

# 椭圆界面问题数值方法研究综述

邓唐川

长沙理工大学数学与统计学院, 湖南 长沙

收稿日期: 2026年5月13日; 录用日期: 2026年6月7日; 发布日期: 2026年6月16日

## 摘要

椭圆界面问题广泛存在于复合材料力学、多相流、生物流体、多孔介质传输等科学与工程领域, 其核心特征是求解区域被界面分割为多个子区域, 方程系数、解或其法向通量在界面处存在跳跃, 导致解全局正则性较低。本文系统梳理了椭圆界面问题的主流数值求解方法, 将其划分为经典数值方法与无网格机器学习方法两大类。其中, 经典数值方法又可进一步分为适配网格方法与非适配网格方法。针对不同类别的方法, 本文详细阐述了其核心思想、技术特点及代表性研究进展。最后, 对当前领域的研究现状进行总结, 并展望未来的发展趋势。

## 关键词

椭圆界面问题, 无网格机器学习方法, 适配网格方法, 非适配网格方法

# A Review on Numerical Methods for Elliptic Interface Problems

Tangchuan Deng

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: May 13, 2026; accepted: June 7, 2026; published: June 16, 2026

## Abstract

Elliptic interface problems widely exist in scientific and engineering fields such as composite material mechanics, multiphase flow, biological fluid dynamics and porous medium transport. The essential characteristic is that the computational domain is divided into multiple subdomains by interfaces, where jumps occur in equation coefficients, solutions or their normal fluxes, resulting in low global regularity of solutions. We systematically review the mainstream numerical methods for solving elliptic interface problems, which are classified into two categories: traditional numerical methods and meshless machine learning methods. Among them, traditional numerical methods are

further divided into fitted mesh methods and unfitted mesh methods. For each type of method, we elaborate on their core principles, technical characteristics and representative research progress. Finally, the current research status in this field is summarized, and future development trends are prospected.

### Keywords

Elliptic Interface Problems, Meshless Machine Learning Methods, Fitted Mesh Methods, Unfitted Mesh Methods

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

自然界与工程实际中的大量输运、平衡、稳态物理过程，均可通过二阶椭圆型偏微分方程进行刻画，例如稳态热传导、静电场与静磁场势分布、渗流力学平衡、弹性力学稳态响应以及生物组织物质扩散等场景。真实物理系统往往由多种不同属性的介质构成，在不同介质的交界面处，材料系数、源项及边界通量会发生剧烈突变，这类带有内部分界面与跳跃传输条件的椭圆方程边值问题，被统称为椭圆界面问题。椭圆界面问题是计算数学、应用数学与工程科学交叉领域的核心研究对象，在流体力学[1] [2]、材料科学[3] [4]、电磁学[5]、仿生学[6] [7]等领域被广泛应用。

从数学形式上，标准二阶椭圆界面问题可描述为：设区域  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ) 被光滑或分段光滑界面  $\Gamma$  划分为若干互不重叠的子区域  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_L$ ，满足  $\Omega = \bigcup_{\ell=1}^L \Omega_\ell \cup \Gamma \cup \partial\Omega$ ，求解标量函数  $u(x)$  满足：

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\beta(x)\nabla u(x)) + \lambda(x)u(x) = f(x), & x \in \Omega \setminus \Gamma, \\ \llbracket u \rrbracket = h_1(x), & x \in \Gamma, \\ \llbracket \beta(x)\partial_n u \rrbracket = h_2(x), & x \in \Gamma, \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中  $v = v^+ - v^-$  表示物理量  $v$  跨越界面的跳跃， $\beta(x)$  为分段间断的扩散系数， $\partial_n$  为界面单位法向导数， $\lambda(x) \geq 0$  为反应系数， $f, g, h_1, h_2$  为已知源项与边界或界面数据。矢量形式的椭圆界面问题(如弹性力学、Stokes 流)还需满足位移或速度连续、应力跳跃等条件。

