

离散傅里叶变换到图傅里叶变换的一致数学框架

徐 容, 许 英, 黄寅彰, 吴果林*

桂林航天工业学院理学院, 广西 桂林

收稿日期: 2026年6月28日; 录用日期: 2026年7月22日; 发布日期: 2026年7月28日

摘 要

离散傅里叶变换与图傅里叶变换之间的联系已在图信号处理相关研究中得到广泛讨论, 但相关结果通常分散于傅里叶分析、谱图理论与图信号处理文献之中, 面向教学和跨领域研究的系统性、一体化推导仍有进一步梳理的必要。针对这一问题, 本文从离散傅里叶变换出发, 在已有图信号处理理论的基础上构建由规则离散信号域向一般无向图域推广的数学分析框架。首先, 在环形图模型下考察邻接矩阵与图拉普拉斯矩阵的谱结构, 分析离散傅里叶基与图谱基之间的对应关系, 说明离散傅里叶变换可视为特定图结构上的图傅里叶变换。其次, 引入图移位算子作为刻画图拓扑作用于图信号的基本线性算子, 给出图移位算子视角下的图傅里叶变换。进一步地, 本文从图拉普拉斯二次型出发, 系统阐释其与相邻节点信号差异、图信号平滑度以及低频/高频图模态之间的关系, 从而为“图频率”提供更明确的物理和几何解释。本文的贡献不在于提出全新的GFT定义, 而在于对DFT到GFT这一已知理论联系给出系统性、教学性和一体化的数学梳理, 为理解经典傅里叶分析与图信号谱分析之间的连续关系提供更清晰的推导路径。

关键词

图信号处理, 离散傅里叶变换, 图傅里叶变换, 图移位算子, 图拉普拉斯矩阵

A Unified Mathematical Framework from the Discrete Fourier Transform to the Graph Fourier Transform

Rong Xu, Ying Xu, Yinzhang Huang, Guolin Wu*

School of Science, Guilin University of Aerospace Technology, Guilin Guangxi

Received: June 28, 2026; accepted: July 22, 2026; published: July 28, 2026

*通讯作者。

文章引用: 徐容, 许英, 黄寅彰, 吴果林. 离散傅里叶变换到图傅里叶变换的一致数学框架[J]. 应用数学进展, 2026, 15(7): 333-344. DOI: 10.12677/aam.2026.157326

Abstract

The relationship between the discrete Fourier transform (DFT) and the graph Fourier transform (GFT) has been widely investigated in graph signal processing. Nevertheless, relevant theoretical results remain scattered across the literature on Fourier analysis, spectral graph theory, and graph signal processing, and a unified, pedagogically oriented derivation for teaching and interdisciplinary research is still lacking. To bridge this gap, this paper takes the DFT as its starting point and, building upon existing graph signal processing theories, constructs a mathematical analysis framework that extends from regular discrete signal domains to general undirected graph domains. First, under cycle graphs, we investigate the spectral properties of the adjacency matrix and the graph Laplacian, analyze the correspondence between the discrete Fourier basis and the graph spectral basis, and demonstrate that the DFT serves as a special instance of the GFT defined on cycle graphs. Second, we introduce the graph shift operator as the fundamental linear operator characterizing the action of graph topology on graph signals, and derive the GFT from this operator perspective. Moreover, starting from the quadratic form of the graph Laplacian, we systematically elaborate on its inherent connections with inter-node signal differences, graph signal smoothness, and low-/high-frequency graph modes, thereby offering more explicit physical and geometric interpretations of graph frequency. Accordingly, the core contribution of this paper is not a novel definition of the GFT, but rather a systematic and pedagogical mathematical exposition of the established theoretical link from the DFT to the GFT, providing a clearer derivation route for understanding the theoretical continuity between classical Fourier analysis and graph spectral signal analysis.

Keywords

Graph Signal Processing, Discrete Fourier Transform, Graph Fourier Transform, Graph Shift Operator, Graph Laplacian Matrix

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在传统信号处理领域，傅里叶变换是分析信号频率结构、实现滤波、数据压缩与特征提取的核心工具。离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, DFT)将有限长离散信号映射至频域，把复杂波形分解为不同频率的正弦、余弦分量，使信号的内在结构与规律更易于观察、分析与利用[1]。

然而，现实世界中大量数据并不局限于规则的一维时序或二维网格空间，而是以复杂网络结构的形式存在，例如社交网络的用户关系、生物信息学中的蛋白质相互作用网络、交通系统的监测节点分布、脑科学中的功能连接网络等。这类数据统一依附于图这一非欧几里得结构，节点间连接无固定规律，离散傅里叶变换无法直接适用。

