

一类标量线性随机时滞微分方程 Euler-Maruyama方法的均方稳定性判据

刘 皓

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2026年5月16日; 录用日期: 2026年6月7日; 发布日期: 2026年6月16日

摘 要

本文在已有随机时滞微分方程数值稳定性研究的基础上, 研究一类标量线性随机时滞微分方程Euler-Maruyama方法的均方稳定性, 重点给出形式简单、可直接检验的显式稳定性充分判据, 并分析数值方法在充分小步长下对解析均方指数稳定性的保持性质。首先, 利用Itô公式和Halanay型不等式, 给出原方程零解均方指数稳定的一个充分条件。其次, 在时滞长度为步长整数倍的情形下, 构造Euler-Maruyama数值格式, 并通过二阶矩递推估计得到数值解均方指数稳定的显式步长条件。进一步证明, 当原方程满足该解析稳定性条件时, Euler-Maruyama方法在充分小且与时滞相容的步长下能够保持均方指数稳定性。最后, 通过Monte Carlo数值实验说明步长和噪声强度对数值稳定性的影响。数值结果表明, 本文所得判据虽为充分条件, 但能够为随机时滞微分方程数值方法的稳定性保持分析提供保守且可操作的检验准则。

关键词

随机时滞微分方程, 均方稳定性, 均方指数稳定, 数值稳定性

Mean-Square Stability Criteria for the Euler-Maruyama Method Applied to a Class of Scalar Linear Stochastic Delay Differential Equations

Hao Liu

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: May 16, 2026; accepted: June 7, 2026; published: June 16, 2026

Abstract

Building on existing studies of numerical stability for stochastic delay differential equations, this paper studies the mean-square stability of the Euler-Maruyama method for a scalar linear stochastic delay differential equation. The aim is to present simple, explicit and directly verifiable sufficient stability criteria and to analyze the stability-preserving property of the numerical method under sufficiently small stepsizes. By using Itô's formula and a Halanay-type inequality, a sufficient condition for the mean-square exponential stability of the zero solution is first obtained. Under the assumption that the delay length is an integer multiple of the stepsize, the Euler-Maruyama scheme is constructed, and a second-moment recurrence estimate yields an explicit stepsize condition for mean-square exponential stability of the numerical solution. It is further proved that, whenever the exact equation satisfies the proposed stability condition, the Euler-Maruyama method preserves this stability for all sufficiently small admissible stepsizes. Monte Carlo experiments illustrate the effects of the stepsize and the noise intensity on the numerical mean-square behavior. The results show that the proposed criteria, although sufficient rather than necessary, provide a conservative and practical framework for stability-preserving analysis of numerical methods for stochastic delay differential equations.

Keywords

Stochastic Delay Differential Equation, Mean-Square Stability, Mean-Square Exponential Stability, Numerical Stability

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随机微分方程及其数值方法是随机系统长期行为分析中的重要研究对象, 相关理论可参见 Kloeden 和 Platen [1]、Higham [2] 以及 Mao [3] 等经典文献。含时滞的随机系统还依赖历史状态, 因此其理论分析和数值计算通常更加复杂。Baker 和 Buckwar [4]、Buckwar [5] 以及 Mao [6] 对随机时滞或随机泛函微分方程的数值逼近问题进行了系统研究, 建立了显式一步方法和 Euler-Maruyama 方法的强收敛理论。

稳定性是随机系统长期行为研究中的核心问题之一。均方稳定性通过二阶矩衰减刻画解的稳定行为, 既具有清晰的概率意义, 又便于与数值格式的二阶矩递推相结合。因此, 在随机时滞微分方程数值分析中, 一个重要问题是: 当原方程具有均方稳定性时, 相应数值方法是否能够保持这种稳定结构。对于含时滞的随机方程, Euler-Maruyama 方法的稳定性条件通常涉及方程参数、噪声强度、时滞长度以及步长之间的关系; 相关研究包括带跳随机时滞方程的数值稳定性、随机泛函微分方程 Euler-Maruyama 近似的指数稳定性, 以及随机时滞方程解析解稳定性等, 参见 [7]-[9]。此外, Cao 等 [10] 较早研究了随机时滞微分方程 Euler-Maruyama 方法的均方稳定性。需要指出的是, 王琦 [11] 已针对扩散项同时含当前状态与时滞状态的标量随机延迟微分方程研究了 Euler-Maruyama 方法的均方稳定性。本文所考虑模型可视为该类模型在扩散项不含时滞状态时的一个特殊情形。与该文相比, 本文不追求建立更一般的稳定性理论, 而是针对这一简化模型给出形式更直接、便于检验的均方指数稳定充分判据, 并通过 Monte Carlo 二阶矩估计说明步长和噪声强度对数值稳定行为的影响。

