

基于多尺度法的船舶非线性横摇动力学研究

李洪宇, 刘如宗, 杨心怡, 张媛媛, 江 娇*

上海海事大学理学院, 上海

收稿日期: 2026年6月7日; 录用日期: 2026年7月1日; 发布日期: 2026年7月8日

摘 要

随着我国海洋强国战略的深入推进, 海上运输和海洋资源开发规模持续扩大, 船舶作为海洋经济活动的重要载体, 其航行安全性日益受到关注。船舶横摇运动是影响航行安全的关键因素, 特别是在恶劣海况下, 非线性横摇可能引发大幅振荡甚至倾覆事故。本文针对船舶非线性横摇运动特性开展深入研究, 旨在为提升船舶稳性提供理论支撑。研究首先建立包含非线性恢复力矩和阻尼力矩的横摇运动方程, 然后通过多尺度法求得方程的近似解析解, 揭示系统在不同参数条件下的动力学特性。在此基础上, 采用数值模拟方法, 系统分析横摇角随时间的变化规律; 并通过对比不同阻尼条件下的运动特性, 研究评估了阻尼对船舶稳定性的影响。该研究为船舶减摇装置的设计和航行控制策略的制定提供了重要参考, 对保障海上作业安全、提高航运效率具有实际应用价值。

关键词

船舶稳定性, 非线性横摇, 多尺度法, 阻尼

Study of Nonlinear Ship-Roll Dynamics Based on the Multi-Scale Method

Hongyu Li, Ruzong Liu, Xinyi Yang, Yuanyuan Zhang, Jiao Jiang*

School of Science, Shanghai Maritime University, Shanghai

Received: June 7, 2026; accepted: July 1, 2026; published: July 8, 2026

Abstract

With the further implementation of China's maritime power strategy, the scale of maritime transportation and marine resource exploitation keeps expanding. As a vital carrier of marine economic activities, ships have drawn growing attention to their navigation safety. Ship rolling motion is a critical factor affecting navigational safety. In particular, under severe sea conditions, nonlinear

*通讯作者。

文章引用: 李洪宇, 刘如宗, 杨心怡, 张媛媛, 江娇. 基于多尺度法的船舶非线性横摇动力学研究[J]. 应用数学进展, 2026, 15(7): 1-11. DOI: 10.12677/aam.2026.157296

rolling can induce large-amplitude oscillations and even lead to ship capsizing. This paper conducts an in-depth investigation into the characteristics of nonlinear ship rolling motion, aiming to provide theoretical support for the improvement of ship stability. In this study, a rolling motion equation involving a nonlinear restoring moment and a damping moment is firstly established. The multi-scale method is then employed to derive the approximate analytical solutions of the governing equation, so as to reveal the dynamic characteristics of the system under various parameter conditions. On this basis, numerical simulation is adopted to systematically analyze the time-varying law of the roll angle. By comparing the motion responses under different damping levels, the influence of damping on ship dynamic stability is comprehensively evaluated. The research findings offer an important reference for the design of ship anti-rolling devices and the formulation of navigation control strategies, and possess practical engineering value in ensuring maritime operation safety and enhancing shipping efficiency.

Keywords

Ship Stability, Nonlinear Rolling, Multi-Scale Method, Damping

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在建设海洋强国的战略部署中，航运作为现代化运输综合体系的重要组成部分，承担着全球贸易大部分运输的重任。因此，提升航运的效能和安全水平，对于促进全球经济繁荣和保障国家经济利益具有重大意义。

随着海洋运输与海洋开发的不断深入发展，船舶在海浪中的运动状态的研究已成为船舶工程研究的重要前沿课题。船舶是海洋运输中最重要的载体，船舶的运载功能的保障以及航行的安全一直受到高度重视。船舶在海上风浪的行驶过程中会受到波浪等因素的影响，使得船舶会产生复杂的运动状态。当船舶在海面上航行时，在风浪的作用下可能会产生围绕其原始平衡位置做 6 个自由度的摇荡运动，分别为纵荡、横荡、垂荡、横摇、纵摇以及首摇[1]，其中风浪引起的船舶横摇运动是对船舶安全性影响最大的因素。轻微的横摇可能导致船上货物移位，造成财产损失；严重的横摇则会损坏船舶设备，影响正常航行，甚至可能导致船舶倾覆，严重威胁船员生命安全。

横摇运动的过程中，非线性因素是船舶运动失稳、大幅振荡乃至倾覆事故的核心诱因之一，深刻影响着船舶的航行安全与稳性表现。胡开业[2]研究船舶非线性横摇运动的分岔控制，通过多尺度法得到受控系统主共振下的相关方程，利用奇异性理论分析分岔特性，提出控制方法，以提高船舶横摇稳定性。李浩等人[3]主要研究船舶在正横规则波中的非线性横摇运动方程的线性化。利用非线性动力学理论中的 Floquet 理论、Melnikov 方法、Lyapunov 指数等分析方法，研究船舶在规则波浪中的非线性横摇近似解析解和分岔、混沌等非线性动力学行为。胡等人[4]以某集装箱船为研究对象，考虑阻尼力矩(线性项加立方项)和复原力矩的非线性，建立船舶横摇的非线性方程并得到船舶在波浪中的一阶近似解析解。Nayfeh [5]利用多尺度法求解了单自由度船舶横摇运动微分方程的二阶近似解，并利用 Floquet 理论确定了不同参数域下稳态解的存在区间。Wassermann 等人[6]开发了一种精确的估计方法，用以估算船舶横摇阻尼在衰减运动和受谐波激励时的横摇响应。Wang 等人[7]研究了一类具有乘性噪声的非线性船舶横摇运动在位移和速度延迟反馈控制下的随机动力学问题。Li 等人[8]研究了在风和波的作用下，一类船舶在纵波中横摇