为将傅里叶变换的优势拓展至图信号，研究者提出图傅里叶变换(Graph Fourier Transform, GFT) [2] [3]。其核心思想是：将离散傅里叶变换的复指数基函数，替换为图移位算子(Graph Shift Operator, GSO)或图拉普拉斯算子的特征向量；将传统频率替换为图矩阵的特征值或与其相关的谱量，从而在图结构上构建频域分解框架。图傅里叶变换的提出，推动了图滤波、谱域表示学习以及图卷积神经网络(Graph Convolutional Network, GCN)等方法的发展，成为图信号处理与图学习的重要理论基础[4]-[6]。

需要指出的是, DFT 与 GFT 之间的理论联系并非本文首次提出。Shuman 等[7]系统概述了图信号处理的基本框架, Ortega 等[8]进一步总结了图信号处理的挑战与应用, Sandryhaila 和 Moura [9][10]从图移位算子出发建立了离散图信号处理理论, 相关综述与后续工作也从图谱、图滤波和谱图神经网络等角度对该问题进行了深入讨论[11][12]。这些研究为理解规则域傅里叶分析向图域谱分析的推广奠定了重要基础。

尽管如此, 现有文献中的相关论述往往服务于不同研究目标: 有的侧重图信号处理的整体框架, 有的侧重图滤波或图学习方法, 有的强调特定图矩阵或特定应用场景。因此, 对于初学者以及来自信号处理、应用数学、网络科学和机器学习等不同领域的研究者而言, 如何从最熟悉的 DFT 出发, 经由环形图这一规则图结构, 自然过渡到一般图上的 GFT, 仍需要一条更连贯、更详尽且便于教学使用的推导路径。

基于此, 本文从离散傅里叶变换出发, 首先考察环形图中邻接矩阵与图拉普拉斯矩阵的谱结构, 揭示离散傅里叶基与图谱基的对应关系, 说明 DFT 可视为特定图结构上的 GFT。随后引入图移位算子, 建立其作用下的图傅里叶变换表述。进一步从图拉普拉斯二次型出发, 阐释其与邻接节点差异、信号平滑度及图频率模态之间的关系, 为图频率提供物理与几何解释。

与已有研究相比, 本文的主要定位是系统性、教学性和一体化的理论梳理, 而非提出一种新的图傅里叶变换定义。具体而言, 本文试图在已有 GSP 理论基础上完成三方面工作: 第一, 以环形图为桥梁, 将 DFT 中的复指数基与图矩阵特征向量之间的对应关系显式化; 第二, 引入图移位算子概念, 说明图矩阵谱分解为何能够承担图域频率分析的基础角色; 第三, 通过图拉普拉斯二次型详细解释信号平滑度与图频率之间的关系, 使 DFT 到 GFT 的推广不仅具有形式上的数学统一性, 也具有概念内涵上的连续性。

2. 离散傅里叶变换

2.1. DFT 的标准定义

对于一个长度为 N 的离散时间信号 $x(n)$ ($n=0,1,\dots,N-1$), 离散傅里叶变换(DFT)定义为:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nk/N}, \quad (k=0,1,\dots,N-1) \quad (1)$$

其逆变换(Inverse Discrete Fourier Transform, IDFT)为:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi nk/N}, \quad (n=0,1,\dots,N-1) \quad (2)$$

其中, $\{e^{j2\pi nk/N}\}_{k=0}^{N-1}$ 构成了一组完备的正交基函数, 系数 $X(k)$ 是信号 $x(n)$ 在第 k 个频率分量上的投影系数。

2.2. DFT 的矩阵表示与正交性

为了揭示 DFT 与线性代数及图论之间的联系, 将其改写为矩阵形式。定义 $N \times N$ 矩阵 U :

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{N}} & e^{j\frac{2\pi}{N}2} & \cdots & e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)} & e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)2} & \cdots & e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

则公式(2) IDFT 的矩阵形式可写作:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N} \mathbf{U} \mathbf{X}, \text{ or}$$

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{N}} & e^{j\frac{2\pi}{N}2} & \cdots & e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{j\frac{2\pi(N-1)}{N}} & e^{j\frac{2\pi(N-1)2}{N}} & \cdots & e^{j\frac{2\pi(N-1)(N-1)}{N}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

其中, $\mathbf{x} = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$, $\mathbf{X} = [X(0), X(1), \dots, X(N-1)]^T$ 。公式(1) DFT 的矩阵形式可写作:

$$\mathbf{X} = \bar{\mathbf{U}} \mathbf{x}, \text{ or}$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi(N-1)}{N}} & e^{-j\frac{2\pi(N-1)2}{N}} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi(N-1)(N-1)}{N}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