本文考虑如下—类标量线性随机时滞微分方程:

$$dX(t) = (aX(t) + bX(t-\tau))dt + \sigma X(t)dW(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

其中 $a, b, \sigma \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$ 为常时滞, $W(t)$ 为一维标准布朗运动。该模型能够同时反映线性耗散、历史反馈和乘性噪声对系统稳定性的影响, 适合作为推导显式稳定性判据和分析数值稳定性保持性质的可解析模型。

在已有随机时滞微分方程数值稳定性研究的基础上, 本文围绕方程(1)给出一组形式简单、可直接计算和检验的稳定性充分判据, 并说明 Euler-Maruyama 方法在小步长下保持解析均方指数稳定性的机制。主要工作如下: 利用 Itô 公式和 Halanay 型不等式建立解析均方指数稳定性条件; 构造 Euler-Maruyama 格式并推导二阶矩递推估计; 给出数值均方指数稳定的显式步长条件, 并证明数值方法在充分小且与时滞相容的步长下保持解析稳定性; 最后通过数值实验展示步长和噪声强度对数值稳定性的影响。

2. 模型与预备知识

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ 为满足通常条件的完备滤过概率空间, $W(t)$ 为定义在该空间上的一维标准布朗运动。本文研究标量线性随机时滞微分方程(1), 并配以初始条件

$$X(t) = \varphi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (2)$$

其中初始段 $\varphi = \{\varphi(\theta) : -\tau \leq \theta \leq 0\}$ 为 \mathcal{F}_0 -可测的连续随机函数, 并满足

$$\mathbb{E} \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|^2 < \infty.$$

由于方程(1)的漂移项和扩散项均为线性函数, 故在上述条件下方程存在唯一强解, 并且解具有有限二阶矩。

定义 2.1 (解析解的均方指数稳定性)

若存在常数 $C > 0$ 和 $\lambda > 0$, 使得对任意满足(2)的初始函数 φ , 方程(1)的解满足

$$\mathbb{E}|X(t)|^2 \leq Ce^{-\lambda t} \mathbb{E} \sup_{-\tau \leq s \leq 0} |\varphi(s)|^2, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

则称方程(1)的零解是均方指数稳定的。

为了处理时滞项, 下面给出本文将使用的 Halanay 型不等式。

引理 2.1 (Halanay 型不等式)

设 u 为从 $[-\tau, \infty)$ 到 $[0, \infty)$ 的连续函数, 且在 $t \geq 0$ 上满足

$$D^+ u(t) \leq -\alpha u(t) + \beta \sup_{t-\tau \leq s \leq t} u(s), \quad (4)$$

其中 D^+ 表示右上 Dini 导数, $\alpha > \beta \geq 0$ 。则存在 $\lambda > 0$, 使得

$$u(t) \leq \left(\sup_{-\tau \leq s \leq 0} u(s) \right) e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0. \quad (5)$$

特别地, $u(t) \rightarrow 0$ 指数成立。

证明 令

$$f(\lambda) := \alpha - \beta e^{\lambda \tau} - \lambda, \quad \lambda \geq 0.$$

