

基于比例边界S网四边形样条单元的热传导与对流扩散问题数值求解

孟 杨, 张思盈, 张 莹*

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2026年5月18日; 录用日期: 2026年6月11日; 发布日期: 2026年6月23日

摘 要

比例边界有限元方法是一类基于比例边界坐标的数值方法, 在多边形单元构造和复杂区域离散中具有一定优势。本文将基于比例边界坐标的四边形样条单元QS-r2d2用于热传导方程和对流扩散方程的数值求解。在空间离散上, 采用比例边界坐标, 并在三角片上构造径向和环向均为二次的退化张量积Bernstein基函数; 在时间离散上, 采用 θ 差分格式, 建立相应的全离散Galerkin有限元格式。首先, 给出了热传导方程和对流扩散方程的半离散与全离散形式; 其次, 写出了离散系统的矩阵表达, 并对热传导问题的全离散格式进行了误差分析; 最后, 通过数值算例考察了该方法在不同网格尺度下的误差和收敛表现。结果表明, 基于比例边界坐标的QS-r2d2单元能够较好地用于热传导问题和对流扩散方程的数值求解, 所得数值结果具有较好的收敛性。与同阶Lagrange有限元方法相比, 该方法在部分测试算例中表现出更高的计算精度。上述结果说明, 比例边界S网样条有限元方法可作为求解这类方程的一种有效空间离散方式。

关键词

S网方法, 四边形样条单元, θ 差分格式, 热传导方程, 对流扩散方程

Numerical Solution of Heat Conduction and Convection-Diffusion Problems Based on Scaled Boundary S-Mesh Quadrilateral Spline Elements

Yang Meng, Siying Zhang, Ying Zhang*

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

*通讯作者。

文章引用: 孟杨, 张思盈, 张莹. 基于比例边界S网四边形样条单元的热传导与对流扩散问题数值求解[J]. 应用数学进展, 2026, 15(6): 295-310. DOI: 10.12677/aam.2026.156288

Abstract

The scaled boundary finite element method is a numerical method based on scaled boundary coordinates and has advantages in the construction of polygonal elements and the discretization of complex computational domains. In this paper, the quadrilateral spline element QS-r2d2 based on scaled boundary coordinates is applied to the numerical solution of heat conduction equations and convection-diffusion equations. For the spatial discretization, scaled boundary coordinates are employed, and degenerated tensor-product Bernstein basis functions of degree two in both the radial and circumferential directions are constructed on each triangular subregion. For the temporal discretization, a θ -difference scheme is adopted, and the corresponding fully discrete Galerkin finite element formulation is established. First, the semi-discrete and fully discrete formulations for the heat conduction equation and the convection-diffusion equation are derived. Then, the matrix form of the discrete system is presented, and an error analysis is carried out for the fully discrete scheme of the heat conduction problem. Finally, several numerical examples are provided to investigate the error behaviour and convergence performance of the proposed method under different mesh sizes. The numerical results show that the QS-r2d2 element based on scaled boundary coordinates can be effectively applied to the numerical solution of heat conduction and convection-diffusion problems, and that the obtained solutions exhibit good convergence properties. Compared with the Lagrange finite element method of the same order, the proposed method achieves higher computational accuracy in some test cases. These results indicate that the scaled-boundary S-net spline finite element method provides an effective spatial discretization approach for this class of time-dependent partial differential equations.

Keywords

S-Mesh Method, Quadrilateral Spline Element, θ -Difference Scheme, Heat Conduction Equation, Convection-Diffusion Equation

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

抛物型偏微分方程是一类重要的演化方程，热传导、扩散输运、污染物迁移以及对流扩散等问题都属于抛物型方程[1]-[3]。热传导方程是最典型的抛物型方程之一，而对流扩散方程则进一步反映了扩散、输运与反应等机制的耦合特征，在工程计算中具有更为直接的应用背景。

有限元方法是求解抛物型偏微分方程最常用的方法之一。Dougl 和 Dupont 较早研究了连续时间与离散时间 Galerkin 方法在抛物型方程中的误差估计问题[4]；Thomé 则对抛物型问题的 Galerkin 有限元理论、半离散格式和全离散格式进行了系统总结[5]。然而，传统有限元方法求解抛物型方程在实际应用中也存在一些不足。对于热传导方程、对流扩散方程等抛物型问题，解随时间演化，空间误差和时间误差会共同影响最终结果。传统 Lagrange 单元虽然构造简单，但在相同网格尺度下往往需要更细的网格才能获得较高精度，计算自由度和计算成本随之增加。

比例边界有限元方法(Scaled Boundary Finite Element Method, 简称 SBFEM)由 Song 和 Wolf 提出，

其基本思想是在区域内部选取合适的比例中心，只对区域边界进行离散，再借助比例边界坐标将边界上的近似结果延拓到单元内部[6]-[8]。与传统有限元相比，这种处理方式在多边形单元构造、边界离散以及某些特殊区域计算方面具有明显优势，网格剖分也十分的灵活。已有研究表明，SBFEM 已从最初的结构动力学问题逐步扩展到裂纹尖端奇异场、热传导问题以及更一般的多物理场计算之中[6] [7] [9] [10]。

然而，在有限元方法中基函数的选取对计算精度有很大的影响。传统的 Lagrange 基函数通常只有 C^0 连续，尤其是在求解较为复杂的问题中可能会影响整体表现。其中 Bernstein 基函数在几何表示与数值逼近中都表现出较好的特性。Bhatti 和 Bracken 曾将 Bernstein 多项式用于微分方程的数值求解，取得了较好的效果；Peng 等则将 Bernstein-Bézier 有限元用于焊接热传导分析，说明这类基函数在抛物型问题中具有一定应用潜力[8] [11]。针对这一问题，刘震一等将面积坐标下的 B 网思想推广到比例边界坐标中，提出了基于比例边界坐标的 S 网样条有限元方法。该方法在比例边界坐标的径向和环向引入 Bernstein 基函数，通过 S 网系数表示比例边界坐标下的分片函数，并将比例中心处和相邻三角片之间的连续性条件转化为关于 S 网系数的线性约束，从而为构造具有一定连续性和完备性的样条单元提供了新的思路[12]。

除空间离散外，时间离散也是抛物方程数值求解中的关键环节。针对热传导方程和对流扩散方程，研究者已经提出了标准 Galerkin、间断 Galerkin、Petrov-Galerkin 以及时空有限元等多种数值格式，并对其稳定性和误差估计进行了较为系统的研究[13]。在时间离散方面，向前欧拉、向后欧拉以及 Crank-Nicolson 格式是最常见的方法，而 θ 差分格式则可看作对这些格式的统一表达，当 $\theta = 0$ 时退化为向前欧拉格式；当 $\theta = 1$ 时退化为向后欧拉格式；当 $\theta = 0.5$ 时则对应 Crank-Nicolson 格式[14]。由于不同取值下格式在稳定性和精度方面各有特点， θ 格式在实际计算中具有较强的可调节性。

