Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2026, 15(6), 241-247**
Published Online June 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2026.156282

关于Von Neumann代数中单性投影的研究

龚禹豪

重庆移通学院数理教学部，重庆

收稿日期：2026年5月16日；录用日期：2026年6月7日；发布日期：2026年6月16日

摘　要

von Neumann代数是算子代数中的重要组成部分，而von Neumann代数都可以由它的投影生成，因此投影就成为了算子代数中一类重要的研究对象。本文研究了有限von Neumann代数中的单性投影，并对它的性质进行了一些刻画。设$\mathcal{M}$是作用于Hilbert空间$\mathcal{H}$上的I_n型von Neumann代数，$\mathcal{A}$是$\mathcal{M}$的极大交换子代数，投影E、F是$\mathcal{A}$中的两个单性投影，$\{E_1,\cdots,E_n\}$与$\{F_1,\cdots,F_n\}$为$\mathcal{M}$中的两列相互正交的投影族，并有$\sum_{i=1}^{n}E_i=I$，$\sum_{i=1}^{n}F_i=I$，$E\sim E_i$与$F\sim F_i$成立，这里$1\le i\le n$为正整数，那么对任意的$\varepsilon>0$，存在一个超弱连续正线性映射$\tau:\mathcal{M}\to\mathcal{C}$，使得$\tau(E)\le(1+\varepsilon)\tau(F)$成立。

关键词

部分等距，单性投影，等价投影，von Neumann代数

Studies of Monic Projections in Von Neumann Algebras

Yuhao Gong

Department of Mathematics and Physics, Chongqing College of Mobile Communication, Chongqing

Received: May 16, 2026; accepted: June 7, 2026; published: June 16, 2026

Abstract

Von Neumann algebras are an important part of operator algebras, and von Neumann algebras can be generated by its projections, so projections are an important research topic in operator algebras. In this paper, the monic projections in finite von Neumann algebras are studied, and some characterizations of their properties are given. If $\mathcal{M}$ is a I_n type von Neumann algebra acting on a Hil-

文章引用: 龚禹豪. 关于 Von Neumann 代数中单性投影的研究[J]. 应用数学进展, 2026, 15(6): 241-247.
DOI: 10.12677/aam.2026.156282

bert space $\mathcal{H}$, and let $\mathcal{A}$ be a maximal abelian subalgebra of $\mathcal{M}$, and E, F be two monic projections in $\mathcal{A}$, $\{E_1,\cdots,E_n\}$ and $\{F_1,\cdots,F_n\}$ are two mutually orthogonal projections families, and $\sum_{i=1}^{n} E_i = I$, $\sum_{i=1}^{n} F_i = I$, $E \sim E_i$ and $F \sim F_i$, where $i \in N^+$, then for any $\varepsilon > 0$, there is an ultraweakly continuous positive linear mapping $\tau : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ such that $\tau(E) \le (1+\varepsilon)\tau(F)$.

Keywords

Partial Isometric, Monic Projection, Equivalent Projection, Von Neumann Algebra

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言及主要结论

自 von Neumann 代数创立以来，von Neumann 代数中投影的运算及其性质就吸引了国内外众多学者的研究兴趣。2009 年，Kaftal [1]探讨了在因子 von Neumann 代数中，一个算子可以表示为一列投影算子的强算子拓扑和的条件。2013 年，Halpern 与 Kaftal 等人[2]在文献[1]的基础上，给出了 II_1 型因子 von Neumann 代数中正的可对角化算子 A 可被写成有限个投影的和的一个充分条件为 $\tau(A_+) > \tau(A_-)$ 或者 $\tau(A) \ge \tau(R_A)$。2014 年，Choi [3]等学者研究了 Hilbert 空间算子可被写成有限个正交投影的条件。2020 年，Goldstein 与 Paszkiewicz [4]深入研究了因子 von Neumann 代数中投影算子的线性组合的代数、几何与谱性质。2021 年，曹新彦，房军生与姚兆林[5]证明了 II 型因子 von Neumann 代数中的正算子 A 可以被写成投影和的一个充要条件是 $\tau(A_+) \ge \tau(A_-)$，该结果是对文献[2]的一个推广。在此基础上，本文主要受到 Kadison 的文献[6]的启发，研究了有限 von Neumann 代数中的单性投影。