由于 $f(0) = \alpha - \beta > 0$, 且 $f(\lambda) \rightarrow -\infty$ 当 $\lambda \rightarrow \infty$, 并且

$$f'(\lambda) = -\beta \tau e^{\lambda \tau} - 1 < 0,$$

故存在唯一正根 $\lambda_0 > 0$ 。任取 $0 < \lambda < \lambda_0$, 则

$$\lambda < \alpha - \beta e^{\lambda \tau}. \quad (6)$$

记

$$M := \sup_{-\tau \leq s \leq 0} u(s), \quad z(t) := Me^{-\lambda t}.$$

由于 $z(t)$ 单调递减, 对任意 $t \geq 0$ 有

$$\sup_{t-\tau \leq s \leq t} z(s) = z(t-\tau) = e^{\lambda \tau} z(t).$$

由(6)得

$$z'(t) = -\lambda z(t) > -\alpha z(t) + \beta e^{\lambda \tau} z(t) = -\alpha z(t) + \beta \sup_{t-\tau \leq s \leq t} z(s).$$

因此 z 是相应 Halanay 不等式的严格上解。结合 $u(s) \leq z(s)$, $-\tau \leq s \leq 0$, 由标准比较原理可得 $u(t) \leq z(t)$, 即

$$u(t) \leq Me^{-\lambda t} = \left(\sup_{-\tau \leq s \leq 0} u(s) \right) e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

证毕。

3. 解析解的均方指数稳定性

本节给出方程(1)零解均方指数稳定的充分条件。记

$$v(t) := \mathbb{E}|X(t)|^2.$$

引理 3.1 (二阶矩微分不等式)

设 $X(t)$ 为方程(1)的解, 则对 $t \geq 0$, 有

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}|X(t)|^2 \leq (2a + \sigma^2 + |b|) \mathbb{E}|X(t)|^2 + |b| \mathbb{E}|X(t-\tau)|^2. \quad (7)$$

证明

由 Itô 公式可得

$$\begin{aligned} d|X(t)|^2 &= 2X(t)dX(t) + \sigma^2 X^2(t)dt \\ d|X(t)|^2 &= \left[(2a + \sigma^2)X^2(t) + 2bX(t)X(t-\tau) \right] dt + 2\sigma X^2(t)dW(t). \end{aligned}$$

两边取期望, 并利用随机积分项期望为零, 得到

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}|X(t)|^2 = (2a + \sigma^2) \mathbb{E}|X(t)|^2 + 2b \mathbb{E}[X(t)X(t-\tau)]. \quad (8)$$

由基本不等式 $2|xy| \leq x^2 + y^2$, 有

$$2b \mathbb{E}[X(t)X(t-\tau)] \leq |b| \mathbb{E}|X(t)|^2 + |b| \mathbb{E}|X(t-\tau)|^2.$$

代入(8)即得(7)。证毕。

定理 3.1 (解析解的均方指数稳定性)

若参数满足

$$2a + \sigma^2 + 2|b| < 0, \quad (9)$$

则方程(1)的零解是均方指数稳定的。更确切地说, 存在常数 $\lambda > 0$, 使得

$$\mathbb{E}|X(t)|^2 \leq e^{-\lambda t} \mathbb{E} \sup_{-\tau \leq s \leq 0} |\varphi(s)|^2, \quad t \geq 0. \quad (10)$$

证明 令

$$\alpha := -(2a + \sigma^2 + |b|), \quad \beta := |b|.$$

条件(9)等价于 $\alpha > \beta \geq 0$ 。由引理 3.1, 对 $v(t) = \mathbb{E}|X(t)|^2$ 有

$$v'(t) \leq -\alpha v(t) + \beta v(t-\tau) \leq -\alpha v(t) + \beta \sup_{t-\tau \leq s \leq t} v(s).$$

由引理 2.1 可得

$$v(t) \leq e^{-\lambda t} \sup_{-\tau \leq s \leq 0} v(s), \quad t \geq 0.$$

又因为

$$\sup_{-\tau \leq s \leq 0} \mathbb{E}|\varphi(s)|^2 \leq \mathbb{E} \sup_{-\tau \leq s \leq 0} |\varphi(s)|^2,$$