与传统光滑区域椭圆方程相比，椭圆界面问题最本质的特征是：求解区域被一条或多条闭合、分段光滑的内界面分割为若干子区域，界面两侧的扩散或传导系数存在明显间断，界面问题的解可能是非光滑甚至不连续的，解的全局正则性低，再加上界面的复杂几何形状，部分问题还会伴随界面源、界面应力、接触热阻等附加约束。这种特殊的数学特性，直接导致解在界面附近失去高阶光滑性，出现弱奇性、层状陡峭变化及梯度集中等现象，使得传统适配均匀网格上的标准差分、有限元格式出现精度下降、数值震荡、收敛阶退化甚至算法失稳等问题。

近年来，随着复合材料结构、微纳机电系统、生物医学仿真、油气资源开发、核聚变装置、多物理场耦合设计等工程需求的不断升级，界面几何日趋复杂、介质参数对比急剧升高，计算域维度也从二维逐步扩展至三维甚至高参数化空间。在此背景下，椭圆界面问题的高精度、高效率、高鲁棒性求解，已成为科学计算领域无法回避的基础课题。对该问题的研究，不仅能够完善间断介质偏微分方程的函数空间

理论、数值逼近理论与误差分析体系，更能直接支撑多介质工程结构的仿真设计、性能优化与可靠性评估，具有重要的理论价值与工程应用价值。

本文的主要框架如下：在第二节综合阐述经典数值方法；在第三节重点阐述无网格机器方法；在第四节给出总结与展望。

## 2. 经典数值方法

对于椭圆界面问题，一众学者发展了各种数值方法对其进行求解，这些经典数值方法大致可以分为两类：适配网格方法和非适配网格方法。

### 2.1. 适配网格类数值方法

适配网格方法要求计算网格的单元边界与界面  $\Gamma$  严格重合，从而在每个子区域内使用标准离散格式，界面跳跃条件可自然满足。该方法理论完善、精度可控，但网格生成成本随界面复杂度急剧上升[8]。

#### 2.1.1. 有限元方法

有限元法(Finite Element Method, FEM)是求解椭圆界面问题最经典的框架。在适配网格下，分片多项式基函数可实现最优阶收敛。Bramble 等人[9]提出一种针对光滑区域椭圆界面问题 FEM，通过多边形近似区域实现了最优收敛阶；Babuska 等人[10]针对间断系数椭圆方程的非贴合界面问题，提出了一种改进的 FEM，旨在克服标准方法因界面不贴合导致的精度下降问题；Zhang [11]针对三维弹性界面问题提出了高阶界面惩罚有限元方法，并证明其最优误差估计；Chu 等人[12]提出的多尺度有限元方法(MSFEM)仅采用粗拟均匀网格，且无须对界面进行解析，即可高精度求解含高对比度系数的椭圆界面问题。

#### 2.1.2. 有限体积法与多尺度方法

有限体积法(Finite Volume Method, FVM)基于物理守恒律离散，适配网格下可严格保证通量守恒，广泛应用于渗流与流体问题。针对高对比系数界面问题，Jenny 等人[13]提出多尺度有限元方法，有效捕捉系数突变引起的解奇异性。

#### 2.1.3. 弱 Galerkin 方法

弱 Galerkin 方法是传统 Galerkin 方法的扩展，通过引入弱导数实现对 PDE 的高效数值求解。Mu 等人[14]提出的弱 Galerkin 方法变分形式更简洁、未知量更少，且支持一般多面体网格剖分，适配复杂界面情况，易于推广至高阶格式，并在低正则性问题中保持良好精度。

#### 2.1.4. 匹配界面和边界方法

匹配界面和边界方法(Matched Interface and Boundary, MIB)通过引入虚拟点将界面条件处理与方程离散完全解耦，利用最低阶跳跃条件，通过迭代构造高阶格式，突破尖点、三叉点等几何奇异限制。Xia 等人[15]提出了基于 MIB 方法的高阶格式，首次针对含多材料界面几何奇点的二维椭圆方程实现了二阶精度求解。

