cdots & H_N^\alpha(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{L_{i1}} \\ U_{L_{i2}} \\ \vdots \\ U_{L_{iN}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_0^\alpha(t_1) & H_1^\alpha(t_1) & \cdots & H_N^\alpha(t_1) \\ H_0^\alpha(t_2) & H_1^\alpha(t_2) & \cdots & H_N^\alpha(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_0^\alpha(t_N) & H_1^\alpha(t_N) & \cdots & H_N^\alpha(t_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{L_{i1}} \\ U_{L_{i2}} \\ \vdots \\ U_{L_{iN}} \end{bmatrix}.$$

由于该方程满足公式(2)定义的初始条件, 可得初始条件的离散形式为:

$$\begin{bmatrix} L_0^H(t_0) & L_1^H(t_0) & \cdots & L_N^H(t_0) \end{bmatrix} \cdot U_{L_{t_0}} = f_{L_{t_0}}.$$

将上述初始条件嵌入离散格式, 同时将 Gauss-Lobatto-Legendre 配置点代入右端项, 对离散方程进行合并整理, 最终可得到如下矩阵形式的线性代数方程组:

$$[A \otimes C + B \otimes D] \begin{bmatrix} U_{L_{t_0}} \\ U_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{L_{t_0}} \\ F \end{bmatrix}, \quad (14)$$

其中

$$U_L = [U_{L_{t_1}} \quad U_{L_{t_2}} \quad \cdots \quad U_{L_{t_N}}], \quad F_L = [f_{L_{t_1}} \quad f_{L_{t_2}} \quad \cdots \quad f_{L_{t_N}}],$$

$$C = \begin{bmatrix} L_0^H(t_0) & L_1^H(t_0) & \cdots & L_N^H(t_0) \\ H_0^\alpha(t_1) & H_1^\alpha(t_1) & \cdots & H_N^\alpha(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_0^\alpha(t_N) & H_1^\alpha(t_N) & \cdots & H_N^\alpha(t_N) \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} L_0^H(t_0) & L_1^H(t_0) & \cdots & L_N^H(t_0) \\ L_0^H(t_1) & L_1^H(t_1) & \cdots & L_N^H(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_0^H(t_N) & L_1^H(t_N) & \cdots & L_N^H(t_N) \end{bmatrix}.$$

将空间离散与时间离散进行张量积, 使得每一项的离散结果与其时空离散系数进行对应, 根据公式(11)与公式(13), 可以得到 $u(x, t)$ 的全离散格式为:

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{M-2} \sum_{j=0}^N \phi_i L_j^H U_{L_{ij}}.$$

结合公式(12)与公式(14), 得到时空全离散格式:

$$[A \otimes C + B \otimes D] U_L = F, \quad (15)$$

其中

$$U_L = [U_{L_{00}}, U_{L_{01}}, \cdots, U_{L_{0N}}, U_{L_{10}}, \cdots, U_{L_{(M-2)N}}]^T,$$

$$F = [(f(x, t_0), \phi_0), (f(x, t_1), \phi_0), \cdots, (f(x, t_N), \phi_0), (f(x, t_0), \phi_1), \cdots, (f(x, t_N), \phi_{M-2})]^T.$$

利用[3]中解的存在性、稳定性与唯一性的证明思路, 可得到全离散形式(15)的误差估计, 结论由下述定理 1 给出。

定理 1 若 $0 < \alpha < 1$, $\gamma > 1$, $\sigma \geq 1$, 且 u, U_L 分别是问题(1)和离散问题(15)的解, 当解满足条件 $u \in H^{\frac{\alpha}{2}}(I; H^\sigma(\Omega)) \cap H^\gamma(I; H_0^1(\Omega))$ 时, 则有如下误差估计式成立:

$$\|u - U_L\|_{B^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega)} \leq C(M^{-m} + N^{\alpha-\gamma}),$$

其中 C 为正常数, 且与 M, N 无关。

4. 数值算例

对于上述构造的算法, 在本节通过数值算例对其正确性与可行性进行验证。考虑方程(1)~(2)有如下精确解:

$$u(x, t) = (t-1) \sin^2(\pi x),$$

则方程右端项为:

$$f(x, t) = \left[\log(t)^{-\alpha} E_{1,1-\alpha} - \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)} \log(t)^{-\alpha} \right] \sin^2(\pi x) - (t-1) \cdot 2\pi^2 [\cos^2(\pi x) - \sin^2(\pi x)],$$