于是得到(10)。因此零解是均方指数稳定的。证毕。

4. Euler-Maruyama 方法的均方稳定性

本节研究方程(1)的 Euler-Maruyama 离散格式。取均匀网格 $t_k = kh$, 其中 $h > 0$ 为步长。为避免插值带来的额外技术问题, 假设时滞 τ 是步长的整数倍, 即

$$\tau = mh, \quad (11)$$

其中 m 为正整数。记

$$Y_k \approx X(t_k), \quad \Delta W_k := W(t_{k+1}) - W(t_k).$$

Euler-Maruyama 格式定义为

$$Y_{k+1} = Y_k + h(aY_k + bY_{k-m}) + \sigma Y_k \Delta W_k = (1 + ah + \sigma \Delta W_k) Y_k + bhY_{k-m}, \quad k \geq 0. \quad (12)$$

初始值由

$$Y_k = \varphi(t_k), \quad k = -m, -m+1, \dots, 0, \quad (13)$$

给出。

定义 4.1 (数值解的均方指数稳定性)

若存在常数 $C > 0$ 和 $\lambda_h > 0$, 使得对任意 \mathcal{F}_0 -可测且平方可积的初始向量 $\{Y_j : -m \leq j \leq 0\}$, Euler-Maruyama 数值解满足

$$\mathbb{E}|Y_k|^2 \leq Ce^{-\lambda_h k} \max_{-m \leq j \leq 0} \mathbb{E}|Y_j|^2, \quad k \geq 0,$$

则称格式(12)是均方指数稳定的。

引理 4.1 (二阶矩递推估计)

设 Y_k 由 Euler-Maruyama 格式(12)给出。令

$$q(h) := (|1 + ah| + |b|h)^2 + \sigma^2 h. \quad (14)$$

则对任意 $k \geq 0$, 有

$$\mathbb{E}|Y_{k+1}|^2 \leq q(h) \max\{\mathbb{E}|Y_k|^2, \mathbb{E}|Y_{k-m}|^2\}. \quad (15)$$

证明

由(12), 并注意到 Y_k 和 Y_{k-m} 均为 \mathcal{F}_{t_k} -可测, 且 ΔW_k 与 \mathcal{F}_{t_k} 独立, $\mathbb{E}\Delta W_k = 0$ 、 $\mathbb{E}|\Delta W_k|^2 = h$, 可得

$$\mathbb{E}|Y_{k+1}|^2 = \left((1+ah)^2 + \sigma^2 h \right) \mathbb{E}|Y_k|^2 + 2bh(1+ah) \mathbb{E}(Y_k Y_{k-m}) + b^2 h^2 \mathbb{E}|Y_{k-m}|^2.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$|\mathbb{E}(Y_k Y_{k-m})| \leq \left(\mathbb{E}|Y_k|^2 \right)^{1/2} \left(\mathbb{E}|Y_{k-m}|^2 \right)^{1/2}.$$

因此

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|Y_{k+1}|^2 &\leq \left((1+ah)^2 + \sigma^2 h \right) \mathbb{E}|Y_k|^2 + 2|b|h|1+ah| \left(\mathbb{E}|Y_k|^2 \right)^{1/2} \left(\mathbb{E}|Y_{k-m}|^2 \right)^{1/2} + b^2 h^2 \mathbb{E}|Y_{k-m}|^2 \\ \mathbb{E}|Y_{k+1}|^2 &\leq \left((1+ah+|b|h)^2 + \sigma^2 h \right) \max \left\{ \mathbb{E}|Y_k|^2, \mathbb{E}|Y_{k-m}|^2 \right\}, \end{aligned}$$

即得(15)。证毕。

定理 4.1 (Euler-Maruyama 格式的均方指数稳定性)

若步长 h 满足

$$q(h) = (|1+ah| + |b|h)^2 + \sigma^2 h < 1, \quad (16)$$

则 Euler-Maruyama 格式(12)是均方指数稳定的。具体地, 记

$$M_0 := \max_{-m \leq j \leq 0} \mathbb{E}|Y_j|^2,$$

则对任意 $k \geq 1$, 有

$$\mathbb{E}|Y_k|^2 \leq q(h)^{\lfloor (k-1)/(m+1) \rfloor + 1} M_0. \quad (17)$$