下面是本文研究得出的主要结论。

定理 1.1 (本文定理 3.4) 设 $\mathcal{M}$ 是作用于 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的 I_n 型 von Neumann 代数，$\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{M}$ 的极大交换子代数，投影 E、F 是 $\mathcal{A}$ 中的两个单性投影，$\{E_1,\cdots,E_n\}$ 与 $\{F_1,\cdots,F_n\}$ 为 $\mathcal{M}$ 中的两列相互正交的投影族，并有 $\sum_{i=1}^{n} E_i = I$，$\sum_{i=1}^{n} F_i = I$，$E \sim E_i$ 与 $F \sim F_i$ 成立，这里 $1 \le i \le n$ 为正整数，那么，就有 $E \sim F$ 成立。

定理 1.2 (本文定理 3.6) 设 $\mathcal{M}$ 是作用于 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的 II_1 型 von Neumann 代数，$\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{M}$ 的极大交换子代数，投影 E、F 是 $\mathcal{A}$ 中的两个单性投影，$\{E_1,\cdots,E_n\}$ 与 $\{F_1,\cdots,F_n\}$ 为 $\mathcal{M}$ 中的两列相互正交的投影族，并有 $\sum_{i=1}^{n} E_i = I$，$\sum_{i=1}^{n} F_i = I$，$E \sim E_i$ 与 $F \sim F_i$ 成立，这里 $1 \le i \le n$ 为正整数，那么，就有 $E \sim F$ 成立。

定理 1.3 (本文定理 3.9) 设 $\mathcal{M}$ 是作用于 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的 I_n 型 von Neumann 代数，$\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{M}$ 的极大交换子代数，投影 E、F 是 $\mathcal{A}$ 中的两个单性投影，$\{E_1,\cdots,E_n\}$ 与 $\{F_1,\cdots,F_n\}$ 为 $\mathcal{M}$ 中的两列相互正交的投影族，并有 $\sum_{i=1}^{n} E_i = I$，$\sum_{i=1}^{n} F_i = I$，$E \sim E_i$ 与 $F \sim F_i$ 成立，这里 $1 \le i \le n$ 为正整数，那么对任意的 $\varepsilon > 0$，都存在一个超弱连续正线性映射 $\tau : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$，使得 $\tau(E) \le (1+\varepsilon)\tau(F)$ 成立。

2. 预备知识

定义 2.1 [6] 设 $\mathcal{M}$ 为 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的一个 von Neumann 代数，如果 $\mathcal{M}$ 有交换投影且中心支撑为

单位元 e，则称 $\mathcal{M}$ 为 I 型 von Neumann 代数。如果单位元 e 是 n 个等价交换投影的和，则称 $\mathcal{M}$ 为 I_n 型 von Neumann 代数。如果 $\mathcal{M}$ 没有非零交换投影，但是包含有限投影且中心支撑为单位元 e，则称 $\mathcal{M}$ 为 II 型 von Neumann 代数。如果单位元 e 是有限的，则称 $\mathcal{M}$ 为 II_1 型 von Neumann 代数。如果单位元 e 是真无限的，则称 $\mathcal{M}$ 为 II_∞ 型 von Neumann 代数。如果 $\mathcal{M}$ 没有非零有限投影，则称 $\mathcal{M}$ 为 III 型 von Neumann 代数。

定义 2.2 [6] 设 $\mathcal{M}$ 为 von Neumann 代数，$\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{M}$ 的中心。若线性映射满足下列条件：

(1) 对任意的 $x, y \in \mathcal{M}$，有 $\tau(xy) = \tau(yx)$，

(2) 对任意的 $a \in \mathcal{C}$，有 $\tau(a) = a$，

(3) 对任意的 $b \in \mathcal{M}$ 且 $b > 0$，有 $\tau(b) > 0$，

则称 τ 是 $\mathcal{M}$ 上的中心值迹(center-valued trace)。如果 $\mathcal{M}$ 上有这样的 τ 存在，那么 $\mathcal{M}$ 就是有限 von Neumann 代数。