运动的随机分岔和混沌问题综上, 现有研究从解析求解、理论分析、工程估算到分岔控制, 已为船舶非线性横摇动力学研究奠定了坚实基础, 但针对同时考虑非线性恢复力矩与非线性阻尼力矩(线性项加平方项)的船舶动力学系统, 尚未得到方程的近似解析解, 也未充分揭示两类非线性因素对船舶横摇运动的影响, 因此有必要开展进一步研究, 为船舶航行安全提供更全面的理论支撑与技术保障。

本文主要研究船舶的非线性横摇运动, 首先在非线性微分方程的理论基础上, 结合已研究的船舶横摇运动模型, 建立风浪中船舶横摇运动微分方程。然后, 利用多尺度法对建立的微分方程进行求解, 最后利用数值模拟来深入研究船舶稳定性特征并揭示非线性恢复力矩与非线性阻尼力矩对船舶横摇运动的影响。

2. 主要结果

考虑以下船舶横摇运动方程:

$$(I_{xx} + \delta I_{xx})\ddot{\theta} + B_1\dot{\theta} + B_2\dot{\theta}^2 + C_1\theta + C_3\theta^3 = F \cos(\omega t), \quad (1)$$

其中 $\theta = \theta(t)$ 为横摇角; I_{xx} 和 δI_{xx} 分别为船舶的横摇转动惯量和附加转动惯量, $(I_{xx} + \delta I_{xx})\ddot{\theta}$ 表示船体的惯性力矩; $B_1\dot{\theta} + B_2\dot{\theta}^2$ 表示非线性阻尼力矩; $C_1\theta + C_3\theta^3$ 表示非线性恢复力矩; $F \cos \omega t$ 表示船舶正横规则波激励函数, $F = I_{xx} \alpha_m \omega^2$ 为激励幅值, 其中 α_m 为船舶最大波倾角, ω 是波浪激励频率。

为了简化方程的计算, 并探讨不同横摇幅度的非线性阻尼和非线性恢复力矩对船舶稳定性的影响, 方程(1)左右两边同时除以 $(I_{xx} + \delta I_{xx})$ 后, 可以重新写为

$$\ddot{\theta} + \varepsilon_1\dot{\theta} + \varepsilon_2\dot{\theta}^2 + \omega_0^2\theta + \varepsilon_3\theta^3 = f \cos(\omega t), \quad (2)$$

其中

$$\varepsilon_1 = \frac{B_1}{I_{xx} + \delta I_{xx}}, \varepsilon_2 = \frac{B_2}{I_{xx} + \delta I_{xx}}, \omega_0^2 = \frac{C_1}{I_{xx} + \delta I_{xx}}, \varepsilon_3 = \frac{C_3}{I_{xx} + \delta I_{xx}}, f = \frac{F}{I_{xx} + \delta I_{xx}},$$

ω_0 为船舶横摇固有频率。

下面采用多尺度法[4][5], 即将关于时间 t 的高阶微分方程转化成多重时间尺度变量 T_n 的低阶偏微分方程进行求船舶横摇运动非线性微分方程的近似解析解。首先引入小参数 r ($0 < r < 1$) 使得

$$\varepsilon_1 = ra, \varepsilon_2 = rb, \varepsilon_3 = rc, f = rd,$$

同时, 引入激励频率失调参数 σ , 使得 $\omega = \omega_0 + r\sigma$ 。因此, 系统式(2)可以整理成为

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = -r(a\dot{\theta} + b\dot{\theta}^2 + c\theta^3 - d \cos(\omega_0 + r\sigma)t). \quad (3)$$

为求非线性横摇运动方程(3)的近似解, 引入不同尺度的时间变量

$$T_0 = t, T_1 = rt, T_2 = r^2t, \dots, T_n = r^n t.$$

设系统(2)的通解形式为

$$\theta(t) = \theta_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + r\theta_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + r^2\theta_2(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots. \quad (4)$$

定义微分算子, 用对 T_n 的偏导数算子来表示关于 t 导数算子如下:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + r \frac{\partial}{\partial T_1} + r^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots = D_0 + rD_1 + r^2D_2 + \dots, \quad (5)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = (D_0 + rD_1 + r^2D_2 + \dots)^2 = D_0^2 + 2rD_0D_1 + r^2(D_1^2 + 2D_0D_2) + \dots, \quad (6)$$

其中 $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ 。

将(4)、(5)、(6)式代入(3)式中, 为了简化计算, 时间尺度只考虑 T_0 和 T_1 , 根据 r 的同次幂系数进行整理得到以下偏微分方程:

$$r^0 : D_0^2 \theta_0 + \omega_0^2 \theta_0 = 0, \quad (7)$$

$$r^1 : D_0^2 \theta_1 + \omega_0^2 \theta_1 = -2D_0 D_1 \theta_0 - a D_0 \theta_0 - b (D_0 \theta_0)^2 - c \theta_0^3 + d \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1). \quad (8)$$

将方程(7)求解以后可得

$$\theta_0 = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega_0 T_0}. \quad (9)$$

