

# 自适应Filon型方法在高振荡积分中的数值研究

杨智博\*, 张春成, 杨雨航, 王香茜

贵州师范学院数学与大数据学院, 贵州 贵阳

收稿日期: 2026年5月13日; 录用日期: 2026年6月7日; 发布日期: 2026年6月16日

## 摘要

高振荡积分广泛存在于波动传播、信号分析、量子物理和工程计算等领域。针对传统数值积分方法在高频振荡条件下采样需求大、计算精度不稳定的问题, 本文研究一类Fourier型高振荡积分的数值计算方法。在Filon型求积框架下, 对振幅函数进行局部多项式逼近, 并对振荡因子作解析积分处理, 以减弱高频振荡对数值计算的影响。在此基础上, 引入基于振幅函数变化指标的自适应分段策略, 使节点在变化剧烈区域加密、在平缓区域保持稀疏, 从而提高节点利用效率。数值实验选取指数型、有理型和局部尖峰型振幅函数, 将复合梯形公式、复合Simpson公式、复合Gauss-Legendre求积、普通等距Filon方法与自适应分段Filon方法进行对比。结果表明, 在较高振荡频率下, Filon型方法较传统直接求积方法更稳定; 自适应分段策略能够有效降低局部插值误差, 并改善普通等距Filon方法的计算精度。

## 关键词

高振荡积分, Fourier积分, Filon型方法, 自适应分段, 数值积分

# Numerical Study of Adaptive Filon Method in High Oscillation Integral

Zhibo Yang\*, Chun Cheng Zhang, Yuhang Yang, Xianglin Wang

School of Mathematics and Big Data, Guizhou Education University, Guiyang Guizhou

Received: May 13, 2026; accepted: June 7, 2026; published: June 16, 2026

## Abstract

Highly oscillatory integrals arise widely in wave propagation, signal analysis, quantum physics, and

\*通讯作者。

文章引用: 杨智博, 张春成, 杨雨航, 王香茜. 自适应Filon型方法在高振荡积分中的数值研究[J]. 应用数学进展, 2026, 15(6): 187-195. DOI: 10.12677/aam.2026.156276

engineering computation. This paper studies numerical methods for a class of Fourier-type oscillatory integrals. Using the Filon quadrature framework, the amplitude function is locally approximated by polynomials, while the oscillatory factor is integrated analytically to reduce the effect of high-frequency oscillations. An adaptive partition strategy is further introduced according to the variation of the amplitude function, refining nodes in rapidly changing regions and keeping them sparse in smooth regions. Numerical experiments on exponential, rational, and locally peaked amplitude functions compare the proposed adaptive Filon method with the composite trapezoidal rule, composite Simpson rule, composite Gauss-Legendre quadrature, and uniform Filon methods. The results show that Filon-type methods are more stable than direct quadrature methods at high frequencies, and the adaptive strategy effectively reduces local interpolation errors and improves the accuracy of the standard uniform Filon method.

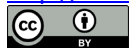
## Keywords

Highly Oscillatory Integrals, Fourier Integrals, Filon-Type Method, Adaptive Partition, Numerical Integration

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

高振荡积分广泛存在于波动传播、信号处理、量子物理和工程计算等领域。由于被积函数通常含有快速振荡因子，当振荡频率较高时，传统复合梯形公式、复合 Simpson 公式和 Gauss-Legendre 求积等方法往往需要大量节点才能获得较稳定的结果，否则容易出现误差增大、精度下降等问题。

Filon 型方法通过对振幅函数进行多项式逼近，并对振荡因子进行解析化处理，能够有效减弱高频振荡对数值积分的影响，在高振荡积分计算中具有较好的稳定性。但普通等距 Filon 方法采用固定节点划分，难以适应振幅函数在不同区域的变化差异，可能在变化剧烈区域精度不足，而在平缓区域产生计算冗余。