定义 2.3 [6] 设 $\mathcal{M}$ 是一个 von Neumann 代数，E 是 $\mathcal{M}$ 中的投影且 $E \neq 0$。如果存在 $\mathcal{M}$ 中的投影 $E_1, \cdots, E_k$ 以及中心 $\mathcal{C}$ 中的某个投影 Q，使得 $E_1 \sim E_2 \sim \cdots \sim E_k \sim E$ 与 $E_1 + E_2 + \cdots + E_k = Q$ 成立，其中 k 为正整数，那么就称 E 是 $\mathcal{M}$ 中的单性(monic)投影。

命题 2.4 [6] 设 $\mathcal{M}$ 是一个 von Neumann 代数，如果 E 是 $\mathcal{M}$ 中的有限投影，那么 E 的每个子投影也是有限投影。在 $\mathcal{M}$ 中的每个极小投影与 0 投影都是有限投影。如果 E 是有限投影且 $E \sim F$，那么 F 也是有限投影。

命题 2.5 [6] 设 $\mathcal{M}$ 是一个 von Neumann 代数，$\{E_a\}$ 与 $\{F_a\}$ 是 $\mathcal{M}$ 中两列正交的投影族，并且对任意的指标 a，有 $E_a \precsim F_a$，那么就有 $\sum E_a \precsim \sum F_a$ 成立。如果对任意的指标 a，有 $E_a \sim F_a$，那么就有 $\sum E_a \sim \sum F_a$ 成立。

定理 2.6 [6] (comparison) 设 $\mathcal{M}$ 是一个 von Neumann 代数，E、F 是 $\mathcal{M}$ 中的投影，那么存在唯一的一对极大正交中心投影 P 与 Q，使得 $QE \sim QF$ 成立，如果 P_0 是 P 的一个非零中心子投影，那么就有 $P_0 E \prec P_0 F$ 成立。如果 R_0 是 $I - P - Q$ 的非零中心子投影，那么就有 $R_0 F \prec R_0 E$ 成立。

3. 定理的证明

为了证明本章的主要定理，引用了如下的相关结果。

引理 3.1 [6] 设 $\mathcal{M}$ 是 I 型 von Neumann 代数且没有无限的中心投影，$\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{M}$ 的极大交换子代数。如果 P_n 是 $\mathcal{M}$ 中的一个中心投影，使得 $\mathcal{M}P_n$ 为 I_n 型 von Neumann 代数。那么就有下面的两个结论：

(1) 在 $\mathcal{A}$ 中可以找到 P_n 的某个非零子投影 P_0，使得 P_0 是 $\mathcal{M}$ 的交换投影。

(2) $\mathcal{A}$ 中存在一个具有中心支撑 I 的交换投影。

引理 3.2 [6] 设 E_1 是 I_n 型 von Neumann 代数中具有中心支撑 I 的交换投影，其中 n 为有限正整数。那么有下面的两个结论：

(1) 在 $\mathcal{M}$ 中存在一个包含了 E_1 的 n 个相互正交的等价投影族，使得它们的和为单位元 I。

(2) $(I - E_1)\mathcal{M}(I - E_1)$ 是 I_{n-1} 型 von Neumann 代数。

引理 3.3 [6] 设 $\mathcal{M}$ 是 I_n 型 von Neumann 代数且 n 为有限的正整数，设 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{M}$ 的极大交换子代数。那么就有下面的三个结论：

(1) 在 $\mathcal{A}$ 中存在 n 个相互正交的等价投影 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 且它们的和为 I，每个投影 E_i 都是 $\mathcal{M}$ 中的交换投影且都有相对于 $\mathcal{M}$ 的中心支撑 I，其中 $1 \le i \le n$。

(2) $\mathcal{A}$ 可以由 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 的中心与(1)中的 n 个交换投影生成。