#### 2.1.5. 适配网格方法总结

适配网格方法以其成熟的理论体系、严格可控的精度与收敛阶以及高稳定性，成为求解椭圆界面问题的经典选择。然而，这类方法在实际应用中也存在显著局限：对于复杂或动态演化界面，网格生成与维护难度大、计算成本高，且难以有效处理界面拓扑变化问题。

## 2.2. 非适配网格类数值方法

非适配网格方法采用固定笛卡尔网格或均匀网格，允许界面任意穿越单元，通过格式修正、虚拟点、

形函数重构等策略嵌入界面条件, 大幅提升几何适应性, 是当前静态界面问题的主流方案[16]。

### 2.2.1. 扩展有限元方法

扩展有限元法(XFEM)是在传统有限元方法上进行改进的数值方法, 通过扩充不连续性的形函数代表计算域内的间断。Xiao 等人[17]基于间断 Galerkin 和 XFEM 提出的 DG-XFEM 方法, 无须引入足够大的参数便可保证最优收敛, 并增加了针对离散线性系统的最优多重网格求解器, 同时进行了收敛性分析。

### 2.2.2. 浸入边界法

Peskin [18]提出浸没边界法(IBM), 采用欧拉笛卡尔网格和拉格朗日界面点, 通过  $\delta$  函数分布力源传递界面效应, 实现固定网格下的界面求解。

### 2.2.3. 浸入界面法

LeVeque 与 Li [19]提出浸入界面法(IIM), 是椭圆界面问题里程碑式工作。IIM 在界面邻近点修正有限差分系数, 将跳跃条件直接代入离散格式, 严格满足界面通量平衡, 实现二阶精度, 可处理间断系数与奇异源项。之后 Adams 与 Li [20]将 IIM 与多重网格结合, 显著提升大规模问题求解效率。

### 2.2.4. 浸入有限元法

浸入有限元法(IFEM)重构界面穿越单元的形函数, 使其满足界面跳跃条件, 从而在非适配网格下保持最优收敛阶。Chen 等人[21]提出的双线性部分罚浸没有限元方法(IFEM), 通过在被多个界面或三交点切割的单元上构造特殊基函数实现最优收敛并提升稳定性。

### 2.2.5. 鬼流体法

Fedkiw 等[22]提出鬼流体法(GFM), 在笛卡尔网格上定义“鬼单元”, 通过延拓界面另一侧的场来施加跳跃条件, 实现界面间断的非振荡求解。后续 XGFM [23]进一步拓展了对复杂界面的处理能力。

### 2.2.6. 间断有限元方法

间断有限元方法(Discontinuous Galerkin, DG) [24]通过引入数值通量与界面罚项弱嵌入界面跳跃条件, 允许解在单元边界不连续, 无需网格与界面贴合即可保持高阶精度与局部守恒性。

### 2.2.7. 其他非适配网格方法

Taleei 等人[25]结合直接无网格局部 Petrov-Galerkin 方法与可见性准则的高效无网格方法提出基于弱形式的无网格方法, 通过改进的移动最小二乘近似和界面处理技术大幅降低了计算成本; Dong 等[26]提出无核边界积分法(KFBI), 在 Stokes 与弹性界面问题中均展现出较高的精度与效率。

除此之外, 自适应网格加密(AMR)也常用于椭圆界面问题的求解。AMR 基于后验误差估计, 可在界面附近、解梯度变化剧烈或存在奇异性的区域自动细化网格, 在不显著增加全局自由度的前提下, 大幅提升界面区域的求解精度与分辨率。在实际应用中, AMR 常与浸入界面法[27]、间断有限元方法[28]等非适配网格格式耦合。

### 2.2.8. 非适配网格方法总结

非适配网格方法凭借其良好的几何灵活性, 无需复杂的贴体网格生成, 具有实现简便、计算效率高的显著优势, 为界面问题求解提供了灵活的技术路径。但该类方法仍存在不足, 主要体现在高阶精度格式的构造较为复杂, 且在处理多界面交汇等拓扑奇异点时难度较大, 限制了其在复杂场景下的进一步应用。