为此，本文引入自适应分段策略，根据振幅函数的变化程度动态调整区间划分，在变化剧烈区域加密节点，在平缓区域减少节点数量。通过与复合梯形公式、复合 Simpson 公式、复合 Gauss-Legendre 求积和普通等距 Filon 方法[1] [2]进行比较，验证自适应分段 Filon 方法在高振荡积分计算中的有效性和稳定性。文中数值实验和误差对比图表显示，自适应 Filon 方法在多个算例中具有较小误差，尤其在高频情况下表现较为稳定。

## 2. 自适应分段 Filon 型方法

为了实现自适应分段[3]，需要一个衡量振幅函数  $f(x)$  在不同区域内变化速率的指标，可以通过计算函数的梯度或二阶导数来判断局部区域的变化程度。

考虑函数  $f(x)$  在区间  $[x_j, x_{j+1}]$  上的二阶差分：

$$D_j = |f''(x_j)|.$$

$D_j$  较大时  $f(x)$  在该区间内变化较快，应适当加密该区间的分段， $D_j$  较小时则表明该区间内  $f(x)$  的变化较为平缓，分段可以较粗。

将积分区间  $[a, b]$  等分为  $N_0$  个子区间，即

$$x_0 = a, x_1, \dots, x_N = b, \text{ 其中 } h_0 = \frac{b-a}{N_0}.$$

在每个子区间上, 计算振幅函数的变化指标  $D_j$ , 判断是否需要进一步细分。根据变化指标, 设定一个阈值  $\epsilon$ , 如果某个子区间的指标  $D_j$  大于阈值, 则对该子区间进行细分: 将区间  $[x_j, x_{j+1}]$  再次细分为两个子区间, 即:

$$x_j, \frac{x_j + x_{j+1}}{2}, x_{j+1}.$$

计算新的区间上的变化指标  $D_j$ , 若仍大于阈值, 则继续细分, 直到满足精度要求。对于变化较为平缓的区间, 若某个子区间的变化指标小于阈值  $\epsilon$ , 则该区间可以合并为更粗的网格。合并规则是: 当两个相邻子区间的变化指标都较小时, 将这两个区间合并为一个较大的子区间。

对每个子区间  $[x_j, x_{j+1}]$ : 先在整个区间上计算一次二次 Filon 近似得到  $Q_j^{(1)}$  将该区间中点二分, 记中点为  $m_j$ , 拆分为两个子区间  $[x_j, m_j], [m_j, x_{j+1}]$  分别对两段计算二次 Filon 近似, 求和记为  $Q_j^{(2)}$  定义局部误差指标  $\eta_j = |Q_j^{(2)} - Q_j^{(1)}|$ , 自适应加密判别规则: 若  $\eta_j > \epsilon$ : 该区间局部近似误差偏大, 继续二分加密; 若  $\eta_j \leq \epsilon$ : 接受当前区间, 不再细分。

自适应二次 Filon 积分算法如下:

输入参数:

振幅函数  $f(x)$ , 积分区间  $[a, b]$ , 频率参数  $\omega$ , 初始剖分数  $N_0$ , 误差阈值  $\epsilon$ , 最大加密层数  $L_{\max}$ 。

算法步骤:

步骤 1: 将积分区间  $[a, b]$  等距划分为  $N_0$  个初始子区间。

步骤 2: 对每个子区间  $[x_j, x_{j+1}]$ , 计算二次 Filon 近似  $Q_j^{(1)}$ 。

步骤 3: 将当前子区间二分, 计算二分后两段 Filon 近似之和  $Q_j^{(2)}$ 。

步骤 4: 计算局部误差指标:

$$\eta_j = |Q_j^{(2)} - Q_j^{(1)}|$$

步骤 5: 网格自适应判断:

若  $\eta_j > \epsilon$ , 对该子区间继续二分加密;