(3) 如果 $n = pq$ (其中 p, q 为正整数)，那么 $\mathcal{A}$ 包含 p 个正交投影且它们的和为 I，并且这 p 个投影

还在 $\mathcal{M}$ 中等价。

首先，我们研究了 I_n 型 von Neumann 代数中的单性投影。

定理 3.4 设 $\mathcal{M}$ 是作用于 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的 I_n 型 von Neumann 代数，$\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{M}$ 的极大交换子代数，投影 E、F 是 $\mathcal{A}$ 中的两个单性投影，$\{E_1,\cdots,E_n\}$ 与 $\{F_1,\cdots,F_n\}$ 为 $\mathcal{M}$ 中的两列相互正交的投影族，并有 $\sum_{i=1}^{n} E_i = I$，$\sum_{i=1}^{n} F_i = I$，$E \sim E_i$ 与 $F \sim F_i$ 成立，这里 $1 \le i \le n$ 为正整数，那么，就有 $E \sim F$ 成立。

证明 首先，我们使用数学归纳法来证明 $\sum_{i=1}^{n} E_i = I$ 的存在性。

当 $n = 1$ 时，我们知道 $\mathcal{M}$ 是交换的，此时 $\mathcal{M} = \mathcal{A}$，那么有 $E_1 = I$。

现在假设 $n > 1$，当 $\mathcal{M}$ 是 I_k 型且 k 小于 n 时，有 $\sum_{i=1}^{k} E_i = I$ 成立。由于 $\mathcal{M}$ 为 I_k 型 von Neumann 代数，故 $\mathcal{M}$ 没有无限中心投影，那么由引理 3.1 可知，在 $\mathcal{A}$ 中存在一个投影 E_1，使得 E_1 是交换投影，且有 $C_{E_1} = I$，以及 $(I-E_1)\mathcal{M}(I-E_1)$ 是作用于 Hilbert 空间 $(I-E_1)(\mathcal{H})$ 上的 I_{n-1} 型 von Neumann 代数，$\mathcal{A}(I-E_1)$ 是它的极大交换子代数。那么，由归纳假设可知，$I-E_1$ 是 $\mathcal{A}(I-E_1)$ 中的 $n-1$ 个投影 $E_2,\cdots,E_n$ 的和，且每个 E_j 都是 $(I-E_1)\mathcal{M}(I-E_1)$ 中的交换投影，并且它们在 von Neumann 代数 $(I-E_1)\mathcal{M}(I-E_1)$ 中的中心支撑都是 $I-E_1$。

由引理 3.2 可知，$I = C_{E_1} = \cdots = C_{E_n}$。再由引理 3.3 可知，在 $\mathcal{A}$ 中存在 n 个等价正交投影 $\{E_1,\cdots,E_n\}$ 且它们的和为 I，并且每个交换投影 E_i 相对于 $\mathcal{M}$ 的中心支撑都是 I。因此存在一列正交投影 $\{E_1,\cdots,E_n\}$，满足 $\sum_{i=1}^{n} E_i = I$。

接下来，若 $\{E_1,\cdots,E_n\}$ 与 $\{F_1,\cdots,F_n\}$ 为 $\mathcal{M}$ 中的两列相互正交的投影族，并有 $\sum_{i=1}^{n} E_i = I$ 以及 $\sum_{i=1}^{n} F_i = I$ 成立，下面我们证明 $E_i \sim F_i$。

因为 $\mathcal{M}$ 为 I_n 型 von Neumann 代数，且 E, F 为 $\mathcal{M}$ 中的单性投影，那么，由单性投影的性质可知，

$$E_1 \sim E_2 \sim \cdots \sim E_n \sim E, \quad \sum_{i=1}^{n} E_i = I,$$

以及

$$F_1 \sim F_2 \sim \cdots \sim F_n \sim F, \quad \sum_{i=1}^{n} F_i = I.$$

因此，由命题 2。4 可知 $E_1,\cdots,E_n$ 都为有限投影，且 $F_1,\cdots,F_n$ 也都为有限投影。

那么，由 $\sum_{i=1}^{n} E_i = I$ 且 $\sum_{i=1}^{n} F_i = I$ 以及命题 2.5 可知，

$$E_1 + I - E_1 \sim F_1 + I - F_1.$$

下面证明，投影 $E_1 \sim F_1$，若不然，假设有 $E_1 \nsim F_1$，那么由定理 2.6 可知，在 $(E_1 \vee \cdots \vee E_n)\mathcal{M}(E_1 \vee \cdots \vee E_n)$ 中存在一个非零中心投影 P，使得 $PE_1 \prec PF_1$ 或 $PE_1 \succ PF_1$ 成立。