## 3. 无网格机器学习方法

无网格方法仅依赖配点, 完全摆脱网格约束, 特别适用于极端复杂、动态演化与高维界面问题。

### 3.1. 物理信息神经网络

物理信息神经网络(Physics-Informed Neural Networks, PINNs)利用自动微分计算方程残差,在损失函数中嵌入方程、边界与界面条件,实现无网格配点求解。受深度 Ritz 方法的启发,Wang 等人[29]设计了一种基于深度学习的无网格方法,专门用于椭圆界面问题的数值求解;Hu 等人[30]提出了不连续捕获浅层神经网络(DCSNN),用于逼近  $d$  维分段连续函数并求解椭圆界面问题,其核心思路是将  $d$  维分段连续函数扩展至  $d+1$  维空间中的连续函数,从而规避界面间断带来的求解困难;文献[31]提出了深度未拟合 Nitsche 方法,通过将椭圆界面问题转化为包含两个弱耦合成分的能量最小化问题,实现对界面间断特征的有效刻画;文献[32]则将椭圆界面问题转化为最小二乘问题,进而提出一种基于分段深度神经网络的无网格求解方法;文献[33]采用多尺度融合网络架构,通过融合不同尺度的特征信息,提升椭圆界面问题的求解精度;此后,Wu 等人[34]提出了界面神经网络(INN),该方法引入扩展的梯度测深剖面下降(MGD)方法,能够自适应平衡损失函数中各分项的相互作用,有效提升模型的泛化能力与求解精度;文献[35]对 PINN 进行扩展优化,使其能够适配椭圆界面问题的求解需求;Sarma 等人[36]提出了界面 I-PINNs,构造一种特殊的神经网络结构,该网络在界面问题的两个子域内除激活函数外其他参数保持一致,从而保证模型在界面处的求解精度。

### 3.2. 随机特征方法

随机特征方法(RFM)将神经网络优化转化为线性最小二乘问题,稳定性与效率大幅提升。Chi 等[37]将 RFM 用于界面问题;Ying 等人[38]则结合极限学习机与随机神经网络的思想,提出了一种新的保持连续性方法,用于椭圆界面问题的数值求解;Song 等[39]提出间断捕捉随机特征法(DC-RFM),通过增广变量实现单套基函数捕捉间断,可高效处理时变界面、多界面、各向异性问题。

### 3.3. 算子学习方法

当前基于神经网络的界面问题求解方法虽已取得诸多成果,但大多只能对特定的界面问题求解,当求解场景发生变化,如初始条件、边界条件或其他核心参数需要调整时,必须重新设计并训练全新的神经网络模型。针对这一痛点,近年来兴起的算子神经网络为其提供了新的思路,受深度算子网络(Deep Operator Network, DeepONet) [40]影响,Wu 等人[41]将区域分解方法与 DeepONet 相结合,提出了界面算子网络(IONet),专门用于参数椭圆界面问题的求解;Bi 等[42]提出 XI-DeepONet,将水平集函数作为输入,直接学习界面几何、参数到解的算子映射,一次训练可实现多参数、变界面快速推理。

### 3.4. 无网格机器学习方法总结

无网格机器学习方法以其完全摆脱网格依赖、对复杂界面适应性强、高维问题可扩展性好的突出优势,为界面问题的求解提供了新的思路。然而,这类方法仍存在明显局限:物理信息神经网络(PINNs)训练过程易不稳定;随机特征方法(RFM)依赖于基函数的合理设计;算子学习类方法通常需要大量高质量的训练样本,限制了其在工程问题中的广泛应用。

## 4. 典型方法对比

本节对椭圆界面问题的主流数值方法进行系统对比,结果如表 1 所示。三类方法分别代表了“精度优先-平衡折中-灵活性优先”的技术路线,表格清晰呈现了它们在网格依赖、界面处理策略与精度特性上的核心差异,可为不同场景下的方法选择提供直接参考。