再将(9)式代入到(8)式后, 得到

$$\begin{aligned} D_0^2 \theta_1 + \omega_0^2 \theta_1 = & -2D_1 (i\omega_0 A e^{i\omega_0 T_0} - i\omega_0 \bar{A} e^{-i\omega_0 T_0}) - a (i\omega_0 A e^{i\omega_0 T_0} - i\omega_0 \bar{A} e^{-i\omega_0 T_0}) \\ & - b (i\omega_0 A e^{i\omega_0 T_0} - i\omega_0 \bar{A} e^{-i\omega_0 T_0})^2 - c (A e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A} e^{-i\omega_0 T_0})^3 \\ & + \frac{d}{2} (e^{i(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)} + e^{-i(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)}). \end{aligned} \quad (10)$$

将(10)整理后可得

$$\begin{aligned} D_0^2 \theta_1 + \omega_0^2 \theta_1 = & -2i\omega_0 D_1 A e^{i\omega_0 T_0} - ai\omega_0 A e^{i\omega_0 T_0} + b\omega_0^2 A^2 e^{2i\omega_0 T_0} - b\omega_0^2 |A|^2 \\ & - cA^3 e^{3i\omega_0 T_0} - 3cA^2 \bar{A} e^{i\omega_0 T_0} + \frac{d}{2} e^{i(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)} + cc, \end{aligned} \quad (11)$$

其中 cc 为前面项的复共轭。

为了得到一致有效的展开式, 需要消除(11)式中的长期项(又称永年项, secular terms)。此类项会导致系统在时间 t 趋于无穷大时, 其振幅与能量均趋向无穷, 同时引发频率相等项之间的共振现象; 但从物理实际出发, 这种情况显然违背客观规律。在微分方程的求解过程中, 即便齐次解具有有界性, 永年项的存在仍会致使非齐次解失去有界性。因此, 在求解过程中通过调整控制参数, 需要消除这些“永年项”(久期项), 以此降低数值解的误差, 确保求解结果的准确性与可靠性。令

$$2i\omega_0 D_1 A + ai\omega_0 A + 3cA^2 \bar{A} - \frac{d}{2} e^{i\sigma T_1} = 0,$$

进而得到

$$D_1 A = \frac{-a}{2} A + \frac{3ciA^2 \bar{A}}{2\omega_0} - \frac{ide^{i\sigma T_1}}{4\omega_0}. \quad (12)$$

消除长期项后(11)变为

$$D_0^2 \theta_1 + \omega_0^2 \theta_1 = b\omega_0^2 A^2 e^{2i\omega_0 T_0} - b\omega_0^2 |A|^2 - cA^3 e^{3i\omega_0 T_0} + cc. \quad (13)$$

求解(13)可得

$$\theta_1 = -\frac{b}{3} (A^2 e^{2i\omega_0 T_0} + \bar{A}^2 e^{-2i\omega_0 T_0}) - 2b|A|^2 + \frac{c}{8\omega_0^2} (A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + \bar{A}^3 e^{-3i\omega_0 T_0}). \quad (14)$$

将 A 表示为指数形式:

$$A(T_1) = \frac{1}{2} \alpha(T_1) e^{i\beta(T_1)}, \quad (15)$$

那么

$$\dot{A} = \frac{1}{2} \dot{\alpha} e^{i\beta} + \frac{i}{2} \alpha e^{i\beta} \times \dot{\beta}. \quad (16)$$

因此, 结合(12)、(15)和(16), 分离实部虚部可以得到

$$D_1 \alpha = \frac{-a\alpha}{2} + \frac{d \sin(\sigma T_1 - \beta)}{2\omega_0}, \quad (17)$$

$$D_1 \beta = \frac{3c\alpha^2}{8\omega_0} - \frac{d \cos(\sigma T_1 - \beta)}{2\alpha\omega_0}. \quad (18)$$

再令 $\phi = \sigma T_1 - \beta$, 所以 $D_1 \phi = \sigma - D_1 \beta$ 。因此 $D_1 \phi$ 的表达式为

$$D_1 \phi = \sigma - \frac{3c\alpha^2}{8\omega_0} + \frac{d \cos(\sigma T_1 - \beta)}{2\alpha\omega_0}.$$

为了达到稳定状态, 需要满足稳态条件 $D_1 \alpha = D_1 \phi = 0$ 。因此, 我们可以得到关于振幅 α 和相位 ϕ 的代数方程式

$$\frac{a\alpha}{2} = \frac{d \sin \phi}{2\omega_0}, \quad (19)$$

$$-\sigma\alpha + \frac{3c\alpha^3}{8\omega_0} = \frac{d \cos \phi}{2\omega_0}. \quad (20)$$

将(19)和(20)式的平方相加便可以消去 ϕ , 从而得到横摇稳态解的幅频曲线方程如下所示:

$$\left[\left(\frac{a}{2} \right)^2 + \left(\sigma - \frac{3c\alpha^2}{8\omega_0} \right)^2 \right] \alpha^2 = \left(\frac{d}{2\omega_0} \right)^2. \quad (21)$$

再利用(19)式除以(20)式, 便可以得到横摇稳态解的相频曲线方程:

$$\frac{\frac{a}{2}}{-\sigma + \frac{3c\alpha^2}{8\omega_0}} = \tan \phi. \quad (22)$$

将横摇稳态解的幅频曲线方程用方程中原来的参数可表示为

$$\left[\left(\frac{\varepsilon_1}{2} \right)^2 + \left(\omega - \omega_0 - \frac{3\varepsilon_3 \alpha^2}{8\omega_0} \right)^2 \right] \alpha^2 = \left(\frac{f}{2\omega_0} \right)^2. \quad (23)$$