其中, $\bar{\mathbf{U}}$ 表示 $\mathbf{U}$ 的共轭矩阵。

现证明矩阵 $\mathbf{U}$ 的列向量构成正交基。设 $\mathbf{U}$ 的第 n 个列向量为 $\mathbf{u}_n$, 其中 $n=0, 1, \dots, N-1$ 。根据定义, $\mathbf{u}_n$ 的第 k 个元素为 $[\mathbf{u}_n]_k = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ (注意: 这里 k 是行索引, n 是列索引)。内积定义为 $\mathbf{u}_p^H \mathbf{u}_q$, 其中 H 表示共轭转置, 计算任意两个列向量 $\mathbf{u}_p$ 和 $\mathbf{u}_q$ 之间的复数内积 $\langle \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_q \rangle$:

$$\langle \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_q \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \overline{[\mathbf{u}_p]_k} \cdot [\mathbf{u}_q]_k, \quad (6)$$

代入定义, 则有:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_q \rangle &= \sum_{k=0}^{N-1} \overline{e^{j\frac{2\pi}{N}kp}} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kq} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kp} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kq} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(q-p)}. \end{aligned} \quad (7)$$

令 $m = q - p$, 这是一个等比数列求和问题, 公比 $r = e^{j\frac{2\pi}{N}m}$ 。当 $p \neq q$ 时(即 $m \neq 0$ 且不是 N 的倍数), 此时公比 $r \neq 1$, 根据等比数列求和公式 $S_N = \frac{a_0(1-r^N)}{1-r}$, 则有:

$$\sum_{k=0}^{N-1} r^k = \frac{1 - \left(e^{j\frac{2\pi}{N}m} \right)^N}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}m}} = \frac{1 - e^{j2\pi m}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}m}}. \quad (8)$$

由于 m 是整数, $e^{j2\pi m} = 1$, 因此, 当 $p \neq q$ 时, $\langle \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_q \rangle = 0$ 。这意味着不同列向量之间是正交的。当 $p = q$ 时(即 $m = 0$), 此时指数项 $e^0 = 1$, 则有 $\langle \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_p \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N \neq 0$, 说明每个列向量都是非零向量(模长

为 $\sqrt{N}$)。

综上, $\mathbf{U}$ 的列向量组 $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}$ 构成了一组正交基。此外, $\frac{1}{N} \mathbf{U} \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ 为单位矩阵), 即傅里叶变换矩阵与傅里叶逆变换矩阵互逆。

3. 环形图上的图傅里叶变换

本节将 DFT 定义推广到环形图上的图傅里叶变换。分别考虑有向环形图与无向环形图两种情况。

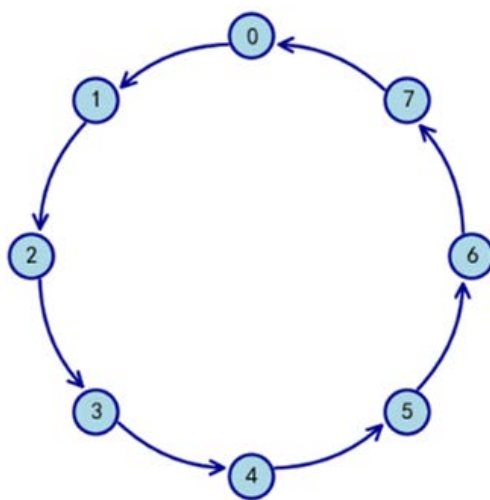


Figure 1. Directed ring graph with 8 nodes

图 1. 含有 8 个节点的有向环形图

3.1. 有向环形图的傅里叶变换

图论中, 一个含有 N 个顶点的有向环形图 $\mathcal{G}_{\text{dir}}$ 定义为: 顶点集 $V = 0, 1, \dots, N-1$; 对于每个顶点 i , 存在一条有向边从 i 指向 $(i+1) \bmod N$ 。含有 8 个节点有向环形图见图 1。若在每个顶点 k 上赋予信号 $x(k)$, 则该图上的信号向量 $\mathbf{x} = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$ 对应一个长度为 N 的离散周期序列, 每个顶点对应一个时间采样点, 顶点 k 连接到顶点 $k+1$ 形成环形拓扑。该有向环图的邻接矩阵 $\mathbf{P}$ 可表示为:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{N \times N}. \quad (9)$$