特别地, 当 $0 < q(h) < 1$ 时, 取

$$\rho := q(h)^{1/(m+1)} \in (0, 1), \quad \lambda_h := -\frac{\log \rho}{h} > 0,$$

则

$$\mathbb{E}|Y_k|^2 \leq e^{-\lambda_h k} M_0, \quad k \geq 1.$$

若 $q(h) = 0$, 则 $Y_k = 0$ 在二阶矩意义下对所有 $k \geq 1$ 成立。因此格式(12)均方指数稳定。

证明

记 $V_k := \mathbb{E}|Y_k|^2$ 。由引理 4.1,

$$V_{k+1} \leq q(h) \max \{V_k, V_{k-m}\}, \quad k \geq 0. \quad (18)$$

若 $q(h) = 0$, 则由(18)立即得到 $V_k = 0$ 对所有 $k \geq 1$ 成立, 结论显然。下面设 $0 < q(h) < 1$ 。

先证明分块估计: 对任意整数 $r \geq 0$,

$$V_j \leq q(h)^{r+1} M_0, \quad r(m+1)+1 \leq j \leq (r+1)(m+1). \quad (19)$$

当 $r = 0$ 时, 需要证明

$$V_j \leq q(h) M_0, \quad 1 \leq j \leq m+1.$$

对 j 作归纳。首先, 由(18)取 $k = 0$ 得

$$V_1 \leq q(h) \max \{V_0, V_{-m}\} \leq q(h) M_0.$$

假设对某个 $1 \leq j \leq m$ 已知 $V_i \leq q(h) M_0$ 对 $1 \leq i \leq j$ 成立。取 $k = j$, 则 $j - m \leq 0$, 从而 $V_{j-m} \leq M_0$ 。又因 $0 < q(h) < 1$, 由归纳假设有 $V_j \leq q(h) M_0 \leq M_0$ 。代入(18)得

$$V_{j+1} \leq q(h) \max \{V_j, V_{j-m}\} \leq q(h) M_0.$$

故(19)对 $r = 0$ 成立。

现在假设(19)对所有 $0, 1, \dots, r-1$ 成立, 其中 $r \geq 1$ 。我们证明它对 r 成立。对

$$j = r(m+1)+1, \dots, (r+1)(m+1)$$

作归纳。令 $j = k+1$, 则

$$r(m+1) \leq k \leq (r+1)(m+1) - 1.$$

一方面, 若 $k = r(m+1)$, 则 k 属于上一分块的末端, 由归纳假设得

$$V_k \leq q(h)^r M_0.$$

若 $k > r(m+1)$, 则 k 已经属于当前分块中此前已处理过的指标, 由当前分块的归纳假设得

$$V_k \leq q(h)^{r+1} M_0 \leq q(h)^r M_0.$$

另一方面, 由于

$$k - m \leq (r+1)(m+1) - 1 - m = r(m+1),$$

故 $k - m$ 不超过上一分块的末端。由初始定义和前面各分块估计可得

$$V_{k-m} \leq q(h)^r M_0.$$

将上述两个估计代入(18), 得到

$$V_j = V_{k+1} \leq q(h) \max \{V_k, V_{k-m}\} \leq q(h)^{r+1} M_0.$$

因此(19)对第 r 个分块成立。由数学归纳法, 分块估计成立。

对任意 $k \geq 1$, 取

$$r = \text{floor} \left(\frac{k-1}{m+1} \right).$$

则

$$r(m+1)+1 \leq k \leq (r+1)(m+1),$$

由(19)得

$$V_k \leq q(h)^{\text{floor}((k-1)/(m+1))+1} M_0.$$

又因为

$$\text{floor} \left(\frac{k-1}{m+1} \right) + 1 \geq \frac{k}{m+1}, \quad k \geq 1,$$