结合(3)、(9)和(14)可得横摇运动的一阶解析解为

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0 + r\theta_1 \\ &= A e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A} e^{-i\omega_0 T_0} + r \left[-\frac{b}{3} \left(A^2 e^{2i\omega_0 T_0} + \bar{A}^2 e^{-2i\omega_0 T_0} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2b|A|^2 + \frac{c}{8\omega_0^2} \left(A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + \bar{A}^3 e^{-3i\omega_0 T_0} \right) \right], \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $A = 1/2 \alpha e^{i\beta}$, α 和 β 通过(17)和(18)式利用数值方法求出。

通过上述步骤，成功运用多尺度法求解了船舶横摇非线性微分方程。这些幅频曲线方程和相频曲线方程，能够直观反映船舶横摇运动的特性，为船舶在不同海况下的稳定性分析和运动控制提供了重要的理论依据。在实际船舶工程中，可根据这些方程，结合船舶的具体参数和航行环境，优化船舶设计，提高船舶在风浪中的航行安全性和稳定性。

3. 数值模拟

本节将利用数值模拟对不同因素对船舶稳定性的影响进行分析。船舶在复杂多变的海面上航行时，遇到的海浪、海风等一切都是未知的，下面利用 matlab 进行数值模拟以反映船舶横摇的运动特性。

3.1. 数值解与解析解的比较

根据式(24)我们已经得出船舶横摇运动方程的解析解，下面对比一下用数值方法得到的图像和解析解得到的图像有什么不同。利用式(1)和式(24)，可以得到数值解和解析解的横摇角随时间变化的图像以及对应的相图，如图 1、图 2 所示。在数值求解时，本文采用 Matlab 中的 ode45 方法对式(1)进行常微分方程数值求解，该方法属于四阶 Runge-Kutta 变步长算法。计算时间取 0~50 s，时间步长在 0.25 s~0.37 s 变化，初始条件取横摇角 $\theta(0) = -0.2$ 、横摇角速度 $d\theta/dt(0) = 0$ ，其余参数与图 1、图 2 中给出的参数保持一致。从图 1、图 2 观察到，横摇角呈现正弦信号状的周期性摆动，并且一直延续下去，没有产生较大的横摇角度，相图呈椭圆形。通过图 1 可以看出，数值计算得出的图像与解析解得出的图像相比基本趋势大致相同，都呈现出周期性振荡。但在开始阶段，数值解会受到初始条件的影响，存在一个短暂的瞬态调整过程，因此在个别峰值和相位上会与解析解有一定差别；当计算时间增加以后，瞬态影响逐渐减弱，两种结果都趋于稳定的周期运动。图 2 中的两种相轨迹整体形态高度一致，均为闭合类椭圆，说明多尺度法能较好地捕捉船舶横摇的周期运动特性。但由于解析解是一阶近似解，在求解过程中忽略了高阶非线性项，所以在幅值预测上仍会存在微小偏差。一般来说，当阻尼较大、波浪激励幅度较小时，系统非线性作用较弱，解析解与数值解符合得更好；当激励接近共振区域、波浪激励幅度增大或者恢复力矩非线性增强时，高阶项的影响会变得明显，近似解的误差也会随之增大。

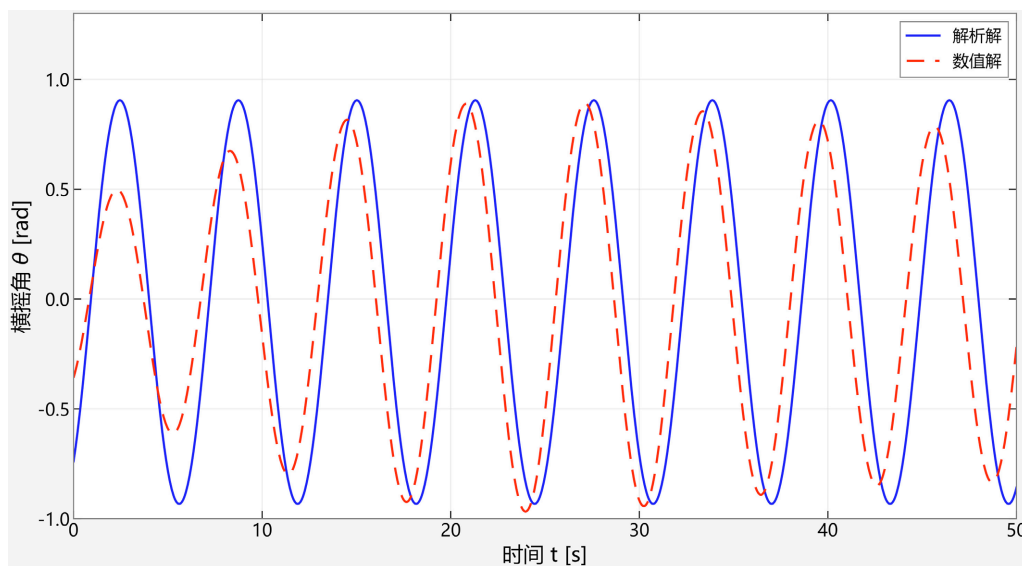


Figure 1. Time series curve of roll angle, where $\omega_0 = 1$, $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 0.05$, $\varepsilon_3 = -0.2$, $f = 0.15$

图 1. 横摇角随时间变化曲线，其中 $\omega_0 = 1$, $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 0.05$, $\varepsilon_3 = -0.2$, $f = 0.15$