邻接矩阵 $\mathbf{P}$ 又称为一个基本循环移位矩阵, 其作用是矩阵右乘一个向量后, 向量的元素向左(后)循环移一位。例如, 存在一个信号向量 $\mathbf{x} = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$, 则有

$$\mathbf{P}\mathbf{x} = [x(1), x(2), \dots, x(N-1), x(0)]^T. \quad (10)$$

显然, 矩阵 $\mathbf{P}$ 是一个“置换”矩阵, 如果向量连续左乘 N 次矩阵 $\mathbf{P}$, 向量里的元素会循环移位 N 次回到原位, 即 $\mathbf{P}^N = \mathbf{I}$ 。

现求矩阵 $\mathbf{P}$ 的特征值与特征向量。设 λ 为 $\mathbf{P}$ 的特征值, 特征向量为 $\mathbf{u} = [u_0, u_1, u_2, \dots, u_{N-1}]^T$ 。根据特征值和特征向量的定义, 有 $\mathbf{P}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ 。结合矩阵 $\mathbf{P}$ 的移位性质, 有

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

对比等式两边的元素,可以得到递推关系:

$$\begin{cases} u_1 = \lambda u_0, \\ u_2 = \lambda u_1 = \lambda^2 u_0, \\ u_3 = \lambda u_2 = \lambda^3 u_0, \\ \vdots \\ u_{N-1} = \lambda u_{N-2} = \lambda^{N-1} u_0, \\ u_0 = \lambda u_{N-1} = \lambda^N u_0. \end{cases} \quad (12)$$

特征向量不能为零向量,故 $u_0 \neq 0$ 。由 $u_0 = \lambda^N u_0$, 得 $\lambda^N = 1$ 。在复数域中,方程 $\lambda^N = 1$ 的解就是 N 次单位根。因此, $\mathbf{P}$ 有 N 个互不相同的特征值:

$$\lambda_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}, (k=0,1,2,\cdots,N-1) \quad (13)$$

将特征值 λ_k 代入递推关系(12)中,可得 $u_n = \lambda_k^n u_0, (n=0,1,\cdots,N-1)$ 。令 $u_0=1$, 对应于特征值 λ_k 的特征向量 $\mathbf{u}_k$ 为:

$$\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ \lambda_k^2 \\ \vdots \\ \lambda_k^{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\frac{2\pi}{N}k} \\ e^{j\frac{2\pi}{N}2k} \\ \vdots \\ e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)k} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

其中, $k=0,1,2,\cdots,N-1$ 。若把这 N 个特征向量 $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_{N-1}$ 作为列向量排成一个矩阵,得到的正是 2.2 节中的傅里叶逆变换矩阵 $\mathbf{U}$ 。因此,有向环形图的傅里叶变换为:

$$\mathbf{X} = \bar{\mathbf{U}}\mathbf{x}, \quad (15)$$

其中, $\mathbf{x} = [x(0), x(1), \cdots, x(N-1)]^T$ 为有向环形图 $\mathcal{G}_{\text{dir}}$ 上的节点信号、 $\bar{\mathbf{U}}$ 为图邻接矩阵 $\mathbf{P}$ 的特征向量构成的矩阵 $\mathbf{U}$ 的共轭矩阵。即有向环形图上的节点信号的傅里叶变换等于该有向环形图的邻接矩阵的特征值向量构成的矩阵的共轭矩阵与节点信号向量的乘积。

如果令 $u_0 = \frac{1}{\sqrt{N}}$, 可以得到对应于特征值 λ_k 的标准化特征向量,仍记为 $\mathbf{u}_k$:

$$\mathbf{u}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ \lambda_k^2 \\ \vdots \\ \lambda_k^{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\frac{2\pi}{N}k} \\ e^{j\frac{2\pi}{N}2k} \\ \vdots \\ e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)k} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

其中, $k=0,1,2,\dots,N-1$ 。把这 N 个特征向量 $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}$ 作为列向量排成一个矩阵, 该矩阵是一个标准化的正交矩阵, 与之前讨论的傅里叶逆变换矩阵 $\mathbf{U}$ 相差一个归一化常数 $\frac{1}{\sqrt{N}}$, 为便于描述, 仍记为 $\mathbf{U}$ 。

邻接矩阵 $\mathbf{P}$ 的特征值构成的矩阵为 $\mathbf{\Lambda}$:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

则有,

$$\mathbf{P} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^{-1}. \quad (18)$$

考虑到矩阵 $\mathbf{U}$ 的对称性与正交性, 有 $\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U}^T = \mathbf{U}^H = \mathbf{U}^{-1}$, 于是有向环形图的傅里叶变换为:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{U}^{-1} \mathbf{x}, \\ X(k) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nk/N}, \quad (k=0,1,\dots,N-1) \end{aligned} \quad (19)$$