基于上述背景，本文围绕热传导方程和对流扩散方程的数值求解，研究基于比例边界 S 网四边形样条单元的全离散有限元方法。本文首先在比例边界坐标框架下引入 QS-r2d2 四边形样条单元，构造相应的空间离散格式；其次，采用 θ 差分格式对时间变量离散，建立对应的全离散 Galerkin 方法；最后，通过数值算例考察该方法在误差、收敛性和适用性方面的表现，并与同阶 Lagrange 有限元进行比较。

2. 比例边界 S 网四边形样条单元

2.1. 比例边界坐标

比例边界坐标是 SBFEM 的一个关键概念，是一种基于缩放思想构造的局部坐标系。比例边界坐标中 ξ 是径向坐标，表示由比例中心指向边界点方向上的径向缩放位置； η 是环向坐标，表示点在对应边界上的参数位置。由于 SBFEM 不像传统有限元在单元内部进行插值，而是主要在单元边界上进行插值，再利用控制方程本身将边界信息延拓到单元内部。如图 1 所示，区域 Ω 上选择一个中心点 $O = (x_0, y_0)$ 作为比例中心，若比例中心 O 与单元边界顶点的连线都位于单元内部，则我们称区域 Ω 为一个 S 单元。S 单元中的任意一点 (x, y) 可以用比例边界坐标 (ξ, η) 表示出来，其中 $\xi \in [0, 1]$ ， $\eta \in [-1, 1]$ ，

$$\begin{cases} x = x_0 + \xi(x(\eta) - x_0) = x_0 + \xi(N(\eta)x_b - x_0), \\ y = y_0 + \xi(y(\eta) - y_0) = y_0 + \xi(N(\eta)y_b - y_0), \end{cases} \quad (1)$$

其中 $N(\eta) = [N_1(\eta), N_2(\eta), \dots, N_p(\eta)]$ 是 p 次的多项式插值形函数， $x_b = [x_1, x_2, \dots, x_p]^T$ ，

$y_b = [y_1, y_2, \dots, y_p]^T$ 是边界节点的笛卡尔坐标向量。对于一个 S 单元中的三角形片，我们有

$$\begin{cases} x = x_0 + \xi(\bar{x} + \eta\Delta x), \\ y = y_0 + \xi(\bar{y} + \eta\Delta y), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\bar{x} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 2x_0)$, $\bar{y} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - 2y_0)$, $\Delta x = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$, $\Delta y = \frac{1}{2}(y_2 - y_1)$ 。

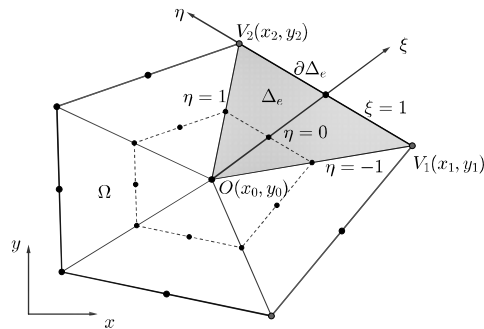


Figure 1. Scaled boundary coordinates in a triangle
图 1. 三角形中比例边界坐标

笛卡尔坐标下的偏导数可以用比例边界坐标表示出来

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = J_b^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \frac{1}{|J_b|} \begin{pmatrix} \frac{\partial y(\eta)}{\partial \eta} & -(y(\eta) - y_0) \\ -\frac{\partial x(\eta)}{\partial \eta} & x(\eta) - x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

其中 Jacobi 变换矩阵为 $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix} J_b$, $J_b = \begin{pmatrix} x(\eta) - x_0 & y(\eta) - y_0 \\ \frac{\partial x(\eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial y(\eta)}{\partial \eta} \end{pmatrix}$ 。

2.2. 比例边界坐标表示的三角形上的张量积型 Bernstein 基函数

在 S 单元中的一个三角形片上, 对径向和环向分别进行 m 和 n 等分, 可以得到 $(n+1)m+1$ 个交点, 这些交点被称作 S 网域点, 并每个点表示为 $v_{i,j} = \left(\frac{i}{m}, -1+2\frac{j}{n}\right)$, $i=0,1,\dots,m; j=0,1,\dots,n$ 。特别地, $v_{0,j} \equiv v_0, j=0,1,\dots,n$ 是比例中心。例如, 在图 2 中分别对环向和径向进行 2 等分得到 7 个 S 网域点。

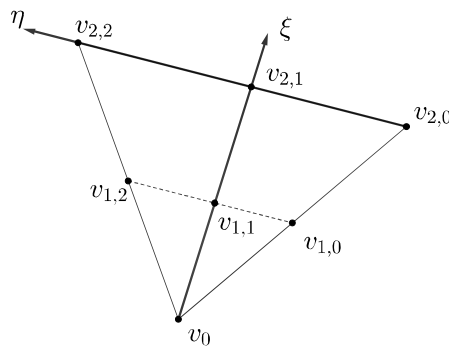


Figure 2. The S-net domain points of the Bernstein bases of order 2×2 in a triangle
图 2. 在一个三角片中, 次数为 2×2 的张量积型 Bernstein 基函数的 S 网域点

关于变量 ξ 的 m 次 Bernstein 基函数和关于变量 η 的 n 次 Bernstein 基函数分别表示为

$$\begin{cases} N_i^m(\xi) = \binom{m}{i} \xi^i (1-\xi)^{m-i}, & i = 0, 1, \dots, m, \xi \in [0, 1], \\ \bar{N}_j^n(\eta) = \binom{n}{j} \left(\frac{1+\eta}{2}\right)^j \left(\frac{1-\eta}{2}\right)^{n-j}, & j = 0, 1, \dots, n, \eta \in [-1, 1], \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\binom{m}{i} = \frac{m!}{i!(m-i)!}$ 和 $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ 是组合数。在三角形片上, 将径向与环向 Bernstein 基函数作局部乘积, 定义 $(n+1)m+1$ 个退化的 $m \times n$ 次张量积型 Bernstein 基函数, 具体定义如下

$$\begin{cases} B_{i,j}^{m,n}(\xi, \eta) = N_i^m(\xi) \bar{N}_j^n(\eta), \\ B_0^{m,n}(\xi, \eta) = N_0^m(\xi) = (1-\xi)^m \quad i = 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n. \end{cases} \quad (5)$$

所谓的退化是指比例中心处只对应一个基函数。例如, 对于次数为 2×2 的张量积型 Bernstein 基函数, 则共有 7 个基函数, 它们分别对应着 7 个 S 网域点分别为 $\{v_0, v_{1,0}, v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,0}, v_{2,1}, v_{2,2}\}$, 即,

$$\left\{ (1-\xi)^2, 2\xi(1-\xi)\left(\frac{1-\eta}{2}\right), \xi(1-\xi)\frac{1-\eta^2}{2}, 2\xi(1-\xi)\left(\frac{1+\eta}{2}\right), \xi^2\left(\frac{1-\eta}{2}\right)^2, \xi^2\frac{1-\eta^2}{4}, \xi^2\left(\frac{1+\eta}{2}\right)^2 \right\}. \quad (6)$$