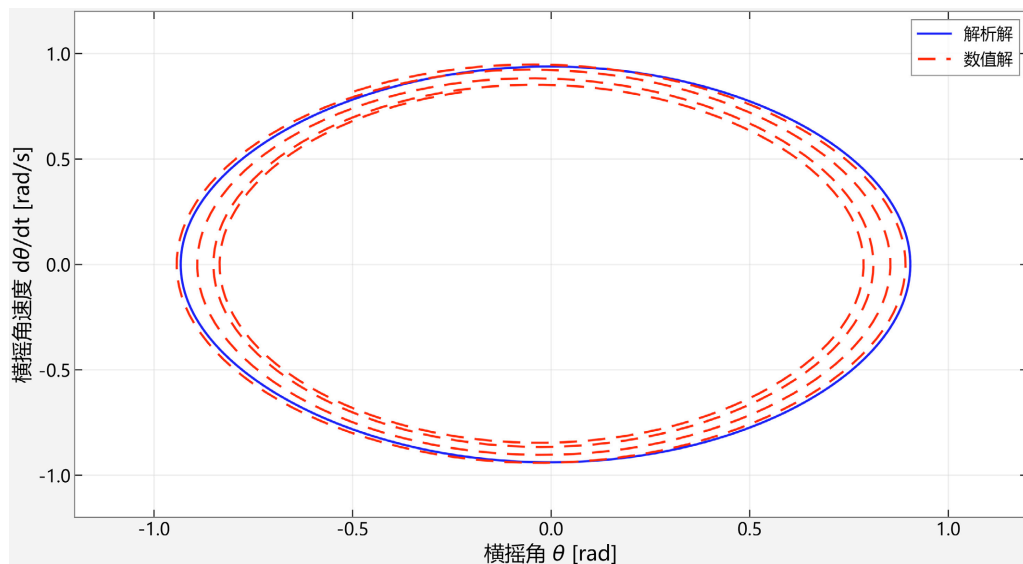


Figure 2. Phase portrait of roll angle and angular velocity, where $\omega_0 = 1$, $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 0.05$, $\varepsilon_3 = -0.2$, $f = 0.15$

图 2. 横摇角与角速度相图, 其中 $\omega_0 = 1$, $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 0.05$, $\varepsilon_3 = -0.2$, $f = 0.15$

3.2. 阻尼项对船舶横摇运动的影响

接下来, 我们分析当阻尼项增大时会对船舶横摇的运动状态的影响。

首先, 根据式子(21)和(22), 画出横摇稳态解的幅频曲线方程和相频曲线方程, 如图 3、图 4 所示。通过观察图 3 可以清晰地看出幅值与频率比的非线性关系, 可以发现当 s 即将接近 1 时, 也就是激励频率接近系统固有频率时, 横摇的幅值明显增大, 这就是典型的共振现象, 会导致船舶出现不稳定的状态。再观察相频响应曲线图 4 也是在接近 1 时相位急速增长, 与图 3 相对应。

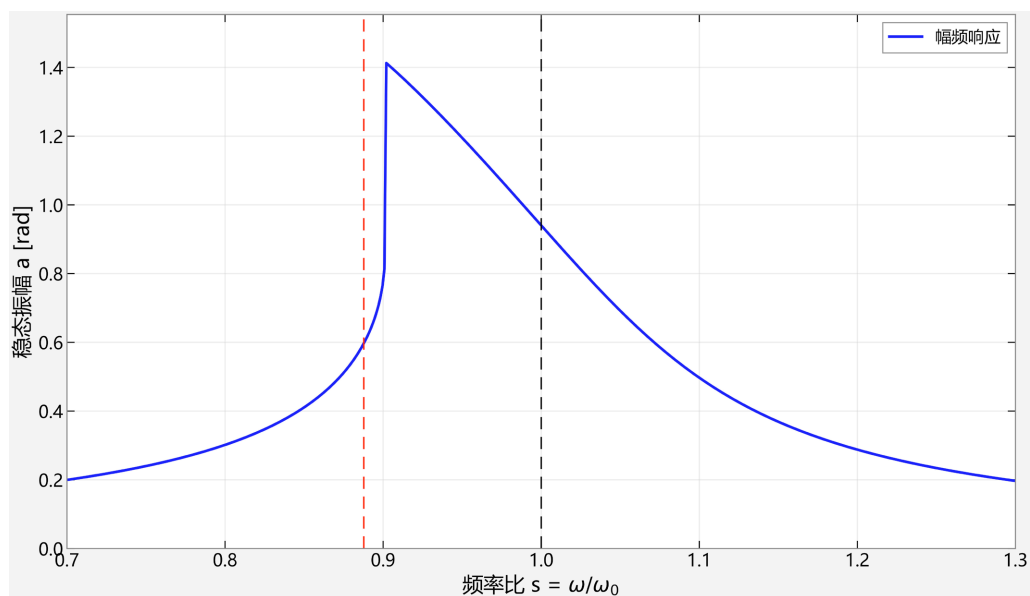


Figure 3. Amplitude-frequency response curve, where $\omega_0 = 1$, $\varepsilon_1 = 0.08$, $\varepsilon_3 = -0.15$, $f = 0.12$

图 3. 幅频响应曲线, 其中 $\omega_0 = 1$, $\varepsilon_1 = 0.08$, $\varepsilon_3 = -0.15$, $f = 0.12$

接着固定其他参数，只改变阻尼项 ε_1 的大小，观察横摇幅频曲线变化，如图 5 所示。可以发现随着 ε_1 的增大，横摇幅值逐渐降低，说明共振现象的程度逐渐减小，船舶的稳定程度也就逐渐增强。因此增大阻尼系数可以有效抑制共振峰值，缩短横摇衰减时间。