其逆变换为:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{U} \mathbf{X}, \\ x(n) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi nk/N}, \quad (n=0,1,\dots,N-1) \end{aligned} \quad (20)$$

其中, $\{e^{j2\pi nk/N}\}_{k=0}^{N-1}$ 构成了一组正交基函数, $X(k)$ 是信号 $x(n)$ 在第 k 个频率分量上的投影系数的 $\sqrt{N}$ 倍, 这一结论与离散傅里叶变换相同。

3.2. 无向环形图的傅里叶变换

实际应用中更常见的是无向环形图 $\mathcal{G}_{\text{undir}}$, 其邻接矩阵 $\mathbf{A}$ 是一个 $N \times N$ 的矩阵:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

其中, 当且仅当节点 i 和节点 j 相邻时, $a_{i,j}=1$, 否则为 0。易见 $\mathbf{A} = \mathbf{P} + \mathbf{P}^{N-1}$, 其中 $\mathbf{P}$ 为 3.1 节定义的有向环形图的邻接矩阵。

为分析 $\mathbf{A}$ 的特征结构, 引入矩阵多项式的谱映射定理(Spectral Mapping Theorem):

定理 1 [13] 设 $f(x)$ 是一个关于变量 x 的 m 次多项式: $f(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, 其中 c_i 是常数系数。对于一个 N 阶方阵 $\mathbf{P}$, $f(\mathbf{P})$ 为: $f(\mathbf{P}) = c_m \mathbf{P}^m + c_{m-1} \mathbf{P}^{m-1} + \cdots + c_1 \mathbf{P} + c_0 \mathbf{I}$ 。设 λ 是矩阵 $\mathbf{P}$ 的一个特征值, $\mathbf{x}$ 是对应的特征向量(即 $\mathbf{P}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$)。那么, $\mathbf{x}$ 也是矩阵多项式 $f(\mathbf{P})$ 的特征向量, 对应的特征值是 $f(\lambda)$, 即 $f(\mathbf{P})\mathbf{x} = f(\lambda)\mathbf{x}$ 。

应用此定理可得, 无向环形图 $\mathcal{G}_{\text{undir}}$ 的邻接矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征向量等于有向环形图的邻接矩阵 $\mathbf{P}$ 的特征向量。设 $\lambda_k (k=0,1,2,\dots,N-1)$ 为 $\mathbf{P}$ 的特征值, 由定理可得, 矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $f(\lambda_k) = \lambda_k + \lambda_k^{N-1}$

($k = 0, 1, 2, \dots, N-1$)。记

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(\lambda_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_{N-1}) \end{bmatrix}, \quad (22)$$

则矩阵 $\mathbf{A}$ 可表示为 $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}$ 。

依据有向环形图傅里叶变换的定义，无向环形图的傅里叶变换为：

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}. \quad (23)$$

对于无向环形图，其图拉普拉斯矩阵(graph Laplacian)定义为 $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$ ，其中 $\mathbf{D}$ 是度矩阵(对角矩阵， $d_{nn} = \sum_m a_{nm}$)， $\mathbf{A}$ 是邻接矩阵。由于 $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A} = 2\mathbf{I} - \mathbf{P} - \mathbf{P}^{N-1}$ ，根据定理 1，图拉普拉斯矩阵 $\mathbf{L}$ 的特征向量与邻接矩阵 $\mathbf{P}$ 特征向量相同，相应的图傅里叶变换也与有向环形图相同。

上述分析揭示了一个极其重要的事实：在环形图上，无论是邻接矩阵($\mathbf{P}$ 或 $\mathbf{A}$)还是图拉普拉斯矩阵 $\mathbf{L}$ ，它们的特征向量都是同一组复指数基 $\mathbf{u}_k$ ，区别仅在于特征值的数值(随多项式函数变换)。因此，若将图傅里叶变换定义为信号在特征向量基上的投影，那么这三种矩阵定义下的 GFT 完全等价。

4. 一般图上的傅里叶变换

4.1. 从经典移位到图移位算子

传统 DFT 的频率分析能力并不仅来自正弦、余弦函数本身，而是来自这些基函数与“移位”操作之间的谱关系。在一维周期离散信号中，循环移位矩阵刻画了样本沿时间轴移动一位且首尾相接的结构；复指数向量正是该循环移位矩阵的特征向量。因此，DFT 可以理解为：寻找一组能够对循环移位操作进行对角化的基，并把信号表示到这组基所张成的谱域中。

这一观点也解释了路径图与环形图在经典信号处理中对应的不同边界条件：路径图对应有限区间上的局部邻接结构，容易产生边界效应；环形图把首尾节点相连，使一次移位后离开一端的信号从另一端重新出现，从而对应循环卷积与循环矩阵。由此可见，“移位”并不是一个单纯的代数操作，而是在矩阵形式中编码了信号所在域的拓扑结构。