且 $0 < q(h) < 1$, 故

$$V_k \leq q(h)^{k/(m+1)} M_0 = \rho^k M_0.$$

由 $t_k = kh$ 以及 $\lambda_h = -h^{-1} \log \rho > 0$, 得到

$$V_k \leq e^{-\lambda_h t_k} M_0, \quad k \geq 1.$$

因此 Euler-Maruyama 格式均方指数稳定。证毕。

推论 4.1 (稳定性保持)

若原方程参数满足

$$2a + \sigma^2 + 2|b| < 0, \quad (20)$$

则存在 $h_0 > 0$, 使得对任意满足 $0 < h < h_0$ 且 τ/h 为正整数的步长, Euler-Maruyama 格式(12)均方指数稳定。更具体地, 记

$$\gamma := -(2a + 2|b| + \sigma^2) > 0.$$

可取 $h_0 > 0$ 满足

$$0 < h_0 \leq \frac{1}{2} \min \left\{ -\frac{1}{a}, \frac{\gamma}{(a+|b|)^2} \right\}. \quad (21)$$

证明

由条件(20)可知

$$\gamma := -(2a + 2|b| + \sigma^2) > 0.$$

特别地,

$$a + |b| < -\frac{\sigma^2}{2} \leq 0.$$

由于 $\gamma > 0$ 蕴含 $a < 0$, 故 $-1/a > 0$ 。取 h_0 满足(21)。当 $0 < h < h_0$ 时, 有 $1 + ah > 0$, 于是

$$q(h) = (1 + ah + |b|h)^2 + \sigma^2 h$$

$$q(h) = 1 - \gamma h + h^2 (a + |b|)^2$$

$$q(h) = 1 - h(\gamma - h(a + |b|)^2) < 1.$$

再要求 τ/h 为正整数, 由定理 4.1 得 Euler-Maruyama 格式均方指数稳定。证毕。

注 4.1

条件(16)是本文给出的充分条件, 而非必要条件。当 $q(h) \geq 1$ 时, 只能说明本文的稳定性判据不再适用, 不能直接推出数值解必然发散。数值实验中也可能出现 $q(h) \geq 1$ 但有限时间内二阶矩仍下降的情形。

5. 数值实验

本节通过 Monte Carlo 方法说明前述理论结果。若无特别说明, 初始函数均取

$$\varphi(t) = 1, \quad -\tau \leq t \leq 0,$$

时滞取 $\tau = 1$, 数值模拟区间取 $0 \leq t \leq 10$ 。每组实验使用 $M = 20000$ 条样本路径估计二阶矩, 即

$$\mathbb{E}|Y_k|^2 \approx \frac{1}{M} \sum_{r=1}^M |Y_k^{(r)}|^2.$$

其中第 r 条样本路径满足

$$Y_{k+1}^{(r)} = (1 + ah + \sigma \Delta W_k^{(r)}) Y_k^{(r)} + bh Y_{k-m}^{(r)}, \Delta W_k^{(r)} \sim N(0, h).$$

为清晰展示二阶矩的衰减或增长趋势，以下图像均采用对数纵轴绘制。

5.1. 不同步长下的稳定性比较

取

$$a = -3, b = 0.5, \sigma = 1, \tau = 1.$$

此时

$$2a + \sigma^2 + 2|b| = -6 + 1 + 1 = -4 < 0,$$

故原方程满足定理 3.1 中的均方指数稳定条件。对不同步长计算 $q(h)$ ，结果见表 1。

Table 1. Stability criterion values for different stepsizes

表 1. 不同步长下的稳定性判据值

步长 h	$m = \tau/h$	$q(h)$	本文判据
0.1	10	0.6625	满足
0.2	5	0.4500	满足
1.0	1	7.2500	不满足

由表 1 可见，当 $h = 0.1$ 和 $h = 0.2$ 时，有 $q(h) < 1$ ，满足本文的数值稳定性充分判据；当 $h = 1.0$ 时，有 $q(h) > 1$ ，本文判据不再适用。相应的 Monte Carlo 二阶矩估计变化趋势见图 1。图 1 表明，当 $h = 0.1$ 和 $h = 0.2$ 时，二阶矩迅速衰减，与 $q(h) < 1$ 的理论判据一致；当 $h = 1.0$ 时，数值实验中观察到二阶矩增长现象。这说明过大的步长可能破坏 Euler-Maruyama 格式对原方程稳定性的保持。