这类退化的张量积型 Bernstein 基函数在一个三角形片中的基底性质为: 在笛卡尔坐标系下的 l 次多项式空间 $\mathbb{P}_l(x, y)$ 可以由退化的张量积型 Bernstein 基函数线性张成,

$$\mathbb{P}_l(x, y) \subseteq \text{span}\{B_0^{m,n}(\xi), B_{i,j}^{m,n}(\xi, \eta), 1 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}, \quad (7)$$

其中 $l = \min\{m, n\}$ 。记 $S_{m,n}(\Delta_e) = \text{span}\{B_0^{m,n}(\xi), B_{i,j}^{m,n}(\xi, \eta), i = 1, 2, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n\}$ 为退化的张量积型 Bernstein 基张成的函数空间, 并且任意的一个函数 $p \in S_{m,n}(\Delta_e)$ 都可以由相应的 S 网系数向量来表示, 这种表示方法称为函数的 S 网形式。

2.3. QS-r2d2 四边形样条单元

QS-r2d2 单元[12]表示在比例边界坐标的径向和环向方向均采用二次 Bernstein 基函数进行插值的四边形样条单元。记四边形单元为 Q_T , 连接四边形的两条对角线作为比例中心。单元 Q_T 上的 C^1 连续的二元分片函数空间定义为 $S_{m,n}^1(Q_T) \triangleq \{p \in C^1(Q_T) : p|_{\Delta_e} \in S_{m,n}^1(\Delta_e), e = 1, 2, 3, 4\}$, 该空间表示在四边形单元内部具有一定连续性的分片样条函数空间。

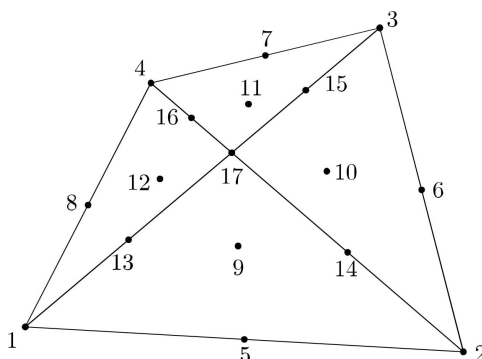


Figure 3. The S-net domain points of Bernstein bases of order 2×2
图 3. 2×2 次 Bernstein 基函数对应的 S 网域点

对于 QS-r2d2 单元, 即 $S_{2,2}^1(Q_T)$ 空间, 四边形单元内部共有 17 个 S 网域点, 如图 3 所示。根据文献 [12] 中三角片比例中心处 C^1 连续条件和单元内部三角片之间的 C^1 连续条件得到相关线性方程组中的 8 个解向量, 记为 $\varphi_i(x, y), i=1, 2, \dots, 8$, 进而得到四个三角片上的 S 网表示形式。因此, 任意一个函数 $p(x, y) \in S_{2,2}^1(Q_T)$ 可以表示为

$$p(x, y) = \sum_{i=1}^8 s_i \varphi_i(x, y) = \Phi(x, y) \mathbf{S}, \tag{8}$$

其中 $\Phi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_8(x, y))^T$, $\mathbf{S} = (s_1, s_2, \dots, s_8)^T$ 。

对于 $S_{2,2}^1(Q_T)$, 令 $\mathbf{P} = (p_1, p_2, \dots, p_8)^T$, 通过简单的计算能够得到等价转换关系 $S = DP$, 其中

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

把 $S = DP$ 带入到式(8)中得 $p(x, y) = \Phi(x, y) \mathbf{S} = \Phi(x, y) DP$, 其中插值基函数 $\mathbf{N}(x, y) = \Phi(x, y) D$ 。

热传导问题依赖稳定的梯度逼近, 对流扩散问题的时间离散又会放大空间离散误差, 因此内部更平滑、显式且具有较好完备性的 QS-r2d2 单元可作为较合理的空间离散基础。

3. 热传导问题的离散格式与数值结果

3.1. 热传导方程

热传导问题可分为稳态热传导问题和非稳态热传导问题, 两者的本质区别是温度是否随时间变化。在热传导方程中 $f_0(x, y, t)$ 为热源强度, C 为热容, ρ 为密度, k 为传导率, $u = u(x, y, t)$ 描述在 t 时刻 (x, y) 位置物理的温度, 则 Dirichlet 边界条件下的热传导方程初边值问题为:

$$\begin{cases} u_t - \nabla \cdot (c \nabla u) = f, & (x, y) \in \Omega, t \in [0, T], \\ u(x, y, 0) = v(x, y), & (x, y) \in \Omega, t = 0, \\ u = g(x, y, t), & (x, y) \in \partial\Omega, t \in [0, T], \end{cases} \tag{10}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d=1, 2)$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, $[0, T]$ 为时间区域, $c = \frac{k}{\rho C}$ 为热扩散项系数,

$f = \frac{h(x, y, t)}{\rho C}$ 为源项, 初始温度为 $v(x, y)$, 边界条件为 $g = g(x, y, t)$ 。

3.2. 热传导方程的离散格式

引入 Sobolev 空间 $H^1(\Omega)$ 的子空间 $H_0^1(\Omega) = \{\phi \in H^1(\Omega) : \phi|_{\partial\Omega} = 0\}$, 设 \mathcal{T}_h 为区域 Ω 上的四边形网格剖分, $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ 为由 QS-r2d2 四边形样条单元构造得到的有限维空间。那么半离散的 Galerkin 方法为: 求 $u_h(x, y, t) \in V_h$, 满足

$$\begin{cases} (u_{h,t}, \chi_h) + a(u_h, \chi_h) = (f, \chi_h), & \forall \chi_h \in V_h, \\ (u(x, y, 0), \chi_h) = (v, \chi_h), & \forall \chi_h \in V_h, \end{cases} \tag{11}$$

这里 χ 为测试函数。记 $\{\mathcal{H}_j\}_{j=1}^{N_b}$ 为 QS-r2d2 单元的分片基函数, N_b 为总自由度数, 则 $V_h = \text{span}\{\mathcal{H}_j\}_{j=1}^{N_b}$, 且试探函数 $u_h(x, y, t)$ 表示为 $u_h(x, y, t) = \sum_{j=1}^{N_b} u_j(t) \mathcal{H}_j(x, y)$, $t \in [0, T]$, 将此式代入方程, 并取 $\chi_h = \mathcal{H}_i$ 为测试函数, 那么就得到关于 $u_1(t), u_2(t), \dots, u_{N_b}(t)$ 的常微分方程组:

$$\sum_{j=1}^{N_b} (\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_i) \frac{du_j}{dt} + \sum_{j=1}^{N_b} a(\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_i) u_j = (f, \mathcal{H}_i), \quad i = 1, 2, \dots, N_b. \quad (12)$$

其中令刚度矩阵为:

$$A(t) = [a_{ij}]_{i,j=1}^{N_b} = \left[\int_{\Omega} c \nabla \mathcal{H}_j \cdot \nabla \mathcal{H}_i \, dx \right]_{i,j=1}^{N_b},$$