其中 $E_{1,1-\alpha}$ 为 Mittag-Leffler 函数。

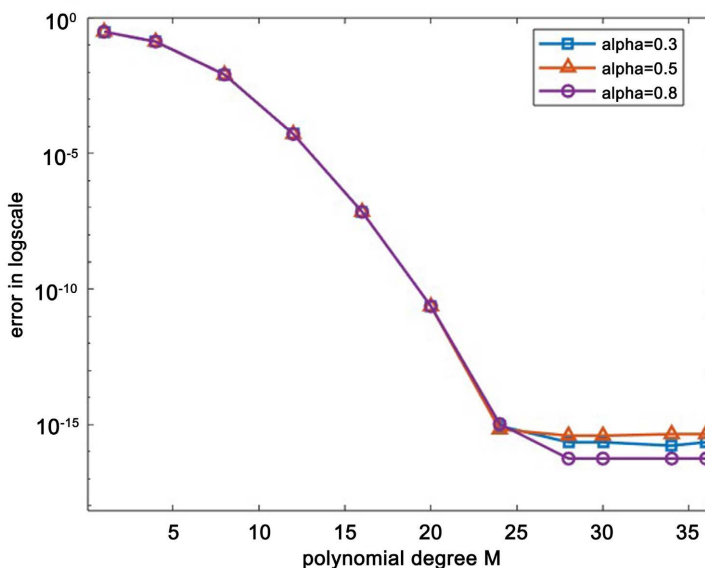


Figure 1. The error variation with M when $N = 20$
 图 1. $N = 20$ 时误差随 M 的变化

选取 $x = 0.8, t = 1.9$ 时, 对其进行数值检验。固定足够大的时间项 $N = 20$, 对于空间进行检验, 可以得到空间误差随多项式次数 M 的变化趋势, 分别对 $\alpha = 0.3, 0.5, 0.8$ 三种情况进行讨论, 在半对数的坐标中, 发现三种情况的误差变化基本上是线性的, 在空间方向上呈指数收敛, 且达到谱精度(图 1)。

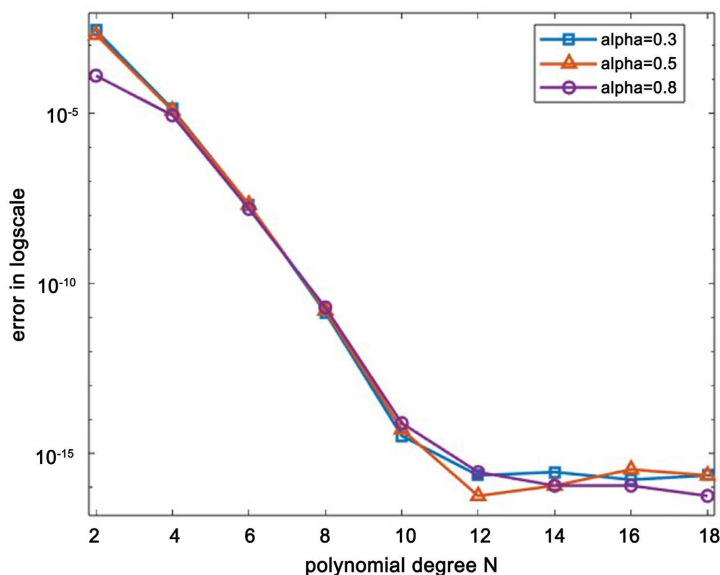


Figure 2. The variation of error with N when $M = 30$
 图 2. $M = 30$ 时误差随 N 的变化

固定足够大的空间项 $M = 30$ ，对于时间进行检验，可以得到时间误差随多项式次数 N 的变化趋势，分别对 $\alpha = 0.3, 0.5, 0.8$ 三种情况进行讨论，在半对数的坐标中，发现三种情况的误差变化基本上是线性的，在时间方向上呈指数收敛，且达到谱精度(图 2)。

显然，随多项式次数的增加，时间与空间的数值误差均呈明显的指数衰减趋势；该衰减特性与谱精度的理论预期一致，证实了所提方法求解线性 Hadamard 分数阶微分方程时具有理想的高效性。