**Table 1.** Comparison of mainstream numerical methods for elliptic interface problems**表 1.** 椭圆界面问题主流数值方法对比

方法类别	代表方法	网格依赖	界面处理	典型精度
适配网格	FEM、MSFEM、FVM	界面贴合	自然满足	最优阶
非适配网格	IIM、IFE、GFM	规则网格	格式修正/虚拟点	二阶 - 高阶
无网格机器学习	DC-RFM、I-PINNs、IONet	无网格	增广变量/损失函数	谱类/代数

## 5. 总结与展望

### 5.1. 总结

针对椭圆界面问题的数值求解，目前已形成了三类互补的技术路径：传统适配网格方法以高精度见长，但在处理复杂或动态界面时，几何灵活性受限；非适配网格方法通过在精度、效率与适应性之间的折中，成为应用广泛的主流方案；新兴的无网格机器学习方法彻底摆脱了网格束缚，因其兼具精度、效率与稳定性，为动态和多界面问题提供了更优的解决思路。

### 5.2. 展望

椭圆界面问题的数值方法研究仍面临诸多挑战，结合当前工作的局限与领域前沿发展趋势，未来可从以下几个方面开展进一步探索：1) 发展可稳定处理多材料界面交汇与拓扑变化的高精度数值格式；2) 构建动态界面的时空耦合无网格求解框架；3) 设计针对高对比系数问题的鲁棒预条件与稳定化技术；4) 建立机器学习类界面求解方法的收敛性理论；5) 发展面向高维参数化问题的可扩展算子学习与无网格方法。

## 参考文献

- [1] Sussman, M. and Fatemi, E. (1999) An Efficient, Interface-Preserving Level Set Redistancing Algorithm and Its Application to Interfacial Incompressible Fluid Flow. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **20**, 1165-1191. <https://doi.org/10.1137/s1064827596298245>
- [2] Fadlun, E.A., Verzicco, R., Orlandi, P. and Mohd-Yusof, J. (2000) Combined Immersed-Boundary Finite-Difference Methods for Three-Dimensional Complex Flow Simulations. *Journal of Computational Physics*, **161**, 35-60. <https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6484>
- [3] Liu, Y., Sussman, M., Lian, Y. and Yousuff Hussaini, M. (2020) A Moment-Of-Fluid Method for Diffusion Equations on Irregular Domains in Multi-Material Systems. *Journal of Computational Physics*, **402**, Article ID: 109017. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.109017>
- [4] Wang, L., Zheng, H., Lu, X. and Shi, L. (2019) A Petrov-Galerkin Finite Element Interface Method for Interface Problems with Bloch-Periodic Boundary Conditions and Its Application in Phononic Crystals. *Journal of Computational Physics*, **393**, 117-138. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.04.051>
- [5] Hesthaven, J.S. (2003) High-Order Accurate Methods in Time-Domain Computational Electromagnetics: A Review. *Advances in Imaging and Electron Physics*, **127**, 59-123. [https://doi.org/10.1016/s1076-5670\(03\)80097-6](https://doi.org/10.1016/s1076-5670(03)80097-6)
- [6] Lu, B.Z., Zhou, Y.C., Holst, M.J. and McCammon, J.A. (2008) Recent Progress in Numerical Methods for the Poisson-Boltzmann Equation in Biophysical Applications. *Communications in Computational Physics*, **3**, 973-1009. <https://doi.org/10.4208/cicp.2008.v3.p973>
- [7] Ji, N., Liu, T., Xu, J., Shen, L. and Lu, B. (2018) A Finite Element Solution of Lateral Periodic Poisson-Boltzmann Model for Membrane Channel Proteins. *International Journal of Molecular Sciences*, **19**, Article 695. <https://doi.org/10.3390/ijms19030695>
- [8] Gerstenberger, A. and Wall, W.A. (2008) An Extended Finite Element Method/Lagrange Multiplier Based Approach for Fluid-Structure Interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **197**, 1699-1714. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2007.07.002>
- [9] Bramble, J.H. and King, J.T. (1996) A Finite Element Method for Interface Problems in Domains with Smooth