定义质量矩阵为:

$$M = [m_{ij}]_{i,j=1}^{N_b} = \left[\int_{\Omega} \mathcal{H}_j \cdot \mathcal{H}_i \, dx \right]_{i,j=1}^{N_b},$$

定义荷载向量为:

$$\mathbf{b}(t) = [b_i]_{i=1}^{N_b} = \left[\int_{\Omega} f \cdot \mathcal{H}_i \, dx \right]_{i=1}^{N_b},$$

其中未知向量为:

$$\mathbf{U}(t) = [u_j(t)]_{j=1}^{N_b},$$

因此得到的向量形式为:

$$M \mathbf{U}'(t) + A(t) \mathbf{U}(t) = \mathbf{b}(t), \quad (13)$$

那么就得到了半离散化方程。

接下来是对时间区域进行离散, 得到全离散化的有限元方法。设时间方向的步长为 k , 将 $[0, T]$ 等距剖分成 J 个单元, 则时间节点表示为 $t_{\zeta} = (\zeta - 1) \cdot k$, $\zeta = 1, \dots, J + 1$, 记 $\mathbf{U}^{\zeta} = \mathbf{U}(t_{\zeta})$, 对时间项用 θ 差分格式进行离散, 得到离散格式的方程:

$$\begin{aligned} M \frac{\mathbf{U}^{\zeta} - \mathbf{U}^{\zeta-1}}{k} + \theta A(t_{\zeta}) \mathbf{U}^{\zeta} + (1 - \theta) A(t_{\zeta-1}) \mathbf{U}^{\zeta-1} &= \theta \mathbf{b}(t_{\zeta}) + (1 - \theta) \mathbf{b}(t_{\zeta-1}), \quad \zeta = 1, \dots, J + 1, \\ \Rightarrow \left[\frac{M}{k} + \theta A(t_{\zeta}) \right] \mathbf{U}^{\zeta} &= \theta \mathbf{b}(t_{\zeta}) + (1 - \theta) \mathbf{b}(t_{\zeta-1}) - (1 - \theta) A(t_{\zeta-1}) \mathbf{U}^{\zeta-1} + \frac{M}{k} \mathbf{U}^{\zeta-1}. \end{aligned}$$

从而得到迭代格式:

$$\hat{A} \mathbf{U}^{\zeta} = \hat{\mathbf{b}}^{\zeta}, \quad \zeta = 1, \dots, J + 1, \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{M}{k} + \theta A(t_{\zeta}), \\ \hat{\mathbf{b}}^{\zeta} &= \theta \mathbf{b}(t_{\zeta}) + (1 - \theta) \mathbf{b}(t_{\zeta-1}) - (1 - \theta) A(t_{\zeta-1}) \mathbf{U}^{\zeta-1} + \frac{M}{k} \mathbf{U}^{\zeta-1}. \end{aligned}$$

注: 当 $\theta = 0$ 时, 退化为向前欧拉格式:

$$\frac{1}{k} (\mathbf{U}^{\zeta} - \mathbf{U}^{\zeta-1}, \chi_h) + a(\mathbf{U}^{\zeta-1}, \chi_h) = (f(t_{\zeta}), \chi_h), \quad \zeta = 1, 2, \dots,$$

$\theta = 1$ 时, 退化为向后欧拉格式:

$$\frac{1}{k}(\mathbf{U}^\zeta - \mathbf{U}^{\zeta-1}, \chi_h) + a(\mathbf{U}^\zeta, \chi_h) = (f(t_{\zeta-1}), \chi_h), \zeta = 1, 2, \dots,$$

$\theta = 0.5$ 时, 退化为 Crank-Nicolson 格式:

$$\frac{1}{k}(\mathbf{U}^\zeta - \mathbf{U}^{\zeta-1}, \chi_h) + \frac{1}{2}a(\mathbf{U}^\zeta + \mathbf{U}^{\zeta-1}, \chi_h) = (f(t_{\zeta-(1-\theta)}), \chi_h), \zeta = 1, 2, \dots,$$

迭代求解方程组(10)就可得到热传导方程组的近似解, 至此就得到了全离散化的方程。

引理 1 设 u 和 u_h 分别为方程(10)和(11)的解在边界 $\partial\Omega$ 上 $v = 0$, 那么

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leq \|v_h - v\| + Ch^r \left(\|v\|_r + \int_0^t \|u_t\|_r ds \right), \quad t \geq 0.$$

定义 1 对任意的 $v \in H^1(\Omega)$, 若满足

$$(\nabla R_h v, \nabla \chi) = (\nabla v, \nabla \chi), \quad \forall \chi \in V_h, v \in H^1(\Omega), \tag{15}$$

则称 $R_h : H^1(\Omega) \rightarrow V_h$ 是 QS-r2d2 有限元空间上的 Ritz 投影。

引理 2 由式(16)定义的 Ritz 投影有如下性质, 对任意的 $v \in H^r(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $r \geq 2$, 有

$$\|R_h v - v\| + h \|\nabla(R_h v - v)\| \leq Ch^s \|v\|_s, \quad 1 \leq s \leq r, \tag{16}$$

其中 $C \geq 0$ 为常数, r 表示由 QS-r2d2 单元空间决定的逼近阶。

下面先考虑半离散格式的误差。将误差分解为 $u_h(t) - u(t) = \Psi(t) + \Theta(t)$, 其中 $\Psi(t) = u_h(t) - R_h u(t)$, $\Theta(t) = R_h u(t) - u(t)$ 。由 Ritz 投影误差估计可得 $\|\Theta(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^r \|u(t)\|_{H^r(\Omega)}$, 又因为 $u_h(t)$ 满足半离散 Galerkin 格式, 而精确解 $u(t)$ 满足连续变分形式, 两式相减, 并利用 Ritz 投影的定义, 可得

$$(\Psi_t, \chi_h) + a(\Psi, \chi_h) = -(\Theta_t, \chi_h), \quad \forall \chi_h \in V_h.$$

取 $\chi_h = \Psi(t)$, 并利用双线性形式的非负性和 Cauchy 不等式, 有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Psi(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\Theta_t(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\Psi(t)\|_{L^2(\Omega)},$$

于是有 $\frac{d}{dt} \|\Psi(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\Theta_t(t)\|_{L^2(\Omega)}$, 对此式在 $[0, t]$ 上积分, 并结合 Ritz 投影误差估计得到

$$\|\Psi(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\Psi(0)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|\Theta_t(s)\|_{L^2(\Omega)} ds.$$

若初值满足 $\|u_h(0) - R_h u(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^r \|u(0)\|_{H^r(\Omega)}$, 则半离散误差满足

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^r \left(\|u(0)\|_{H^r(\Omega)} + \int_0^t \|u_t(s)\|_{H^r(\Omega)} ds \right).$$