在一般图中，节点之间通常没有天然的一维顺序，“向前一位”或“向后一位”的时间平移不再有明确含义。为推广这一思想，图信号处理引入图移位算子。给定图 $\mathcal{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E}, \mathbf{W})$ ，图移位算子通常取为一个能够反映图拓扑结构的矩阵 $\mathbf{S}$ ，例如无权图邻接矩阵 $\mathbf{A}$ 、加权邻接矩阵 $\mathbf{W}$ 、图拉普拉斯矩阵 $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{W}$ 、归一化图拉普拉斯矩阵，或其他由图连接关系诱导的线性算子。

对于定义在节点集合上的图信号 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ ，一次图移位 $\mathbf{S}\mathbf{x}$ 表示信号沿图边进行一次局部传播、扩散或邻域聚合。若 $\mathbf{S} = \mathbf{W}$ ，则有

$$(\mathbf{S}\mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^N w_{ij}x_j, \quad (24)$$

即节点 i 移位后信号值由其邻居节点信号按照边权加权得到。由此，图移位算子可被看作图上信号处理的“基本语法”：它规定了哪些节点之间可以交换信息、交换强度多大，以及局部相互作用如何在全图上传播。

当图退化为一维环形图时，GSO 可取为循环移位矩阵或环形图的邻接矩阵，此时图移位正好对应经典周期序列的移位操作。因此，GSO 提供了从经典离散信号处理到图信号处理的统一语言：经典移位是规则环形图上的特殊图移位，而图移位是任意网络拓扑上的广义移位。

4.2. 图移位算子的谱分解与图傅里叶变换

图移位算子的关键作用在于：它不仅描述局部传播，还通过其谱分解揭示图的全局结构模式。若图移位算子 $\mathbf{S}$ 可对角化，即

$$\mathbf{S} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^{-1}, \quad (25)$$

其中 $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}]$ 为特征向量矩阵， $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1})$ 为特征值矩阵，则 $\mathbf{S}$ 对特征向量的作用满足 $\mathbf{S} \mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k$ 。这说明特征向量 $\mathbf{u}_k$ 在一次图移位作用下只发生尺度变化，而不改变其空间模式。因此，它们可以被视为图结构上的基本振荡模式或图谱模态。与经典傅里叶分析中复指数函数是时间移位算子的特征函数类似，GSO 的特征向量自然承担图域傅里叶基的角色。

对于图信号 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ 或 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ ，基于 GSO 的图傅里叶变换定义为信号在这些图谱基上的展开：

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{U} \mathbf{X} = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \mathbf{u}_k, \quad (26)$$

其中， X_k 为信号在第 k 个图谱模态上的系数。若 $\mathbf{S}$ 为无向图上的实对称矩阵，如 $\mathbf{W}$ 或 $\mathbf{L}$ ，则 $\mathbf{U}$ 可取为正交矩阵，有 $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$ ，于是 GFT 与逆 GFT 可写为：

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}^T \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{U} \mathbf{X}, \quad (27)$$

此时变换具有类似正交傅里叶变换的能量保持性质，即 $\|\mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{X}\|_2^2$ 。

从滤波角度看，图移位算子还给出了图滤波的自然定义。经典 FIR 滤波器可表示为时间移位算子的多项式；相应地，图 FIR 滤波器可定义为 GSO 的多项式：

$$H(\mathbf{S}) = \sum_{m=0}^M h_m \mathbf{S}^m, \quad (28)$$

其中， $\mathbf{S}^m \mathbf{x}$ 表示信号经过 m 次沿图边的局部传播，因此多项式图滤波器只依赖有限阶邻域信息。若 $\mathbf{S} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^{-1}$ ，则

$$H(\mathbf{S}) = \mathbf{U} \left(\sum_{m=0}^M h_m \mathbf{\Lambda}^m \right) \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U} h(\mathbf{\Lambda}) \mathbf{U}^{-1}, \quad (29)$$

说明图滤波器在图傅里叶域中表现为对不同图谱分量的逐频率增益调节，其中频率响应为 $h(\lambda_k) = \sum_{m=0}^M h_m \lambda_k^m$ 。这一点与经典线性时不变滤波器在傅里叶域中逐频率相乘完全对应，也进一步说明 GSO 谱分解是图傅里叶分析、图滤波以及谱域图神经网络的基础。