由此可以得出结论，当增大阻尼项参数的值，可以减少船舶的不稳定程度，有助于船舶稳定，并且阻尼系数越大，船舶横摇运动越稳定。

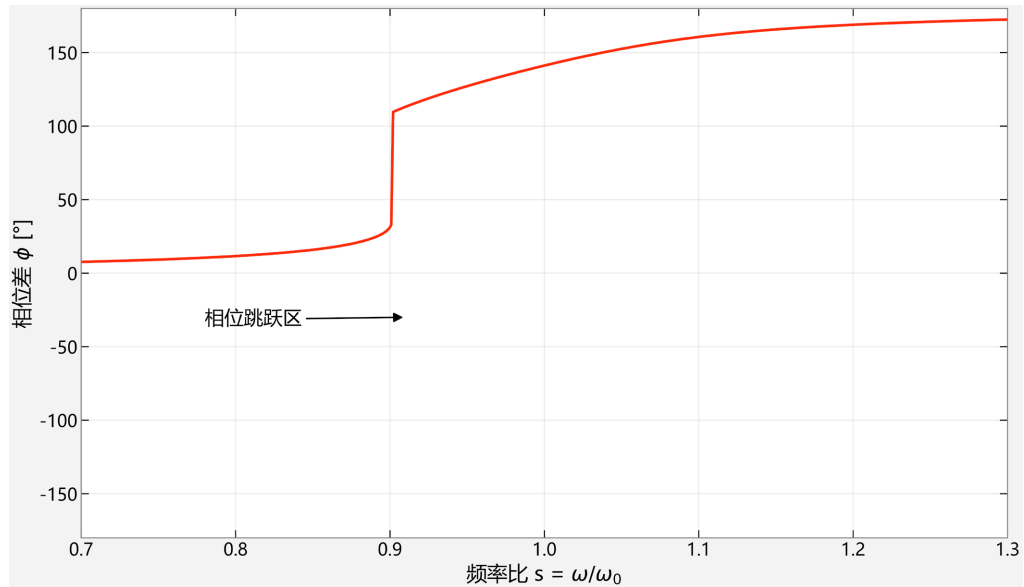


Figure 4. Phase-frequency response curve, where $\omega_0 = 1$, $\varepsilon_1 = 0.08$, $\varepsilon_3 = -0.15$, $f = 0.12$

图 4. 相频响应曲线, $\omega_0 = 1$, $\varepsilon_1 = 0.08$, $\varepsilon_3 = -0.15$, $f = 0.12$

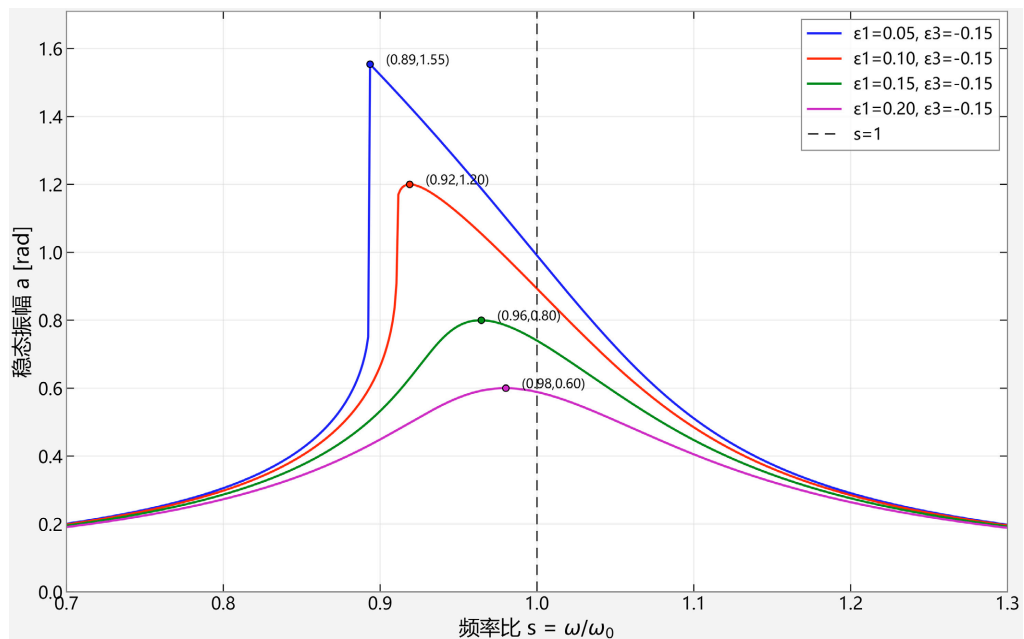


Figure 5. Amplitude-frequency response curves with different damping coefficient ε_1 , where $\omega_0 = 1$, $\varepsilon_3 = -0.15$, $f = 0.12$

图 5. 改变阻尼项 ε_1 大小的幅频响应曲线, 其中 $\omega_0 = 1$, $\varepsilon_3 = -0.15$, $f = 0.12$

3.3. 恢复力矩对船舶横摇运动的影响

下面研究恢复力矩系数对船舶横摇运动的影响。固定其他参数，改变非线性恢复力矩系数 ε_3 的大小，观察横摇幅频曲线变化，如图 6 所示。通过观察图 6 可以发现随着 $|\varepsilon_3|$ 越大，共振点偏移会越明显，幅值逐渐降低。因此，恢复力矩系数主要改变了船舶共振区的运动，即改变了船舶运动幅值的峰值以及出现峰值运动时对应的波浪激励频率，而且恢复力矩系数的增大会使幅频曲线刚度渐软的程度增大。