不妨假设 $PE_i \sim G_i < PF_i \left(i \in \{1,2,\cdots,n\}\right)$ 成立，那么两边求和可得

$$\sum_{i=1}^{n} PE_i \sim \sum_{i=1}^{n} G_i < \sum_{i=1}^{n} PF_i,$$

又因为$\sum_{i=1}^{n}E_i = I$与$\sum_{i=1}^{n}F_i = I$，所以我们有

$$P \sim \sum_{i=1}^{n}G_i < P,$$

从而，我们得到了P与P的一个真子投影$\sum_{i=1}^{n}G_i$等价，这就与$(E_1 \vee \cdots \vee E_n)\mathcal{M}(E_1 \vee \cdots \vee E_n)$是有限 von Neumann 代数矛盾。因此，我们就有$E_1 \sim F_1$成立。又因为$E \sim E_1 \sim F_1 \sim F$，所以我们就有$E \sim F$。

证毕。

接下来，我们研究II_1型 von Neumann 代数中的单性投影。

引理 3.5 [6] 设$\mathcal{M}$是作用于 Hilbert 空间$\mathcal{H}$上的II_1型 von Neumann 代数，$\mathcal{A}$是$\mathcal{M}$中的极大交换子代数且E是$\mathcal{A}$中的一个投影。那么有

(1) 在$\mathcal{A}$中存在一个投影的序列$\{E_n\}$使得$E_0 = E$，$C_{E_n} = C_E$，$E_n \le E_{n-1}$与$E_n \precsim E_{n-1} - E_n$，对$n$在$\{1,2,\cdots\}$中，

(2) 假设F是$\mathcal{M}$中的一个投影，使得$C_E C_F \ne 0$，那么在$\mathcal{A}$中存在一个非零投影G使得$G \le E$且$G \precsim F$，

(3) 假设F是$\mathcal{M}$中的一个投影，使得$F \precsim E$，那么$\mathcal{A}$中E的某个子投影E_1等价于F，

(4) 对于每一个正整数n，那么$\mathcal{A}$包含n个等价正交投影且和为I。

结合上面的引理，我们给出下面定理的证明。

定理 3.6 设$\mathcal{M}$是作用于 Hilbert 空间$\mathcal{H}$上的II_1型 von Neumann 代数，$\mathcal{A}$是$\mathcal{M}$中的极大交换子代数，且E、F是$\mathcal{A}$中的单性投影，$\{E_1,\cdots,E_n\}$与$\{F_1,\cdots,F_n\}$为$\mathcal{M}$中的两列相互正交的投影族，并有$\sum_{i=1}^{n}E_i = I$，$\sum_{i=1}^{n}F_i = I$，$E \sim E_i$与$F \sim F_i$成立，这里$1 \le i \le n$为正整数，那么，就有$E \sim F$成立。

证明　由引理 3.5 的(4)可知，存在一列相互正交的投影族$\{E_1,\cdots,E_n\}$满足$\sum_{i=1}^{n}E_i = I$。

因此，我们只需要证明$E_i \sim F_i$。由于$\mathcal{M}$为II_1型 von Neumann 代数，所以I是有限投影。由于$\{E_1,\cdots,E_n\}$是一列相互正交的投影族，且有$E_1 + E_2 + \cdots + E_n = I$，因此，
$E_1 + E_2 + \cdots + E_n = E_1 \vee E_2 \vee \cdots \vee E_n = I$也为有限投影。

由已知$E \sim E_1 \sim E_2 \sim \cdots \sim E_n$，那么由命题 2.4 可知，$E_1,\cdots,E_n$都是有限投影。同理，$F_1,\cdots,F_n$也都是有限投影。

由$\sum_{i=1}^{n}E_i = I$以及$\sum_{i=1}^{n}F_i = I$，以及由命题 2.5 可知，有

$$E_1 + I - E_1 \sim F_1 + I - F_1.$$

下面证明，投影$E_1 \sim F_1$，若不然，假设有$E_1 \nsim F_1$，那么由定理 2.6 可知，在$(E_1 \vee \cdots \vee E_n)\mathcal{M}(E_1 \vee \cdots \vee E_n)$中存在一个非零中心投影$P$，使得$PE_1 \prec PF_1$或$PE_1 \succ PF_1$成立。