- Boundaries and Interfaces. *Advances in Computational Mathematics*, **6**, 109-138. <https://doi.org/10.1007/bf02127700>
- [10] Babuška, I. (1970) The Finite Element Method for Elliptic Equations with Discontinuous Coefficients. *Computing*, **5**, 207-213. <https://doi.org/10.1007/bf02248021>
- [11] Zhang, X. (2022) High Order Interface-Penalty Finite Element Methods for Elasticity Interface Problems in 3D. *Computers & Mathematics with Applications*, **114**, 161-170. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2022.03.044>
- [12] Chu, C.C., Graham, I.G. and Hou, T.Y. (2010) A New Multiscale Finite Element Method for High-Contrast Elliptic Interface Problems. *Mathematics of Computation*, **79**, 1915-1955. <https://doi.org/10.1090/s0025-5718-2010-02372-5>
- [13] Jenny, P., Lee, S.H. and Tchelepi, H.A. (2003) Multi-Scale Finite-Volume Method for Elliptic Problems in Subsurface Flow Simulation. *Journal of Computational Physics*, **187**, 47-67. [https://doi.org/10.1016/s0021-9991\(03\)00075-5](https://doi.org/10.1016/s0021-9991(03)00075-5)
- [14] Mu, L., Wang, J., Ye, X. and Zhao, S. (2016) A New Weak Galerkin Finite Element Method for Elliptic Interface Problems. *Journal of Computational Physics*, **325**, 157-173. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.08.024>
- [15] Xia, K., Zhan, M. and Wei, G. (2011) MIB Method for Elliptic Equations with Multi-Material Interfaces. *Journal of Computational Physics*, **230**, 4588-4615. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2011.02.037>
- [16] Hou, S. and Liu, X. (2005) A Numerical Method for Solving Variable Coefficient Elliptic Equation with Interfaces. *Journal of Computational Physics*, **202**, 411-445. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2004.07.016>
- [17] Xiao, Y., Xu, J. and Wang, F. (2020) High-Order Extended Finite Element Methods for Solving Interface Problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **364**, 112964. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.112964>
- [18] Peskin, C.S. (2002) The Immersed Boundary Method. *Acta Numerica*, **11**, 479-517. <https://doi.org/10.1017/s0962492902000077>
- [19] LeVeque, R.J. and Li, Z. (1994) The Immersed Interface Method for Elliptic Equations with Discontinuous Coefficients and Singular Sources. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **31**, 1019-1044. <https://doi.org/10.1137/0731054>
- [20] Adams, L. and Li, Z. (2002) The Immersed Interface/Multigrid Methods for Interface Problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **24**, 463-479. <https://doi.org/10.1137/s1064827501389849>
- [21] Chen, Y., Hou, S. and Zhang, X. (2020) A Bilinear Partially Penalized Immersed Finite Element Method for Elliptic Interface Problems with Multi-Domain and Triple-Junction Points. *Results in Applied Mathematics*, **8**, Article ID: 100100. <https://doi.org/10.1016/j.rinam.2020.100100>
- [22] Fedkiw, R.P., Aslam, T., Merriman, B. and Osher, S. (1999) A Non-Oscillatory Eulerian Approach to Interfaces in Multimaterial Flows (the Ghost Fluid Method). *Journal of Computational Physics*, **152**, 457-492. <https://doi.org/10.1006/jcph.1999.6236>
- [23] Egan, R. and Gibou, F. (2020) xGFM: Recovering Convergence of Fluxes in the Ghost Fluid Method. *Journal of Computational Physics*, **409**, Article ID: 109351. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.109351>
- [24] Wang, Y., Gao, F. and Cui, J. (2022) A Conforming Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Elliptic Interface Problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **412**, Article ID: 114304. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.114304>
- [25] Taleei, A. and Dehghan, M. (2014) Direct Meshless Local Petrov-Galerkin Method for Elliptic Interface Problems with Applications in Electrostatic and Elastostatic. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **278**, 479-498. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.05.016>
- [26] Dong, H., Li, S., Ying, W. and Zhao, Z. (2023) Kernel-Free Boundary Integral Method for Two-Phase Stokes Equations with Discontinuous Viscosity on Staggered Grids. *Journal of Computational Physics*, **492**, Article ID: 112379. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2023.112379>
- [27] Wu, C.T., Li, Z.L. and Lai, M.C. (2011) Adaptive Mesh Refinement for Elliptic Interface Problems Using the Non-Conforming Immersed Finite Element Method. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, **8**, 466-483.
- [28] Cangiani, A., Georgoulis, E.H. and Sabawi, Y.A. (2020) Convergence of an Adaptive Discontinuous Galerkin Method for Elliptic Interface Problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **367**, Article ID: 112397. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112397>
- [29] Wang, Z. and Zhang, Z. (2020) A Mesh-Free Method for Interface Problems Using the Deep Learning Approach. *Journal of Computational Physics*, **400**, Article ID: 108963. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.108963>
- [30] Hu, W., Lin, T. and Lai, M. (2022) A Discontinuity Capturing Shallow Neural Network for Elliptic Interface Problems. *Journal of Computational Physics*, **469**, Article ID: 111576. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.111576>
- [31] Guo, H. and Yang, X. (2022) Deep Unfitted Nitsche Method for Elliptic Interface Problems. *Communications in Computational Physics*, **31**, 1162-1179. <https://doi.org/10.4208/cicp.oa-2021-0201>
- [32] He, C., Hu, X. and Mu, L. (2022) A Mesh-Free Method Using Piecewise Deep Neural Network for Elliptic Interface Problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **412**, Article ID: 114358.