若  $\eta_j \leq \epsilon$ , 保留当前子区间, 不再细分。

步骤 6: 循环执行步骤 2~步骤 5, 直到所有子区间满足误差阈值要求, 或达到最大加密层数  $L_{\max}$ 。

步骤 7: 在最终生成的自适应网格上, 累加所有子区间的 Filon 近似值, 得到最终积分结果。

初始剖分数  $N_0$  决定了自适应算法的初始网格尺度。若  $N_0$  过小, 初始区间剖分过于粗糙, 局部误差估计难以充分刻画振幅函数的局部变化特征; 若  $N_0$  过大, 则会显著增加初始阶段计算开销, 同时削弱自适应网格加密的固有优势。本文采用预实验方式确定最优初始剖分数  $N_0$ , 分别在  $N_0 = 6, 12, 24, 48$  等不同初始剖分取值下, 对比数值积分误差与剖分区间数量。综合数值精度与计算复杂度两方面因素, 本文主实验选取初始剖分数  $N_0 = 12$ 。

误差阈值  $\epsilon$  用于判定局部区间是否继续二分加密。取值较大的  $\epsilon$  会减少加密区间数量, 整体计算开销更低, 但数值逼近误差相应增大; 取值较小的  $\epsilon$  会生成更多细分子区间, 通常可提升积分精度, 同时会带来计算量的增加。本文在参数敏感性分析中选取  $\epsilon = 10^{-6}, 10^{-8}, 10^{-10}, 10^{-12}$  进行对比测试, 综合权衡数值精度与计算成本后, 主实验选取误差阈值  $\epsilon = 10^{-8}$ 。

按自适应策略对积分区间  $[a, b]$  进行划分, 得到节点

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b.$$

记第  $j$  个子区间为

$$I_j = [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

在每个子区间  $I_j$  上采用二次 Filon 型求积公式。为构造局部二次插值多项式，取三个等距局部插值节点

$$x_{j,0} = x_j, \quad x_{j,1} = \frac{x_j + x_{j+1}}{2}, \quad x_{j,2} = x_{j+1}.$$

令  $p_j(x)$  表示子区间  $I_j$  上对振幅函数  $f(x)$  的局部二次 Lagrange 插值多项式，则

$$p_j(x) = \sum_{r=0}^2 f(x_{j,r}) L_{j,r}(x),$$

其中  $L_{j,r}(x)$  为对应局部 Lagrange 基函数

$$L_{j,r}(x) = \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq r}}^2 \frac{x - x_{j,s}}{x_{j,r} - x_{j,s}}, \quad r = 0, 1, 2.$$

因此，子区间  $I_j$  上的振荡积分近似为

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) e^{i\omega x} dx \approx Q_j(f) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} p_j(x) e^{i\omega x} dx.$$

将插值多项式代入积分，可得二次 Filon 离散格式

$$Q_j(f) = \sum_{r=0}^2 f(x_{j,r}) w_{j,r}(\omega),$$

其中 Filon 权重定义为

$$w_{j,r}(\omega) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} L_{j,r}(x) e^{i\omega x} dx, \quad r = 0, 1, 2.$$

权重  $w_{j,r}(\omega)$  包含振荡因子  $e^{i\omega x}$ ，可通过解析积分或高精度数值积分预先计算。

对所有子区间求和，得到整个区间上的 Filon 型积分近似

$$I(\omega) \approx Q(f) = \sum_{j=0}^{N-1} Q_j(f) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{r=0}^2 f(x_{j,r}) w_{j,r}(\omega).$$