下面进一步讨论全离散格式的误差。记 $e^\zeta = \bar{U}^\zeta - u(t_\zeta)$ 为 t_ζ 时刻的全离散误差, 将其分解为 $e^\zeta = \bar{U}^\zeta - u(t_\zeta) = (\bar{U}^\zeta - R_h u(t_\zeta)) + (R_h u(t_\zeta) - u(t_\zeta))$ 。令 $\xi^\zeta = \bar{U}^\zeta - R_h u(t_\zeta)$, $\eta^\zeta = R_h u(t_\zeta) - u(t_\zeta)$, 则 $e^\zeta = \xi^\zeta + \eta^\zeta$, 其中, η^ζ 为空间投影误差, ξ^ζ 为全离散误差分析中的主要部分。由 Ritz 投影误差估计, 有 $\|\eta^\zeta\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^r \|u(t_\zeta)\|_{H^r(\Omega)}$, 接下来估计 ξ^ζ , 有

$$\left(\frac{\bar{U}^\zeta - \bar{U}^{\zeta-1}}{k}, \chi_h \right) + a(\theta \bar{U}^\zeta + (1-\theta) \bar{U}^{\zeta-1}, \chi_h) = (f^{\zeta-\theta}, \chi_h),$$

将精确解 $u(t)$ 在时间层上作相同形式的 θ 差分近似, 并与上式相减, 可得误差方程

$$\left(\frac{\xi^\zeta - \xi^{\zeta-1}}{k}, \chi_h \right) + a(\theta \xi^\zeta + (1-\theta)\xi^{\zeta-1}, \chi_h) = (\rho^\zeta, \chi_h) - \left(\frac{\eta^\zeta - \eta^{\zeta-1}}{k}, \chi_h \right),$$

其中 ρ^ζ 为时间离散截断误差, 表示精确解的时间导数与 θ 差分近似之间的差异。若精确解关于时间具有足够光滑性, 当 $\theta = 0.5$ 时, 具有二阶时间精度; 当 $\theta = 1$ 时, 退化为向后欧拉格式, 时间方向为一阶精度。

取测试函数 $\chi_h = \theta \xi^\zeta + (1-\theta)\xi^{\zeta-1}$, 利用稳定性估计、Young 不等式以及 Ritz 投影误差估计, 可得

$$\begin{aligned} \|\xi^\zeta\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^r \left(\|u(0)\|_{H^r(\Omega)} + \int_0^{t_\zeta} \|u_t(s)\|_{H^r(\Omega)} ds \right) \\ &\quad + C \left[(2-2\theta)k^2 \int_0^{t_\zeta} \|u_{tt}(s)\|_{L^2(\Omega)} ds + (2\theta-1)k \int_0^{t_\zeta} \|u_{tt}(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \right], \end{aligned}$$

再结合 $\|e^\zeta\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\xi^\zeta\|_{L^2(\Omega)} + \|\eta^\zeta\|_{L^2(\Omega)}$ 最终得到如下误差估计。

定理 1 设 $u(t)$ 为抛物型方程初边值问题的精确解, \bar{U}^ζ 为基于 QS-r2d2 四边形样条单元和 θ 差分格式得到的全离散有限元解。若 u 关于空间和时间均具有足够光滑性, 且初值逼近满足

$$\|\bar{U}^0 - R_h u(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^r \|u(0)\|_{H^r(\Omega)},$$

则当 $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ 时, 有如下误差估计:

$$\begin{aligned} \|\bar{U}^\zeta - u(t_\zeta)\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^r \left(\|u(0)\|_{H^r(\Omega)} + \int_0^{t_\zeta} \|u_t(s)\|_{H^r(\Omega)} ds \right) \\ &\quad + C \left[(2-2\theta)k^2 \int_0^{t_\zeta} \|u_{tt}(s)\|_{L^2(\Omega)} ds + (2\theta-1)k \int_0^{t_\zeta} \|u_{tt}(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \right], \end{aligned}$$

其中 C 为与空间网格尺度 h 和时间步长 k 无关的正常数。

3.3. 数值实验

本节将通过热传导算例检验 QS-r2d2 四边形样条单元在空间离散中的误差与收敛表现。为便于比较, 本文选取同阶 Lagrange 有限元作为参照方法, 并在相同计算区域、相同边界条件、相同终止时刻和相同网格尺度下计算数值解。误差指标包括 L^2 范数误差和 H^1 半范数误差, 以及网格的顶点集合 I 的最大函数值误差。

例 3.1 考虑一个方形区域 $\Omega = [0,1] \times [1,3]$, 参数 $c = 1$ 及热容 $C = 1 \text{ J}$, 热源强度

$$\frac{\pi}{4} \frac{5}{2} \pi^2 \sin(\pi x) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \text{ W/m}^3, \quad \text{初始条件 } u(x, y, 0) = \sin \pi x \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right), \quad \text{边界条件 } u(x, y, t) = 0, \quad \text{解析解}$$

$$u(x, y, t) = \sin(\pi x) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right).$$

上述问题的数学模型为:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\nabla u) = \frac{5}{4} \pi^2 \sin(\pi x) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right), & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y, t) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega, \\ u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right), & (x, y) \in \Omega. \end{cases}$$

该算例的解析解不随时间变化, 因此主要用于考察 QS-r2d2 单元与同阶 Lagrange 单元在热传导型扩

散算子下的空间逼近能力。为进一步考察网格形状对数值结果的影响，实验分别采用如图 4 所示规则四边形成网格和畸变四边形网格。

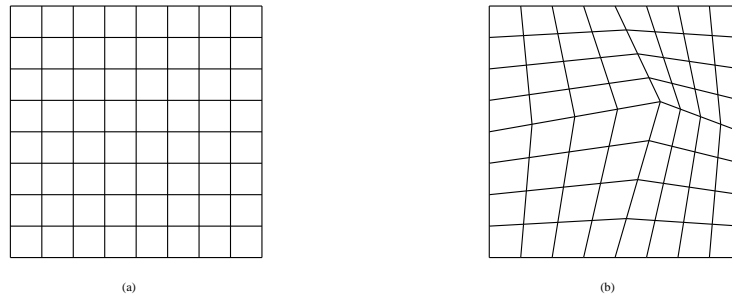


Figure 4. (a) Rectangular mesh; (b) Distorted quadrilateral mesh
图 4. (a) 矩形网格; (b) 畸变的四边形网格

Table 1. Errors and convergence rates of Example 3.1 on regular quadrilateral meshes

表 1. 规则四边形网格下例 3.1 的误差和收敛阶

单元		4 × 4	8 × 8	16 × 16	32 × 32
Lagrange	$\max_{x \in I} u - u_h $	3.345022e-03	4.147291e-04	5.065631e-05	6.232406e-06
	收敛阶		3.011775	3.033355	3.022881
	$\ u - u_h\ _{L^2}$	2.271924e-03	2.896815e-04	3.637032e-05	4.551229e-06
	收敛阶		2.971375	2.993634	2.998434
	$ u - u_h _{H^1}$	5.693023e-02	1.426447e-02	3.567904e-03	8.920854e-04
	收敛阶		1.996769	1.999277	1.999823
QS-r2d2	$\max_{x \in I} u - u_h $	1.913513e-03	1.245867e-04	7.850460e-06	4.915924e-07
	收敛阶		3.941002	3.988229	3.997243
	$\ u - u_h\ _{L^2}$	2.344704e-03	2.578466e-04	3.114258e-05	3.858924e-06
	收敛阶		3.184821	3.049553	3.012618
	$ u - u_h _{H^1}$	6.076024e-02	1.450630e-02	3.583053e-03	8.930317e-04
	收敛阶		2.066448	2.017418	2.004406