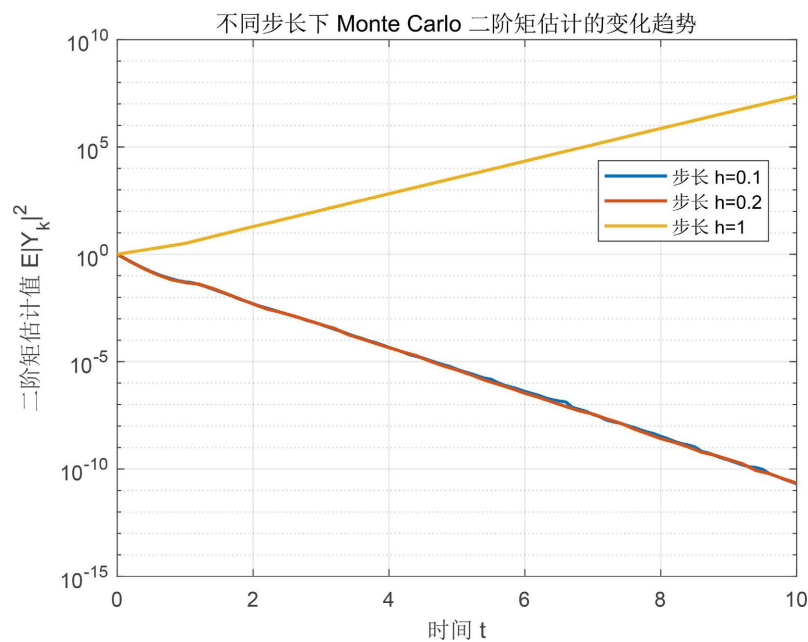


Figure 1. Monte Carlo estimates of the second moment under different stepsizes

图 1. 不同步长下 Monte Carlo 二阶矩估计的变化趋势

5.2. 噪声强度对稳定性的影响

固定

$$a = -3, b = 0.5, h = 0.05, \tau = 1,$$

分别取

$$\sigma = 0.5, \sigma = 1.0, \sigma = 3.0.$$

由稳定性条件可知，噪声强度通过 σ^2 影响二阶矩的增长率。不同噪声强度下 Monte Carlo 二阶矩估计的变化趋势见图 2。

图 2 表明，当噪声强度较小时，二阶矩整体呈快速衰减趋势；当噪声强度增大时，曲线波动增强，且二阶矩衰减速度减慢。特别是当 $\sigma = 3.0$ 时，解析稳定性充分条件和数值稳定性充分判据均不再适用，数值二阶矩估计在有限时间内出现较明显波动。这说明较强乘性噪声可能削弱数值解的均方稳定行为。需要指出的是，该实验仅用于说明噪声强度对数值二阶矩行为的影响，并不构成对必要稳定条件的判定。