不妨假设$PE_i \sim G_i < PF_i \ (i \in \{1,2,\cdots,n\})$成立，那么两边求和可得

$$\sum_{i=1}^{n}PE_i \sim \sum_{i=1}^{n}G_i < \sum_{i=1}^{n}PF_i,$$

又因为$\sum_{i=1}^{n}E_i = I$与$\sum_{i=1}^{n}F_i = I$，所以我们有

$$P \sim \sum_{i=1}^{n} G_i < P,$$

从而，我们得到了 P 与 P 的一个真子投影 $\sum_{i=1}^{n} G_i$ 等价，这就与 $(E_1 \vee \cdots \vee E_n)\mathcal{M}(E_1 \vee \cdots \vee E_n)$ 是有限 von Neumann 代数矛盾。因此，我们就有 $E_1 \sim F_1$ 成立。又因为 $E \sim E_1 \sim F_1 \sim F$，所以我们就有 $E \sim F$。

证毕。

引理 3.7 [6] 如果 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 是有限的，P 是 $\mathcal{M}$ 的中心 $\mathcal{C}$ 中的非零投影，η 是 $\mathcal{M}$ 上的超弱连续中心态，并且 $\varepsilon > 0$，那么在 $\mathcal{M}$ 中存在一个投影 G，使得 $G \le P$，$\eta(G) > 0$，并且

$$\eta(AA^*) \le (1+\varepsilon)\eta(A^*A),$$

对于 $G\mathcal{M}G$ 中的每个 A 都成立。

引理 3.8 [6] 如果 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 是有限的，P 是 $\mathcal{M}$ 的中心 $\mathcal{C}$ 中的非零投影，并且对任意的 $\varepsilon > 0$，存在一个超弱连续正线性映射 $\tau: \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ 和中心 $\mathcal{C}$ 中的一个投影 Q，使得 $0 < Q \le P$，并且有

$$\tau(AA^*) \le (1+\varepsilon)\tau(A^*A), \quad \tau(CA) = C\tau(A), \quad \tau(CQ) = CQ,$$

这里 $A \in \mathcal{M}$，$C \in \mathcal{C}$。

由前面的定理 3.4 以及上述两个引理，我们有下面的结果。

定理 3.9 设 $\mathcal{M}$ 是作用于 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的 I_n 型 von Neumann 代数，$\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{M}$ 的极大交换子代数，投影 E、F 是 $\mathcal{A}$ 中的两个单性投影，$\{E_1, \cdots, E_n\}$ 与 $\{F_1, \cdots, F_n\}$ 为 $\mathcal{M}$ 中的两列相互正交的投影族，并有 $\sum_{i=1}^{n} E_i = I$，$\sum_{i=1}^{n} F_i = I$，$E \sim E_i$ 与 $F \sim F_i$ 成立，这里 $1 \le i \le n$ 为正整数，那么对任意的 $\varepsilon > 0$，都存在一个超弱连续正线性映射 $\tau: \mathcal{M} \to \mathcal{C}$，使得 $\tau(E) \le (1+\varepsilon)\tau(F)$ 成立。

证明 因为 E、F 是 $\mathcal{M}$ 中的单性投影，$\{E_1, \cdots, E_n\}$ 与 $\{F_1, \cdots, F_n\}$ 为 $\mathcal{M}$ 中的两列相互正交的投影族，并有 $E \sim E_i$，$F \sim F_i$，$\sum_{i=1}^{n} E_i = I$ 以及 $\sum_{i=1}^{n} F_i = I$ 成立，那么由定理 3.4 可知，有 $E \sim F$。