Table 2. Errors and convergence rates of Example 3.1 on distorted quadrilateral meshes

表 2. 畸变四边形网格下例 3.1 的误差和收敛阶

单元		4 × 4	8 × 8	16 × 16	32 × 32
Lagrange	$\max_{x \in I} u - u_h $	7.101921e-03	1.048798e-03	1.354712e-04	1.850490e-05
	收敛阶		2.759483	2.952668	2.872007
	$\ u - u_h\ _{L^2}$	3.402646e-03	4.456639e-04	5.629070e-05	7.051666e-06
	收敛阶		2.932629	2.984988	2.996861
	$ u - u_h _{H^1}$	7.424003e-02	1.894345e-02	4.757914e-03	1.190933e-03
	收敛阶		1.970498	1.993298	1.998237

续表

QS-r2d2	$\max_{x \in I} u - u_h $	2.943644e-03	3.622119e-04	3.425646e-05	3.429764e-06
	收敛阶		3.022697	3.402386	3.320195
	$\ u - u_h\ _{L^2}$	4.296478e-03	4.414291e-04	5.226123e-05	6.446952e-06
	收敛阶		3.282901	3.078369	3.019052
	$ u - u_h _{H^1}$	8.281963e-02	1.934200e-02	4.757981e-03	1.185298e-03
	收敛阶		2.098236	2.023316	2.005100

例 3.2 考虑单位正方形区域 $\Omega = \{(x, y) | 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, 取时间相关的解析解为

$$u(x, y, t) = e^{-t} \sin(\pi x) \sin(\pi y) + 0.1e^{-2t} \sin(2\pi x) \sin(\pi y) + 0.05te^{-t} x(1-x)y(1-y) \cos(3\pi x) \cos(2\pi y).$$

这是二维薄板中的非稳态温度场。解析解中第一项表示主导热模态随时间衰减的热扩散过程；第二项表示较高频率的横向热扰动；第三项表示局部热源作用下产生的高频振荡温度分布，其强度随时间先增强后衰减，并在边界附近逐渐消失。则上述问题的数学模型为：

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & (x, y) \in \Omega, t > 0, \\ u(x, y, t) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) + 0.1 \sin(2\pi x) \sin(\pi y), & (x, y) \in \Omega. \end{cases}$$

$$f(x, y, t) = (2\pi^2 - 1)e^{-t} \sin(\pi x) \sin(\pi y) + 0.1(5\pi^2 - 2)e^{-2t} \sin(2\pi x) \sin(\pi y) + 0.05(1-t)e^{-t} x(1-x)y(1-y) \cos(3\pi x) \cos(2\pi y) - 0.05te^{-t} (A + B).$$

其中

$$A = -2y(1-y) \cos(3\pi x) \cos(2\pi y) - 6\pi(1-2x)y(1-y) \sin(3\pi x) \cos(2\pi y) - 9\pi^2 x(1-x)y(1-y) \cos(3\pi x) \cos(2\pi y),$$

$$B = -2x(1-x) \cos(3\pi x) \cos(2\pi y) - 4\pi x(1-x)(1-2y) \cos(3\pi x) \sin(2\pi y) - 4\pi^2 x(1-x)y(1-y) \cos(3\pi x) \cos(2\pi y).$$

Table 3. The approximation errors and convergence orders obtained by Lagrange and QS-r2d2 for Example 3.2

表 3. Lagrange 和 QS-r2d2 求解例 3.2 所得的逼近误差和收敛阶

单元		4 × 4	8 × 8	16 × 16	32 × 32
Lagrange	$\max_{x \in I} u - u_h $	1.392156e-03	1.802474e-04	2.244800e-05	2.857890e-06
	收敛阶		2.949271	3.005320	2.973565
	$\ u - u_h\ _{L^2}$	6.059891e-04	7.719470e-05	9.697482e-06	1.217826e-06
	收敛阶		2.972718	2.992820	2.993302
	$ u - u_h _{H^1}$	1.915992e-02	4.807189e-03	1.202654e-03	3.007221e-04
	收敛阶		1.994826	1.999262	1.999329
QS-r2d2	$\max_{x \in I} u - u_h $	3.837943e-04	3.307497e-05	2.107505e-06	2.136651e-07
	收敛阶		3.536522	3.972132	3.302113

续表

$\ u - u_h\ _{L^2}$	6.252984e-04	6.939375e-05	8.423958e-06	1.052092e-06
收敛阶		3.171667	3.042236	3.001237
$ u - u_h _{H^1}$	2.050494e-02	4.889269e-03	1.207805e-03	3.014820e-04
收敛阶		2.068281	2.017231	2.002244

3.4. 小结

从上述表 1~3 的数值结果可以看出, QS-r2d2 单元在热传导问题中具有较稳定的收敛表现。在规则网格和畸变网格下, 随着网格加密, 两种方法的三类误差整体均呈下降趋势。与同阶 Lagrange 单元相比, QS-r2d2 单元在最大误差方面优势较为明显, 在细网格下的 L^2 误差中也具有一定优势; 但在 H^1 半范误差方面, 两种方法整体接近。说明该方法在整体逼近精度和最大误差控制方面具有一定优势, 能够有效用于热传导问题的数值求解。

4. 对流扩散问题的离散格式与数值结果

4.1. 对流扩散方程

考虑如下对流扩散方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (a \nabla u) + b \nabla u + cu = f(x, y, t), & (x, y) \in \Omega, t \in [0, T], \\ u(x, y, 0) = v(x, y) & (x, y) \in \Omega, t = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = g(x, y, t), & (x, y) \in \partial\Omega, t \in [0, T]. \end{cases} \quad (17)$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d=1, 2$) 是一个有界且连通的 Lipschitz 区域, 边界 $\partial\Omega$ 充分光滑。 $[0, T]$ 为时间区域, T 为给定的正常数。函数 $v(x, y)$ 表示初始条件, $g(x, y, t)$ 为边界条件。方程中的系数在不同应用背景下具有不同的物理含义: $a = a(x, y, t)$ 表示扩散系数, $b = b(x, y, t)$ 表示对流速度, c 为反应项系数, 而右端项右边 $f = f(x, y, t)$ 表示源函数。

4.2. 对流扩散方程的离散格式

引入 Sobolev 空间 $H^1(\Omega)$ 的子空间 $H_0^1(\Omega) = \{\phi \in H^1(\Omega) : \phi|_{\partial\Omega} = 0\}$, 设 \mathcal{T}_h 为区域 Ω 上的四边形网格剖分, $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ 为由 QS-r2d2 四边形样条单元构造得到的有限维空间, 则半离散的 Galerkin 方法为: 求 $u_h(x, y, t) \in V_h$, 满足