在整个过程中，通过自适应分段策略[4]，方法能够在高振幅区域增加计算密度，在平缓区域减少计算量，从而有效提高计算精度并降低计算成本。

采用绝对误差作为评价指标：

$$E = |I_{\text{num}} - I_{\text{ref}}|,$$

其中  $I_{\text{num}}$  为不同数值方法得到的近似结果， $I_{\text{ref}}$  为高精度参考解。本文中的参考解  $I_{\text{ref}}$  并非由参与比较的复合梯形公式、复合 Simpson 公式、复合 Gauss-Legendre 求积或 Filon 型方法[5]产生，而是采用 Python SciPy 库中 `scipy.integrate.quad` 的带权 Fourier 积分[6] [7]模式计算得到。具体地，将积分写为

$$\int_a^b f(x) \cos(\omega x) dx$$

调用 `quad(f, a, b, weight = "cos", wvar = \omega)`，并设置绝对误差容限和相对误差容限 `epsabs = epsrel = 10-13`，最大细分次数 `limit = 3000`。该方式将  $\cos(\omega x)$  作为振荡权函数处理，适合有限区间 Fourier 型高振荡积分，可避免直接对快速振荡函数进行粗网格采样造成的参考误差。

实验中选取不同频率参数:

$$\omega = 100, 501, 1257, 5000.$$

通过比较不同  $\omega$  下各方法的误差, 分析它们在高频情形下的稳定性。

### 3. 数值实验与结果

算例一:  $I_1(\omega) = \int_0^1 e^x \cos(\omega x) dx.$

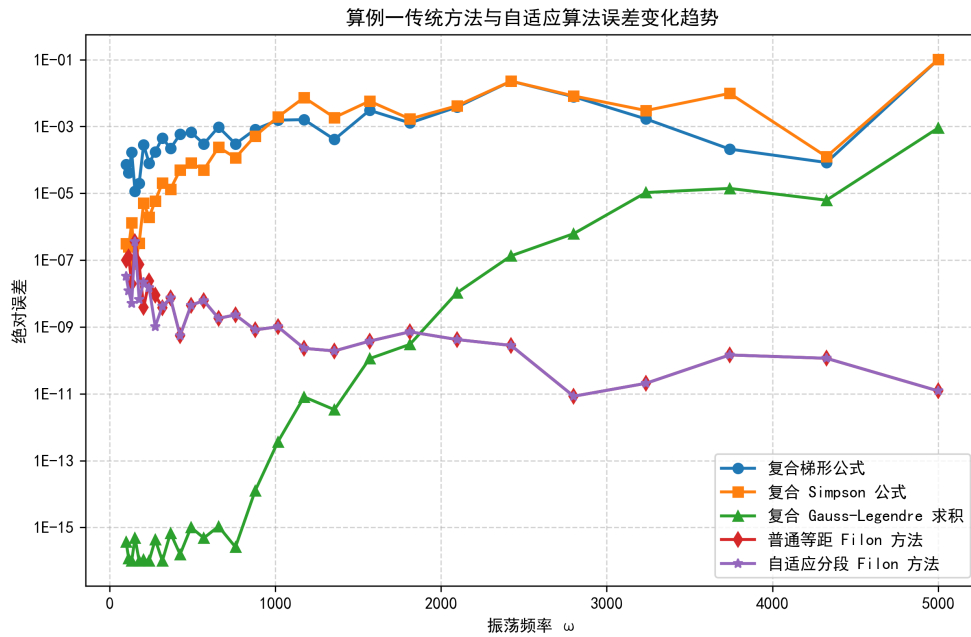


Figure 1. Error variation trend of traditional method and adaptive algorithm of Example 1  
图 1. 算例一传统方法与自适应算法误差变化趋势

Table 1. Error comparison of Example 1

表 1. 算例一误差对比

$\omega$	梯形误差	Simpson 误差	复合 Gauss 误差	普通 Filon 误差	自适应 Filon 误差	自适应区间数
100	$7.247 \times 10^{-5}$	$3.097 \times 10^{-7}$	$3.730 \times 10^{-16}$	$1.014 \times 10^{-7}$	$3.285 \times 10^{-8}$	39
501	$7.253 \times 10^{-4}$	$9.015 \times 10^{-5}$	$1.156 \times 10^{-15}$	$2.681 \times 10^{-9}$	$2.681 \times 10^{-9}$	12
1257	$7.669 \times 10^{-4}$	$5.579 \times 10^{-1}$	$3.553 \times 10^{-12}$	$5.499 \times 10^{-10}$	$5.499 \times 10^{-10}$	12
5000	$1.007 \times 10^{-1}$	$1.007 \times 10^{-1}$	$9.010 \times 10^{-4}$	$1.222 \times 10^{-11}$	$1.222 \times 10^{-11}$	12