我们不妨假设 $WW^* = E$，$W^*W = F$，其中 W 是 $\mathcal{M}$ 中的部分等距算子，由引理 3.7 可知，存在 $\mathcal{M}$ 上的一个超弱连续中心态 η。接着，由引理 3.8 可知，存在 $\mathcal{M}$ 中的一个投影 E，以及 $\mathcal{M}$ 的中心 $\mathcal{C}$ 中的非零投影 N，使得 $E \le N$，$\eta(E) > 0$，并且有

$$\eta(WW^*) \le (1+\varepsilon)\eta(W^*W).$$

因为 E 是 $\mathcal{M}$ 中的单性投影，那么存在 $\mathcal{M}$ 中的一列相互正交的投影 $E_1, \cdots, E_n$ 以及 $\mathcal{C}$ 中的投影 N_0，使得

$$E_1 \sim E_2 \sim \cdots \sim E_n \sim E, \quad E_1 + E_2 + \cdots + E_n = N_0.$$

设 $V_j: E_j \to E$ 是 $\mathcal{M}$ 中的一列部分等距算子，这里 $j = 1, \cdots, n$。

下面我们定义一个超弱连续的正线性映射 $\tau_0: \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ 如下

$$\tau_0(W) = \sum_{j=1}^{n} \eta(V_j W V_j^*),$$

那么有

$$\tau_0(W) = \tau_0(N_0 W), \quad \tau_0(CW) = C\tau_0(W),$$

这里 $W \in \mathcal{M}$，$C \in \mathcal{C}$。

由于 $V_j \mathcal{M} V_k^* \subseteq E\mathcal{M}E$，所以我们有

DOI: 10.12677/aam.2026.156282

$$\tau_0\left(WW^*\right)=\tau_0\left(N_0WW^*\right)=\tau_0\left(WN_0W^*\right)=\sum_{k=1}^{n}\tau_0\left(WE_kW^*\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\eta\left(V_jWV_k^*V_kW^*V_j^*\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\eta\left(\left(V_jWV_k^*\right)\left(V_jWV_k^*\right)^*\right).$$

接下来，由引理 3.7 可知，

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\eta\left(\left(V_jWV_k^*\right)\left(V_jWV_k^*\right)^*\right)\le(1+\varepsilon)\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\eta\left(\left(V_jWV_k^*\right)^*\left(V_jWV_k^*\right)\right)$$
$$=(1+\varepsilon)\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\eta\left(V_kW^*V_j*V_jWV_k^*\right)$$
$$=(1+\varepsilon)\tau_0\left(W^*W\right).$$

因此，我们有

$$\tau_0\left(WW^*\right)\le(1+\varepsilon)\tau_0\left(W^*W\right)。$$

又因为 $\tau_0\left(WW^*\right)\le(1+\varepsilon)\tau_0\left(W^*W\right)$，以及 $WW^*=E$，$W^*W=F$，所以我们有 $\tau_0(E)\le(1+\varepsilon)\tau_0(F)$ 成立。

证毕。

本文首先考虑了在不同类型的 von Neumann 代数中，单性投影的性质。主要研究 I_n 型 von Neumann 代数与 II_1 型 von Neumann 代数中单性投影的性质，得到本文定理 3.4 与定理 3.6 的相应结果。其次，在本文定理 3.4 的基础上，进一步考虑了单性投影在超弱连续正线性映射下的相关性质，得到本文定理 3.9 的结果。最后，衷心感谢文仕林老师与审稿专家对本文章的指导与宝贵建议。

参考文献

[1] Kaftal, V., Ng, P.W. and Zhang, S. (2009) Strong Sums of Projections in Von Neumann Factors. *Journal of Functional Analysis*, **257**, 2497-2529. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2009.05.027

[2] Halpern, H., Kaftal, V., Ng, P.W. and Zhang, S. (2013) Finite Sums of Projections in Von Neumann Algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, **365**, 2409-2445. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-2013-05683-8

[3] Choi, M. and Wu, P.Y. (2014) Sums of Orthogonal Projections. *Journal of Functional Analysis*, **267**, 384-404. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2014.05.003

[4] Goldstein, S. and Paszkiewicz, A. (2020) Linear Combination of Projections in Von Neumann Factors. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **489**, 124135. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124135

[5] Cao, X.Y., Fang, J.S. and Yao, Z.L. (2021) Strong Sums of Projections in Type II Factors. *Journal of Functional Analysis*, **281**, 109088. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2021.109088

[6] Kadison, R.V. and Ringrose, J. (1986) Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Vol. II: Advanced Theory. Academic Press, Inc.