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, \chi_h \right) + A(u_h, \chi_h) = (f, \chi_h), & \forall \chi_h \in V_h, t \in [0, T], \\ (u(x, y, 0), \chi_h) = (v(x, y), \chi_h), & \forall \chi_h \in V_h, t = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = g(x, y, t), & (x, y) \in \partial\Omega, t \in [0, T]. \end{cases} \quad (18)$$

令 $\{C_j\}_{j=1}^{N_b}$ 为 QS-r2d2 单元对应的全局基函数, N_b 为总自由度数, 则有限元空间 V_h 可以表示为: $V_h = \text{span}\{C_j\}_{j=1}^{N_b}$ 。因此, 有限元近似解 $u_h(x, y, t) = \sum_{j=1}^{N_b} u_j(t) C_j(x, y)$, 将此式代入原方程(18), 并取 $\chi_h = C_i$ 为测试函数, 可得到关于系数函数 $u_1(t), u_2(t), \dots, u_{N_b}(t)$ 的常微分方程组:

$$\sum_{j=1}^{N_b} (C_j, C_i) \frac{du_j}{dt} + \sum_{j=1}^{N_b} A(C_j, C_i) u_j = (f, C_i), i=1, 2, \dots, N_b. \quad (19)$$

将上述方程写成向量的形式为： $M\mathbf{U}'(t) + A(t)\mathbf{U}(t) = \mathbf{b}(t)$ ，其中 M 为质量矩阵， $\mathbf{b}(t)$ 为荷载向量， $A(t)$ 由扩散项、对流项和反应项共同组成的刚度矩阵，表示为

$$A(t) = [a_{ij}]_{i,j=1}^{N_b} = \left[\iint_{\Omega} (a \nabla C_j \cdot \nabla C_i + b \nabla C_j \cdot C_i + c \cdot C_j \cdot C_i) dx dy \right]_{i,j=1}^{N_b}.$$

由于对流扩散方程与热传导方程在空间离散和时间推进上的处理过程基本一致，相关半离散方程、矩阵组装及 θ 差分时间离散过程可参照 3.2 节推导，本文不再重复展开。由此可得对流扩散方程的全离散迭代格式。

为进一步说明上述全离散格式的可靠性，记时间步长为 τ ， U_h^n 为 t_n 时刻的有限元解，并令 $\delta_t U_h^n = \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\tau}$ ， $U_h^{n,\theta} = \theta U_h^n + (1-\theta)U_h^{n-1}$ 。定义对流扩散问题对应的双线性形式为

$$B(w, v) = \int_{\Omega} a \nabla w \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} (\mathbf{b} \cdot \nabla w) v dx + \int_{\Omega} c w v dx.$$

则全离散格式可写为：求 $U_h^n \in V_h$ ，使得对任意 $v_h \in V_h$ ，有 $(\delta_t U_h^n, v_h) + B(U_h^{n,\theta}, v_h) = (f^{n,\theta}, v_h)$ 。

由分部积分及齐次边界条件可得

$$B(v_h, v_h) = \int_{\Omega} a |\nabla v_h|^2 dx + \int_{\Omega} \left(c - \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{b} \right) v_h^2 dx \geq \alpha \|v_h\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

其中 $\alpha > 0$ 为与 h ， τ 无关的常数。取 $v_h = U_h^{n,\theta}$ ，并利用恒等式

$$(\delta_t U_h^n, U_h^{n,\theta}) = \frac{1}{2\tau} \left(\|U_h^n\|^2 - \|U_h^{n-1}\|^2 \right) + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \tau \|\delta_t U_h^n\|^2,$$

可得

$$\frac{1}{2\tau} \left(\|U_h^n\|^2 - \|U_h^{n-1}\|^2 \right) + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \tau \|\delta_t U_h^n\|^2 + \alpha \|U_h^{n,\theta}\|_{H^1}^2 \leq \|f^{n,\theta}\|_{H^{-1}} \|U_h^{n,\theta}\|_{H^1}.$$

由 Young 不等式并对时间层求和，当 $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ 时有

$$\|U_h^n\|^2 + \tau \sum_{j=1}^n \|U_h^{j,\theta}\|_{H^1}^2 \leq C \left(\|U_h^0\|^2 + \tau \sum_{j=1}^n \|f^{j,\theta}\|_{H^{-1}}^2 \right).$$

因此，当 $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ 时，全离散格式无条件稳定；当 $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ ，需要满足类似 $\tau(1-2\theta)\lambda_{\max} \leq C_0$ 的时间步长限制，其中 λ_{\max} 为离散算子的最大特征值量级，格式为条件稳定。

下面给出误差估计。令 $R_h u \in V_h$ 为 Ritz 投影，即 $B(R_h u - u, v_h) = 0, \forall v_h \in V_h$ 。将误差分解为

$$u(t_n) - U_h^n = (u(t_n) - R_h u(t_n)) + (R_h u(t_n) - U_h^n) = \eta^n + \xi^n.$$

其中 η^n 为空间投影误差， ξ^n 为离散误差。若精确解具有足够光滑性，则 $\|\eta^n\| + h \|\eta^n\|_{H^1} \leq Ch^r \|u(t_n)\|_{H^r}$ ，再将精确解代入同一 θ 差分格式并与数值格式相减，结合稳定性估计、投影误差估计和时间截断误差，可得

$$\|u(t_n) - U_h^n\| \leq Ch^r \left(\|u_0\|_{H^r} + \int_0^{t_n} \|u_t(s)\|_{H^r} ds \right) + C\tau^q.$$

其中 C 与 h ， τ 无关；当 $\theta = \frac{1}{2}$ 时， $q=2$ ，对应 Crank - Nicolson 格式的二阶时间精度；当 $\theta \neq \frac{1}{2}$ 时，一般有 $q=1$ 。该估计表明，总误差由 QS-r2d2 空间离散误差和 θ 差分时间离散误差共同决定。

4.3. 数值实验

例 4.1 考虑如下二维对流扩散问题，用于检验在同时含有扩散、对流和反应项非稳态问题中的逼近效果。选取扩散系数和反应系数为 1，流速向量为单位向量。该问题的解析解具有明显的空间振荡特征，并随时间线性变化，因此可以较好地反映空间离散误差和时间推进误差对最终数值结果的影响。

$$\begin{cases} u_t - \nabla \cdot (\nabla u) + \nabla u + u = f, & (x, y) \in \Omega, t > 0, \\ u(x, y, 0) = 0, & (x, y) \in \Omega, t = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

其中 $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ ，且

$$f = \sin(\pi x) \cos(\pi x) \left((6\pi^2 t + t + 1 \sin^2(\pi y) - 2\pi^2 t \cos(\pi y) + 2\pi t \sin(\pi y) \cos(\pi y)) \right) + \pi t \sin^2(\pi y) (\cos^2(\pi x) - \sin^2(\pi x)).$$