由图 1 和表 1 中结果可以看出, 在较高频率下, 复合梯形公式和复合 Simpson 公式的误差增大较为明显, 而 Filon 型方法保持了较小误差。自适应 Filon 在低频  $\omega = 100$  时进一步降低了普通 Filon 的误差; 在较高频率下, 由于误差指标未触发额外加密, 其结果与普通等距 Filon 方法保持一致。

算例二:  $I_2(\omega) = \int_0^1 \frac{1}{1+100(x-0.3)^2} \cos(\omega x) dx.$

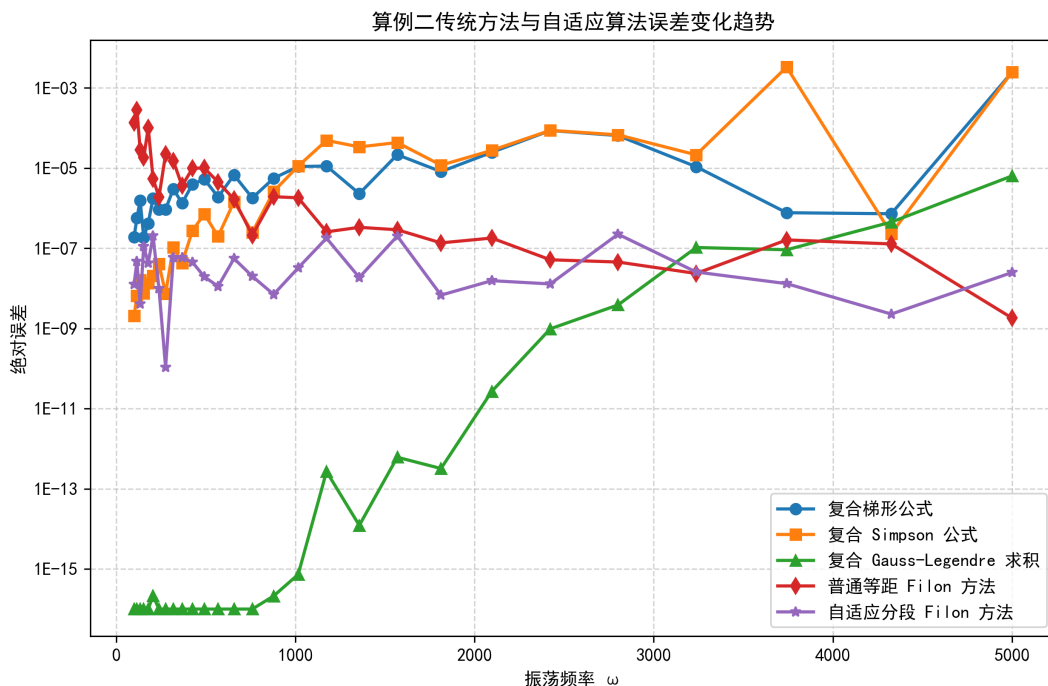


Figure 2. Error trend of traditional method and adaptive algorithm of Example 2  
 图 2. 算例二传统方法与自适应算法误差变化趋势