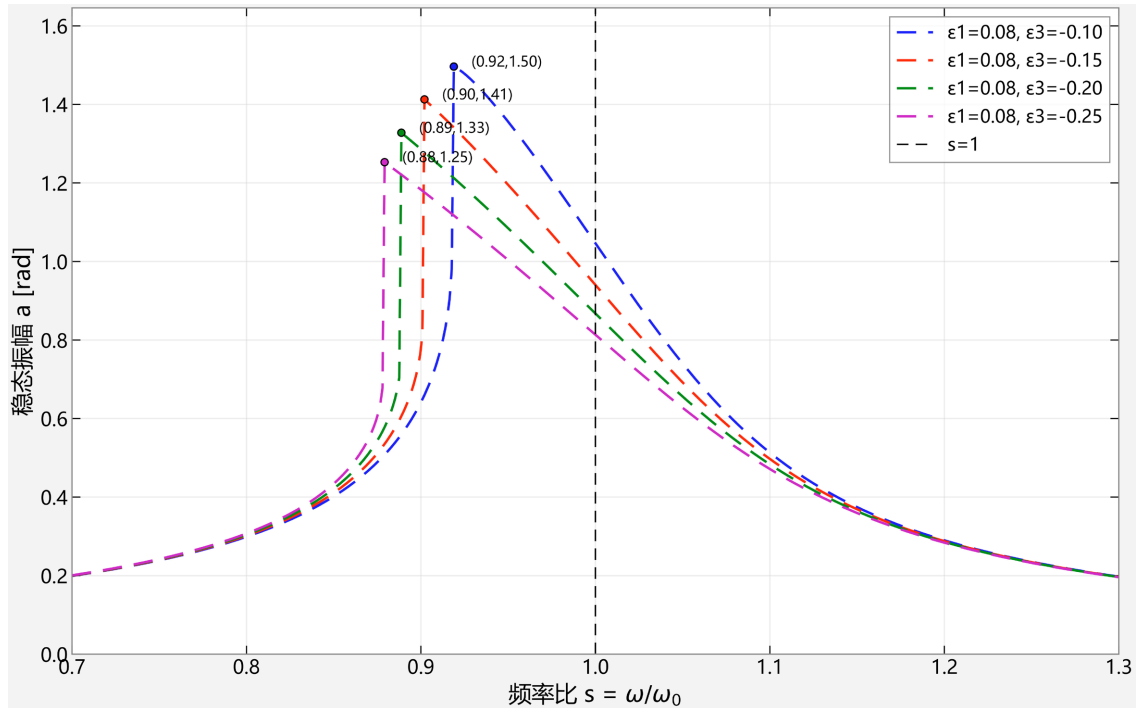


Figure 6. Amplitude-frequency response curves with different restoring moment ε_3 , where $\omega_0 = 1$, $\varepsilon_1 = 0.08$, $f = 0.12$

图 6. 改变恢复力矩 ε_3 大小的幅频响应曲线，其中 $\omega_0 = 1$, $\varepsilon_1 = 0.08$, $f = 0.12$

3.4. 波浪激励幅度对横摇运动的影响

根据式(23)，我们可以得出波浪激励幅度 f 与横摇幅值 α 的关系图，如图 7 所示。通过观察图 7 可以看出，低波高阶阶段横摇幅值随激励增强先小幅下降并反向偏移，随后在波高约 8 米处出现由参数共振主导的垂直跳跃现象，横摇角瞬间从约 2 度跃升至 6 度以上，这是非线性系统中典型的跳跃现象，也是参数共振曲线中常见的非线性特征。产生这种现象的原因不是船舶运动状态任意改变，而是波浪激励输入能量、阻尼耗能以及非线性恢复力矩之间的平衡关系发生了变化。当低幅值稳定解不能继续保持稳定时，系统就会离开原来的运动状态，并跳到另一条稳定解分支上，所以横摇幅值会突然增大。同时，由于恢复力矩中存在非线性项，系统的等效刚度会随横摇幅值改变，因而共振峰的位置也会发生偏移；若表现为软化特性，共振峰会向较低频率一侧移动，若表现为硬化特性，则会向较高频率一侧移动。在图 7 的激励 - 响应曲线中，两条稳定解分支之间还存在不稳定解分支，实际船舶横摇很难稳定停留在该分支上。当船舶处在临界激励附近时，较小的外界扰动就可能使横摇由小幅运动突然转为大幅运动，从而增加甲板上浪、货物移动、稳性降低甚至倾覆的风险。因此，在实际航行和船舶设计中，应尽量避免这类参数共振区域，并通过增加阻尼、改善恢复力矩特性等方法提高船舶横摇稳定性。