解析解为 $u(x, y, t) = t \sin(\pi x) \cos(\pi x) \sin^2(\pi y)$ 。

Table 4. DOFs, CPU time and conditioning in Example 4.1

表 4. 例 4.1 中两类单元的自由度、CPU 时间与条件数

	Lagrange/QS-r2d2	Lagrange/QS-r2d2	Lagrange/QS-r2d2
	自由度数量	CPU 时间	刚度矩阵条件数
4 × 4	81/65	0.1/1.53	52/73
8 × 8	289/225	0.2/5.79	202/284
16 × 16	1089/833	0.6/23.78	804/1132
32 × 32	4225/3201	2.6/134.42	3228/4540

Table 5. The approximation errors and convergence orders obtained by Lagrange and QS-r2d2 for Example 4.1

表 5. Lagrange 和 QS-r2d2 求解例 4.1 所得的逼近误差和收敛阶

单元		4 × 4	8 × 8	16 × 16	32 × 32
Lagrange	$\max_{x \in T} u - u_h $	9.132943e-03	1.542151e-03	1.972893e-04	2.455297e-05
	收敛阶		2.566136	2.966559	3.006343
	$\ u - u_h\ _{L^2}$	4.306689e-03	5.715689e-04	7.249383e-05	9.094320e-06
	收敛阶		2.913580	2.978997	2.994821
	$ u - u_h _{H^1}$	1.413379e-01	3.592594e-02	9.016257e-03	2.256198e-03
QS-r2d2	收敛阶		1.976051	1.994425	1.998635
	$\ u - u_h\ _{L^\infty}$	5.243705e-03	3.762299e-04	2.399486e-05	1.519517e-06
	收敛阶		3.800900	3.970817	3.981041
	$\ u - u_h\ _{L^2}$	6.343391e-03	6.409130e-04	7.641334e-05	9.454395e-06
	收敛阶		3.307054	3.068232	3.014767
	$ u - u_h _{H^1}$	1.616217e-01	3.718610e-02	9.092028e-03	2.260836e-03
	收敛阶		2.119786	2.032089	2.007746

4.4. 小结

由表 4 进一步表明, 在相同网格尺度下, QS-r2d2 单元的自由度数量少于同阶 Lagrange 单元, 体现出一定的自由度压缩优势。但由于其基函数构造和连续性约束处理更为复杂, CPU 时间和刚度矩阵条件数相对较高。但表 5 可见, QS-r2d2 单元在对流扩散问题中同样表现出较好的收敛性。与同阶 Lagrange 单元相比, QS-r2d2 单元在 L^2 误差上整体更优, 收敛阶更为稳定; H^1 半范误差约为二阶, 对于网格顶点处的最大函数值误差表现出接近四阶的超收敛现象。结果说明, 该方法在保持稳定性的同时, 能够获得较高的整体逼近精度, 对对流扩散类问题具有较好的适用性。

5. 结论

本文围绕热传导方程和对流扩散方程的数值求解, 采用基于比例边界坐标的 QS-r2d2 四边形样条单元全离散有限元格式。该方法在空间离散中引入径向和环向均为二次的退化张量积 Bernstein 基函数; 在时间离散方面采用 θ 差分格式。与传统有限元方法相比, QS-r2d2 单元不再简单依赖多项式插值, 而是在比例边界坐标框架下形成了更平滑、更适合局部逼近的基函数结构。

数值实验表明, 该样条单元在热传导问题和对流扩散问题中均表现出稳定的收敛性。随着网格加密, 各类误差均明显减小, 网格顶点处的最大函数值误差还呈现出超收敛现象。与同阶 Lagrange 有限元相比, 说明该方法在整体逼近精度和误差控制方面具有一定优势。尤其是在对流扩散问题中, 空间离散误差容易受到对流项和时间推进的影响, 而 QS-r2d2 单元仍能保持较规整的收敛阶, 体现了其较好的数值稳定性和适用性。

综上, 基于比例边界坐标的 QS-r2d2 四边形样条单元可作为求解热传导和对流扩散问题的一种可行空间离散方式, 不仅丰富了比例边界有限元方法的空间离散形式, 也为这类时间相关偏微分方程提供了一种精度较高、收敛稳定的数值离散方式。

基金项目

辽宁省教育厅青年项目基金(No. LJ212410165017)。

参考文献

- [1] 傅里叶. 热的解析理论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2008.
- [2] Verros, G.D. (2016) Application of Irreversible Thermodynamics to the Solvent Diffusion in an Amorphous Glassy Polymer: A Comprehensive Model for Drying of Toluene-Poly(methyl Methacrylate) Coatings. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, **93**, 2298-2306. <https://doi.org/10.1002/cjce.22340>
- [3] Codina, R. (1998) Comparison of Some Finite Element Methods for Solving the Diffusion-Convection-Reaction Equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **156**, 185-210. [https://doi.org/10.1016/s0045-7825\(97\)00206-5](https://doi.org/10.1016/s0045-7825(97)00206-5)
- [4] Douglas Jr., J. and Dupont, T. (1970) Galerkin Methods for Parabolic Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **7**, 575-626. <https://doi.org/10.1137/0707048>
- [5] Thomée, V. (1984) Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems. Springer.
- [6] Song, C. (2018) The Scaled Boundary Finite Element Method: Introduction to Theory and Implementation. Wiley. <https://doi.org/10.1002/9781119388487>
- [7] Coelho, K.O., Devloo, P.R.B. and Gomes, S.M. (2021) Error Estimates for the Scaled Boundary Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **379**, Article ID: 113765. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.113765>
- [8] Idrees Bhatti, M. and Bracken, P. (2007) Solutions of Differential Equations in a Bernstein Polynomial Basis. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **205**, 272-280. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.05.002>
- [9] Song, C. and Wolf, J.P. (1997) The Scaled Boundary Finite-Element Method—Alias Consistent Infinitesimal Finite-

- Element Cell Method—For Elastodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **147**, 329-355. [https://doi.org/10.1016/s0045-7825\(97\)00021-2](https://doi.org/10.1016/s0045-7825(97)00021-2)
- [10] Wolf, J.P. and Song, C. (2001) The Scaled Boundary Finite-Element Method—A Fundamental Solution-Less Boundary-Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**, 5551-5568. [https://doi.org/10.1016/s0045-7825\(01\)00183-9](https://doi.org/10.1016/s0045-7825(01)00183-9)
- [11] Peng, X., Xu, G., Zhou, A., Yang, Y. and Ma, Z. (2020) An Adaptive Bernstein-Bézier Finite Element Method for Heat Transfer Analysis in Welding. *Advances in Engineering Software*, **148**, Article ID: 102855. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2020.102855>
- [12] 刘震一. 基于比例边界坐标的 S 网样条有限元方法[D]: [博士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2025.
- [13] Jin, B., Lazarov, R. and Zhou, Z. (2016) A Petrov-Galerkin Finite Element Method for Fractional Convection-Diffusion Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **54**, 481-503. <https://doi.org/10.1137/140992278>
- [14] Liu, M.Z. and Spijker, M.N. (1990) The Stability of the Θ -Methods in the Numerical Solution of Delay Differential Equations. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **10**, 31-48. <https://doi.org/10.1093/imanum/10.1.31>