Table 2. Error comparison of Example 2  
 表 2. 算例二误差对比

$\omega$	梯形误差	Simpson 误差	复合 Gauss 误差	普通 Filon 误差	自适应 Filon 误差	自适应区间数
100	$1.893 \times 10^{-7}$	$2.053 \times 10^{-9}$	$2.954 \times 10^{-17}$	$1.343 \times 10^{-4}$	$1.253 \times 10^{-8}$	90
501	$5.006 \times 10^{-6}$	$5.289 \times 10^{-7}$	$1.370 \times 10^{-16}$	$7.527 \times 10^{-6}$	$2.130 \times 10^{-8}$	87
1257	$6.259 \times 10^{-6}$	$8.848 \times 10^{-2}$	$3.809 \times 10^{-14}$	$5.779 \times 10^{-7}$	$1.308 \times 10^{-7}$	33
5000	$2.471 \times 10^{-3}$	$2.470 \times 10^{-3}$	$6.382 \times 10^{-6}$	$1.818 \times 10^{-9}$	$2.486 \times 10^{-8}$	16

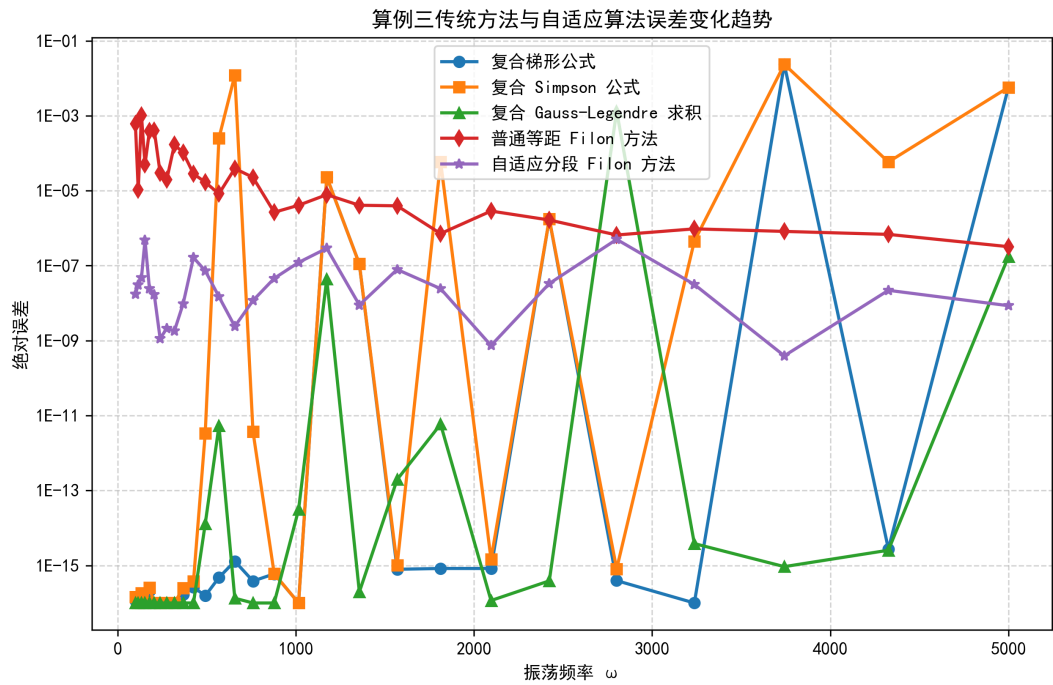
在图 2 和表 2 中，普通 Filon 方法相对于传统求积方法已有明显优势，但在中低频段仍存在一定误差。自适应分段方法通过对变化较强的局部区间进行加密，使误差整体得到压缩。在  $\omega=100$ 、501 和 1257 时，自适应 Filon 明显降低了普通 Filon 的误差；但在  $\omega=5000$  时，普通 Filon 的误差更小，说明基于局部阈值的加密策略并非在所有频率下都严格优于等距 Filon。

算例三： $I_3(\omega) = \int_{-1}^1 e^{-200(x-0.3)^2} \cos(\omega x) dx$ 。

从图 3 和表 3 可以观察到，自适应分段方法在局部变化显著的情况下具有较强优势。普通等距 Filon 方法由于节点均匀分布，在局部尖峰附近的逼近能力有限；自适应方法则能够将更多节点分配到关键区域，从而显著减小局部插值误差。