需要注意的是，不同 GSO 会产生不同的谱基与频率解释。邻接矩阵或加权邻接矩阵强调节点连接关系下的传播和聚合；图拉普拉斯矩阵强调相邻节点间的差异与能量变化；归一化拉普拉斯则进一步削弱节点度数差异带来的尺度影响。因此，GFT 并不是脱离图矩阵选择的唯一形式，而是依赖于所选 GSO 对图结构和物理过程的刻画方式。

4.3. 基于图拉普拉斯矩阵的图傅里叶变换与图频率解释

在实际应用中，更常用的是基于图拉普拉斯矩阵 $\mathbf{L}$ 的 GFT，主要因为 $\mathbf{L}$ 具有更好的数学性质。对于无向加权图，图拉普拉斯矩阵 $\mathbf{L}$ 定义为 $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{W}$ ，其中 $\mathbf{W}$ 是加权邻接矩阵， $\mathbf{D}$ 是度矩阵， $D_{nn} = \sum_m W_{nm}$ 。

$\mathbf{L}$ 的关键性质(对于无向图)：

- (1) 对称半正定： $\mathbf{L} = \mathbf{L}^T$ ，且所有特征值 $\lambda_k \geq 0$ 。
- (2) 最小特征值： $\lambda_0 = 0$ ，对应的特征向量 $\mathbf{u}_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{1}$ (常数向量)。

(3) 特征向量正交: $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$, 即 $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$ 。

(4) 特征值可排序: $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{N-1}$ 。

对 $\mathbf{L}$ 进行特征分解, 有 $\mathbf{L} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^T$ 。基于拉普拉斯矩阵的图傅里叶变换为[7] [13]:

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{x}. \quad (30)$$

逆变换为:

$$\mathbf{x} = \mathbf{U} \mathbf{X}. \quad (31)$$

基于图拉普拉斯矩阵的 GFT 与基于一般 GSO 的 GFT 在代数形式上是一致的: 二者都将信号投影到某个图矩阵的特征向量上。区别在于, 拉普拉斯矩阵的特征值具有特别清晰的“平滑度 - 频率”解释, 因此更适合用于说明图频率的物理含义。

为了理解为什么图拉普拉斯特征值可以被解释为“图频率”, 需要考察图拉普拉斯二次型。对于任意图信号 $\mathbf{x}$, 有

$$\mathbf{x}^T \mathbf{L} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (\mathbf{D} - \mathbf{W}) \mathbf{x} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_{ij} (x_i - x_j)^2. \quad (32)$$

该式表明, 图拉普拉斯二次型度量的是图信号沿图边的总体变化程度。如果两个节点 i 和 j 之间的边权 w_{ij} 较大, 则它们之间的信号差异 $(x_i - x_j)^2$ 会被赋予更高权重; 若强连接节点上的信号值差异较小, 则 $\mathbf{x}^T \mathbf{L} \mathbf{x}$ 较小, 说明信号在图结构上较为平滑; 反之, 若相邻节点尤其是强连接节点上的信号值差异较大, 则 $\mathbf{x}^T \mathbf{L} \mathbf{x}$ 较大, 说明信号在图上变化剧烈。

从物理直觉上看, $\mathbf{x}^T \mathbf{L} \mathbf{x}$ 类似于连接在图边上的弹簧系统所储存的弹性能量: 边权越大, 表示两个节点之间耦合越强; 若强耦合节点的信号值差异越大, 则系统能量越高。因而, 低能量信号对应在强连接节点之间缓慢变化的平滑模式, 高能量信号则对应沿图边快速变化或局部振荡的非平滑模式。这个解释使“图频率”不仅是特征值排序的代数结果, 也具有明确的扩散、耦合和能量意义。

当 $\mathbf{x}$ 取为图拉普拉斯的第 k 个单位特征向量 $\mathbf{u}_k$ 时, 由 $\mathbf{L} \mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k$ 以及 $\mathbf{u}_k^T \mathbf{u}_k = 1$ 可得:

$$\mathbf{u}_k^T \mathbf{L} \mathbf{u}_k = \lambda_k. \quad (33)$$

结合二次型表达式可知, 特征值 λ_k 正是特征向量 $\mathbf{u}_k$ 在图上的变化强度。较小的 λ_k 对应较平滑的图谱模态, 即相邻节点上的取值变化较缓; 较大的 λ_k 对应振荡更强的图谱模态, 即相邻节点上的取值变化更剧烈。因此, 在基于图拉普拉斯的 GFT 中, 特征值从小到大的排序可自然理解为图频率从低到高的排序。