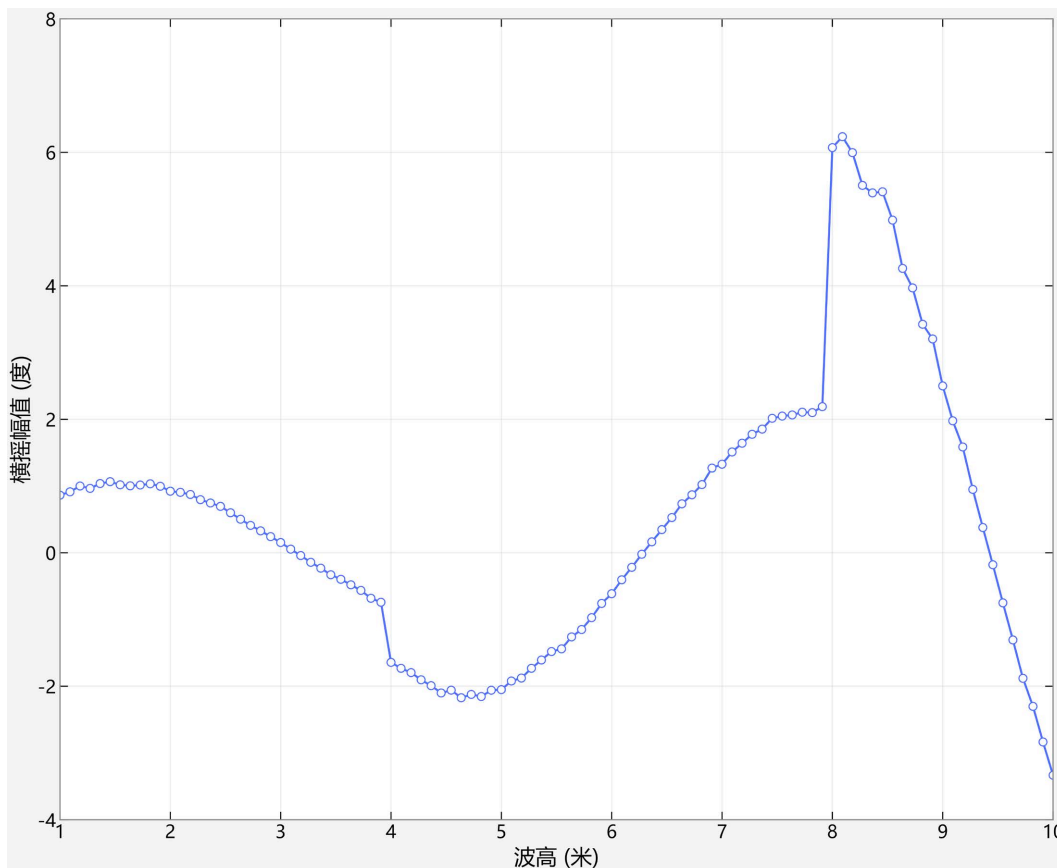


Figure 7. Roll amplitude vs. wave excitation curve for parametric resonance, where $\omega_0 = 1$, $\varepsilon_1 = 0.08$, $\varepsilon_3 = -0.15$

图 7. 参数共振时横摇幅值随波浪激励的变化曲线, 其中 $\omega_0 = 1$, $\varepsilon_1 = 0.08$, $\varepsilon_3 = -0.15$

4. 小结

本文通过研究单自由度的船舶横摇运动, 成功地利用了非线性动力学理论对此系统进行分析与计算, 利用多尺度法进行求解, 得到系统一阶近似解析解, 还从多方面深入研究船舶横摇运动的稳定性。通过对比数值解和解析解可知, 系统在给定参数下处于稳定的周期运动状态, 都能很好地预测船舶横摇的周期运动, 解析解在幅值预测上与数值解存在微小偏差。但解析解能清晰呈现横摇幅值、频率、稳定性等关键特性与系统参数(阻尼、恢复力矩系数、激励频率/幅值等)之间的直接函数关系, 可直接得到参数变化对运动的影响规律。通过增加阻尼系数, 可以增强船舶横摇运动的稳定状态。而恢复力矩系数主要改变了船舶共振区的运动, 而且恢复力矩系数的增大会使幅频曲线刚度渐软的程度增大。随着波浪激励幅度的增大, 横摇幅值会出现跳跃现象, 并可能由稳定小幅运动转为不稳定的大幅运动。

综上, 本研究揭示了船舶横摇运动的非线性特性对其稳定性具有显著影响, 通过优化关键参数可有效抑制大幅横摇, 降低倾覆风险, 对提升船舶航行安全水平具有重要工程价值。

参考文献

- [1] 李积德. 船舶耐波性[M]. 哈尔滨: 哈尔滨船舶工程学院出版社, 1992.
- [2] 胡开业. 船舶在波浪中的大幅横摇运动及其运动稳定性研究[D]: [博士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2011.

-
- [3] 李浩, 陆建辉. 船舶非线性横摇运动方程的线性化研究[J]. 船舶, 2011, 22(5): 1-4.
- [4] 胡安康, 刘亚冲, 卢雨, 等. 基于多尺度法的船舶非线性横摇运动特性研究[J]. 中国造船, 2016, 57(2): 13-21.
- [5] Nayfeh, A.H. and Khdeir, A.A. (1986) Nonlinear Rolling of Ships in Regular Beam Seas. *International Shipbuilding Progress*, **33**, 40-49. <https://doi.org/10.3233/isp-1986-3337901>
- [6] Wassermann, S., Feder, D. and Abdel-Maksoud, M. (2016) Estimation of Ship Roll Damping—A Comparison of the Decay and the Harmonic Excited Roll Motion Technique for a Post Panamax Container Ship. *Ocean Engineering*, **120**, 371-382. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2016.02.009>
- [7] Wang, M., Wei, Z., Wang, J., Yu, X. and Kapitaniak, T. (2024) Stochastic Bifurcation and Chaos Study for Nonlinear Ship Rolling Motion with Random Excitation and Delayed Feedback Controls. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **462**, Article ID: 134147. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2024.134147>
- [8] Li, Y., Wei, Z., Kapitaniak, T. and Zhang, W. (2022) Stochastic Bifurcation and Chaos Analysis for a Class of Ships Rolling Motion under Non-Smooth Perturbation and Random Excitation. *Ocean Engineering*, **266**, Article ID: 112859. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.112859>