#### 4. 参数敏感性分析

表 4 固定振荡频率  $\omega=1257$ 、误差阈值  $\epsilon=10^{-8}$ ，考察不同初始剖分数  $N_0$  对结果的影响。



**Figure 3.** Error variation trend of traditional method and adaptive algorithm of Example 3  
**图 3.** 算例三传统方法与自适应算法误差变化趋势

**Table 3.** Error comparison of Example 3  
**表 3.** 算例三误差对比

$\omega$	梯形误差	Simpson 误差	复合 Gauss 误差	普通 Filon 误差	自适应 Filon 误差	自适应区间数
100	$1.140 \times 10^{-16}$	$1.441 \times 10^{-16}$	$9.848 \times 10^{-18}$	$6.101 \times 10^{-4}$	$1.736 \times 10^{-8}$	84
501	$2.711 \times 10^{-16}$	$5.823 \times 10^{-11}$	$5.311 \times 10^{-14}$	$2.762 \times 10^{-5}$	$2.879 \times 10^{-8}$	95
1257	$1.246 \times 10^{-1}$	$1.246 \times 10^{-1}$	$8.322 \times 10^{-16}$	$1.873 \times 10^{-6}$	$3.465 \times 10^{-8}$	66
5000	$5.726 \times 10^{-3}$	$5.726 \times 10^{-3}$	$1.762 \times 10^{-7}$	$3.209 \times 10^{-7}$	$8.547 \times 10^{-9}$	21

**Table 4.** Influence of different initial fractions  $N_0$  on adaptive Filon method  
**表 4.** 不同初始剖分数  $N_0$  对自适应 Filon 方法的影响

算例	$N_0$	最终区间数	加密轮数	绝对误差	计算时间/s
算例一	6	6	1	$2.233 \times 10^{-9}$	0.0002
算例一	12	12	1	$5.499 \times 10^{-10}$	0.0002
算例一	24	24	1	$1.487 \times 10^{-10}$	0.0004
算例一	48	48	1	$4.805 \times 10^{-11}$	0.0007
算例二	6	31	5	$1.230 \times 10^{-7}$	0.0011
算例二	12	33	4	$1.308 \times 10^{-7}$	0.0017
算例二	24	41	3	$1.471 \times 10^{-7}$	0.0013
算例二	48	56	2	$1.574 \times 10^{-7}$	0.0015

续表

算例三	6	62	8	$3.465 \times 10^{-8}$	0.0032
算例三	12	66	7	$3.465 \times 10^{-8}$	0.0032
算例三	24	75	6	$3.085 \times 10^{-8}$	0.0038
算例三	48	94	5	$2.886 \times 10^{-8}$	0.0044

表 5 固定振荡频率  $\omega = 1257$ 、误差阈值  $N_0 = 12$ ，考察不同初始剖分数  $\varepsilon$  对结果的影响。

Table 5. Influence of different error threshold  $\varepsilon$  on adaptive Filon method