- 
- <https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.114358>
- [33] Ying, J., Liu, J., Chen, J., Cao, S., Hou, M. and Chen, Y. (2023) Multi-Scale Fusion Network: A New Deep Learning Structure for Elliptic Interface Problems. *Applied Mathematical Modelling*, **114**, 252-269. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2022.10.006>
- [34] Wu, S. and Lu, B. (2022) INN: Interfaced Neural Networks as an Accessible Meshless Approach for Solving Interface PDE Problems. *Journal of Computational Physics*, **470**, Article ID: 111588. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.111588>
- [35] Jiang, X., Wang, Z., Bao, W. and Xu, Y. (2024) Generalization of Pinns for Elliptic Interface Problems. *Applied Mathematics Letters*, **157**, Article ID: 109175. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2024.109175>
- [36] Sarma, A.K., Roy, S., Annavarapu, C., Roy, P. and Jagannathan, S. (2024) Interface Pinns (i-Pinns): A Physics-Informed Neural Networks Framework for Interface Problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **429**, Article ID: 117135. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2024.117135>
- [37] Chi, X., Chen, J. and Yang, Z. (2024) The Random Feature Method for Solving Interface Problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **420**, Article ID: 116719. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2023.116719>
- [38] Ying, J., Hu, J., Shi, Z. and Li, J. (2024) An Accurate and Efficient Continuity-Preserved Method Based on Randomized Neural Networks for Elliptic Interface Problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **46**, C633-C657. <https://doi.org/10.1137/24m1632309>
- [39] Song, W., Chi, X., Yang, Z., Cheng, W. and Chen, J. (2026) Discontinuity-Capturing Random Feature Method for Interface Problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **453**, Article ID: 118841. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2026.118841>
- [40] Lu, L., Jin, P., Pang, G., Zhang, Z. and Karniadakis, G.E. (2021) Learning Nonlinear Operators via DeepONet Based on the Universal Approximation Theorem of Operators. *Nature Machine Intelligence*, **3**, 218-229. <https://doi.org/10.1038/s42256-021-00302-5>
- [41] Wu, S., Zhu, A., Tang, Y. and Lu, B. (2024) Solving Parametric Elliptic Interface Problems via Interfaced Operator Network. *Journal of Computational Physics*, **514**, Article ID: 113217. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2024.113217>
- [42] Bi, R., Chen, J. and Deng, W. (2025) XI-DeepONet: An Operator Learning Method for Elliptic Interface Problems. *Journal of Computational Physics*, **538**, Article ID: 114164. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2025.114164>