5. 结论

本文针对 Hadamard 时空分数阶扩散方程，构造了 Legendre 谱全离散格式。利用 Legendre 多项式的正交性与谱收敛特性，实现了对 Hadamard 分数阶导数的高精度数值逼近。理论误差分析表明，该格式误差随时空自由度 N, M 增大呈指数阶衰减，在长时间、高光滑性解的问题中展现出显著的高精度优势，为 Hadamard 型分数阶反常扩散、粘弹性力学等问题提供了可靠的高精度求解工具。

后续可将该 Legendre 谱方法拓展至非线性 Hadamard 时空分数阶问题与复杂边界场景，结合快速算法优化 Hadamard 算子的计算成本，探索 Legendre 谱方法与其他分数阶数值技术的融合，构建适用于 Hadamard 型算子的普适性高精度求解框架。

基金项目

国家自然科学基金(12361083, 12461077 和 11961009)，贵州省高等学校大数据分析 & 智能计算重点实验室(黔教技[2023] 012 号)，贵州省科技厅基金(QHKJC-ZK [2024] YB497)，贵州民族大学科研基金资助项目(GZMUZK [2023] CXTD05)，贵州省研究生科研基金项目(2025YJSKYJJ203)。

参考文献

- [1] Li, S. and Zhou, Z. (2018) Legendre Pseudo-Spectral Method for Optimal Control Problem Governed by a Time-Fractional Diffusion Equation. *International Journal of Computer Mathematics*, **95**, 1308-1325. <https://doi.org/10.1080/00207160.2017.1417591>
- [2] Wu, C. and Wang, Z. (2022) The Spectral Collocation Method for Solving a Fractional Integro-Differential Equation. *AIMS Mathematics*, **7**, 9577-9587. <https://doi.org/10.3934/math.2022532>
- [3] Li, X., Tang, T. and Xu, C. (2016) Numerical Solutions for Weakly Singular Volterra Integral Equations Using Chebyshev and Legendre Pseudo-Spectral Galerkin Methods. *Journal of Scientific Computing*, **67**, 43-64. <https://doi.org/10.1007/s10915-015-0069-5>
- [4] Wang, Z., Shi, K., Ye, X. and Cao, J. (2023) Higher-Order Uniform Accurate Numerical Scheme for Two-Dimensional Nonlinear Fractional Hadamard Integral Equations. *AIMS Mathematics*, **8**, 29759-29796. <https://doi.org/10.3934/math.20231523>
- [5] Istafa, G. and Rehman, M.U. (2023) Numerical Solutions of Hadamard Fractional Differential Equations by Generalized Legendre Functions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **46**, 6821-6842. <https://doi.org/10.1002/mma.8942>
- [6] Shen, J. (1994) Efficient Spectral-Galerkin Method I. Direct Solvers of Second- and Fourth-Order Equations Using Legendre Polynomials. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **15**, 1489-1505. <https://doi.org/10.1137/0915089>
- [7] Taema, M.A., Dagher, M.A. and Youssri, Y.H. (2025) Spectral Collocation Method via Fermat Polynomials for Fredholm-Volterra Integral Equations with Singular Kernels and Fractional Differential Equations. *Journal of Mathematics*, **14**, 481-492.
- [8] Jian, H., Cao, J. and Wang, Z. (2025) An Improved Finite Difference and Galerkin Spectral Method for the Fourth-Order Time Fractional Partial Differential Equations. *AIMS Mathematics*, **10**, 27338-27363. <https://doi.org/10.3934/math.20251202>
- [9] Zhao, Z., Zheng, Y. and Guo, P. (2017) A Galerkin Finite Element Method for a Class of Time-Space Fractional Differential Equation with Nonsmooth Data. *Journal of Scientific Computing*, **70**, 386-406. <https://doi.org/10.1007/s10915-015-0107-3>
- [10] Ul Abdeen, Z. and Rehman, M.U. (2022) A Numerical Method Based on Haar Wavelets for the Hadamard-Type Fractional Differential Equations. *Engineering Computations*, **39**, 943-964. <https://doi.org/10.1108/ec-04-2021-0223>
- [11] Istafa, G. and Ur Rehman, M. (2024) A Legendre-Spectral Method for Hadamard Fractional Partial Differential Equations. *Mathematical Sciences*, **18**, 239-255. <https://doi.org/10.1007/s40096-022-00497-7>