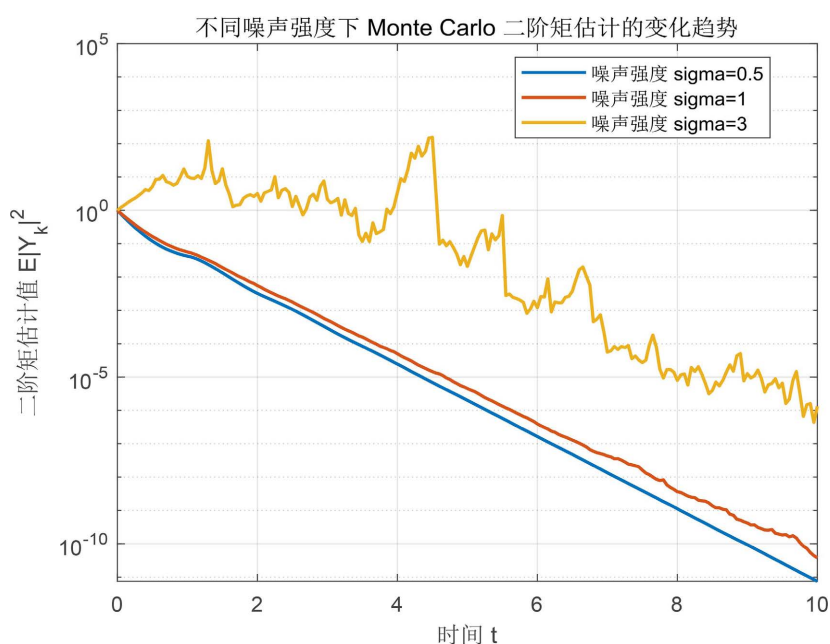


Figure 2. Monte Carlo estimates of the second moment under different noise intensities
图 2. 不同噪声强度下 Monte Carlo 二阶矩估计的变化趋势

6. 结论

本文研究了一类标量线性随机时滞微分方程 Euler-Maruyama 方法的均方稳定性。通过 Itô 公式、Halanay 型不等式以及二阶矩递推估计，分别得到了原方程零解均方指数稳定的充分条件

$$2a + \sigma^2 + 2|b| < 0$$

和 Euler-Maruyama 格式均方指数稳定的显式步长条件

$$q(h) = (|1 + ah| + |b|h)^2 + \sigma^2 h < 1.$$

进一步证明，在原方程满足上述解析稳定性条件时，数值方法在充分小且与时滞相容的步长下能够保持均方指数稳定性。

数值实验表明, 步长和噪声强度会影响数值解的长期均方行为, 实验结果与本文所得充分稳定性判据相符。需要指出的是, 本文条件主要是显式可检验的充分条件, 尚未成为最优判据。后续可进一步研究非线性、多维、变时滞以及隐式或半隐式数值格式的稳定性保持问题。

参考文献

- [1] Kloeden, P.E. and Platen, E. (1992) Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer.
- [2] Higham, D.J. (2001) An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations. *SIAM Review*, **43**, 525-546. <https://doi.org/10.1137/s0036144500378302>
- [3] Mao, X. (2007) Stochastic Differential Equations and Applications. 2nd Edition, Horwood Publishing.
- [4] Baker, C.T.H. and Buckwar, E. (2000) Numerical Analysis of Explicit One-Step Methods for Stochastic Delay Differential Equations. *LMS Journal of Computation and Mathematics*, **3**, 315-335. <https://doi.org/10.1112/s1461157000000322>
- [5] Buckwar, E. (2000) Introduction to the Numerical Analysis of Stochastic Delay Differential Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **125**, 297-307. [https://doi.org/10.1016/s0377-0427\(00\)00475-1](https://doi.org/10.1016/s0377-0427(00)00475-1)
- [6] Mao, X. (2003) Numerical Solutions of Stochastic Functional Differential Equations. *LMS Journal of Computation and Mathematics*, **6**, 141-161. <https://doi.org/10.1112/s1461157000000425>
- [7] Tan, J. and Wang, H. (2011) Mean-Square Stability of the Euler-Maruyama Method for Stochastic Differential Delay Equations with Jumps. *International Journal of Computer Mathematics*, **88**, 421-429. <https://doi.org/10.1080/00207160903474206>
- [8] Wu, F., Mao, X. and Kloeden, P.E. (2011) Almost Sure Exponential Stability of the Euler-Maruyama Approximations for Stochastic Functional Differential Equations. *Random Operators and Stochastic Equations*, **19**, 165-186. <https://doi.org/10.1515/rose.2011.010>
- [9] Ngoc, P.H.A. and Tran, K.Q. (2022) On Stability of Solutions of Stochastic Delay Differential Equations. *Systems & Control Letters*, **169**, Article 105384. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2022.105384>
- [10] Cao, W.R., Liu, M.Z. and Fan, Z.C. (2004) MS-Stability of the Euler-Maruyama Method for Stochastic Differential Delay Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **159**, 127-135. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.10.015>.
- [11] 王琦. 标量随机延迟微分方程 Euler-Maruyama 方法的均方稳定性分析[J]. 广东工业大学学报, 2011, 28(1): 50-53.