表 5. 不同误差阈值  $\varepsilon$  对自适应 Filon 方法的影响

算例	$\varepsilon$	最终区间数	加密轮数	绝对误差	计算时间/s
算例一	$1 \times 10^{-6}$	12	1	$5.499 \times 10^{-10}$	0.0002
算例一	$1 \times 10^{-8}$	12	1	$5.499 \times 10^{-10}$	0.0002
算例一	$1 \times 10^{-10}$	34	3	$2.242 \times 10^{-10}$	0.0008
算例一	$1 \times 10^{-12}$	320	6	$4.205 \times 10^{-12}$	0.0085
算例二	$1 \times 10^{-6}$	12	1	$5.779 \times 10^{-7}$	0.0002
算例二	$1 \times 10^{-8}$	33	4	$1.308 \times 10^{-7}$	0.0011
算例二	$1 \times 10^{-10}$	279	7	$1.077 \times 10^{-9}$	0.0098
算例二	$1 \times 10^{-12}$	881	8	$5.134 \times 10^{-12}$	0.0298
算例三	$1 \times 10^{-6}$	14	2	$1.509 \times 10^{-6}$	0.0004
算例三	$1 \times 10^{-8}$	66	7	$3.465 \times 10^{-8}$	0.0039
算例三	$1 \times 10^{-10}$	272	8	$2.238 \times 10^{-9}$	0.0090
算例三	$1 \times 10^{-12}$	762	10	$1.209 \times 10^{-11}$	0.0320

由表 4 可知当初始剖分数  $N_0$  取值较小时，初始网格剖分较为粗糙，需通过大量后续二分加密方可达到相近积分精度；随着  $N_0$  增大，积分误差有所降低，但最终剖分区间总数与计算开销同步上升。综合精度与计算量权衡， $N_0 = 12$  可在数值精度和计算复杂度之间取得良好平衡。

由表 5 可知随着误差阈值  $\varepsilon$  不断减小，自适应算法生成的子区间数量逐步增多，积分误差整体呈递减趋势。当  $\varepsilon$  由  $10^{-6}$  减小至  $10^{-8}$  时，积分精度提升效果显著；继续将  $\varepsilon$  减小至  $10^{-10}$  后，误差收敛幅度明显变缓，而计算量仍持续增加。因此，本文主实验选取误差阈值  $\varepsilon = 10^{-8}$ 。

## 5. 结论

本文选取三个典型算例，对复合梯形公式、复合 Simpson 公式、复合 Gauss-Legendre 求积、普通等距 Filon 方法和自适应分段 Filon 方法进行了数值比较。实验中，振荡频率参数  $\omega$  取较大的数值范围，用于观察各类方法在高振荡情形下的计算表现。随着振荡频率  $\omega$  的增大，传统数值积分方法的误差整体呈现增大趋势，尤其是复合梯形公式和复合 Simpson 公式，在较高频率下误差明显上升。传统方法直接对高振荡函数进行采样，在固定节点数下难以充分刻画函数的快速振荡特征。

在普通等距 Filon 方法和自适应分段 Filon 方法的比较中可以看出，自适应分段 Filon 方法在大多数频率下都取得了更小的误差，同时至少能够保持与普通 Filon 方法相近的精度，在普通 Filon 方法的基础上引入自适应分段策略，能够有效改善局部区间上的插值误差，提高整体积分计算精度。

---

## 基金项目

贵州师范学院大学生创新创业训练计划项目(S2025142232222)。

## 参考文献

- [1] 焦宇慧. 两类高振荡 Hankel 变换的数值计算方法研究[D]: [硕士学位论文]. 长沙: 中南大学, 2024.
- [2] 向淑晃. 一些高振荡积分、高振荡积分方程的高性能计算[J]. 中国科学: 数学, 2012, 42(7): 651-670.
- [3] 张中豹. 局部 Fourier 展开方法求解频率矩阵与时间相关的二阶高振荡微分方程[D]: [博士学位论文]. 武汉: 华中科技大学, 2024.
- [4] 赵龙斌. 高振荡积分及积分方程的数值方法研究[D]: [博士学位论文]. 武汉: 华中科技大学, 2017.
- [5] 刘汉炎, 宋红. 关于 Filon 算法的一点注记[J]. 哈尔滨电工学院学报, 1987(2): 161-167.
- [6] 张美娟. 奇异 Bessel 积分变换的数值分析[D]: [硕士学位论文]. 杭州: 电子科技大学, 2022.
- [7] 陈入云. 高振荡函数积分的高效数值算法及实现研究[D]: [博士学位论文]. 长沙: 中南大学, 2009.