特别地, $\lambda_0 = 0$ 对应常数特征向量 $\mathbf{u}_0$, 此时所有节点取值相同, 图上没有任何相邻节点差异, 因此是最低频、最平滑的图信号分量。这与传统傅里叶分析中的直流分量完全对应。随着特征值增大, 特征向量在图连接结构上的变化越来越明显, 可类比为传统傅里叶分析中频率升高时正弦波振荡加快。不同之处在于, 传统频率描述的是沿时间或空间坐标的振荡快慢, 而图频率描述的是信号相对于图拓扑连接关系的变化强弱。

进一步地, 对于一般图信号 $\mathbf{x} = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \mathbf{u}_k$, 利用 $\mathbf{L} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^T$ 可得

$$\mathbf{x}^T \mathbf{L} \mathbf{x} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} X_k \mathbf{u}_k \right)^T \mathbf{L} \left(\sum_{k=0}^{N-1} X_k \mathbf{u}_k \right) = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k |X_k|^2 \quad (34)$$

该关系进一步说明, 图信号的平滑度不仅取决于其谱系数 X_k 的大小, 还取决于这些谱系数分布在哪些图频率上。如果信号能量主要集中在小特征值对应的低频模态上, 则 $\mathbf{x}^T \mathbf{L} \mathbf{x}$ 较小, 信号在图上较平滑;

如果信号能量集中在大特征值对应的高频模态上, 则 $\mathbf{x}^T \mathbf{L} \mathbf{x}$ 较大, 信号在图上呈现明显的局部突变或振荡。这一结论为图滤波、图信号去噪、半监督学习以及谱图神经网络中的低通滤波思想提供了直接的理论解释。

从图移位算子的观点看, 拉普拉斯矩阵还可以被理解为刻画“差分型移位”的算子。邻接矩阵描述信号从邻居向节点的聚合, 而拉普拉斯矩阵 $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{W}$ 则描述节点信号与其邻域加权平均之间的差异。因而, 拉普拉斯谱中的高频分量往往对应与邻域平均值偏离较大的模式, 低频分量则对应于邻域结构高度一致的模式。这使得图频率概念与图上的局部一致性、扩散平衡和网络耦合结构紧密联系起来。

由此可见, 基于图拉普拉斯矩阵的 GFT 不仅在形式上将传统傅里叶变换推广为图矩阵特征向量上的投影, 而且在概念上通过图移位算子和图拉普拉斯二次型建立了“局部传播 - 谱分解 - 图频率 - 信号平滑度”之间的对应关系。正是这一对应关系, 使得 DFT 到 GFT 的推广不只是代数形式的替换, 也具有明确的物理含义和几何解释。

5. 结束语

本文围绕离散傅里叶变换到图傅里叶变换的推广过程, 系统梳理了二者之间的内在数学联系。通过对环形图谱结构的分析, 说明了离散傅里叶基与特定图结构谱基之间的对应关系, 从而揭示离散傅里叶变换可理解为图傅里叶变换在规则图上的特殊情形。在此基础上, 引入图移位算子, 给出基于图移位算子的谱分解与图傅里叶变换。最后, 通过对图拉普拉斯二次型与信号平滑度之间关系的讨论, 为图频率提供坚实的物理解释。

本文的主要价值在于, 从统一推导视角补足了傅里叶分析与图信号谱分析之间的理论链条, 增强了二者之间的连续性理解; 同时, 也为图滤波、谱域表示学习[14][15]、谱图神经网络[16]以及脑科学与复杂网络分析[17][18]等方法提供了较为清晰的理论背景。需要指出的是, 本文主要侧重于数学推导与理论联系的梳理, 对更一般图模型、不同图移位算子的选择及其应用差异尚未展开深入讨论。未来可结合图滤波、图采样[19][20]与谱图神经网络等具体问题, 进一步研究不同谱定义下变换框架的适用条件及其方法性能。

基金项目

广西自然科学基金联合专项项目(2026GXNSFHA00640076): 二分图表示学习的理论机制与可解释性; 广西自然科学基金联合专项项目(2026GXNSFHA00640221): 基于元路径的异质信息网络端到端社团发现方法研究; 国家自然科学基金(12261027): 受限异质信息网络及其行为等价和数据挖掘。

参考文献

- [1] Oppenheim, A.V. (1999) Discrete-Time Signal Processing. Pearson.
- [2] Stankovic, L., Mandic, D., Dakovic, M., *et al.* (2019) Graph Signal Processing—Part I: Graphs, Graph Spectra, and Spectral Clustering. arXiv: 1907.03467.
- [3] Stankovic, L., Mandic, D., Dakovic, M., *et al.* (2019) Graph Signal Processing—Part II: Processing and Analyzing Signals on Graphs. arXiv: 1909.10325.
- [4] Stankovic, L., Mandic, D., Dakovic, M., *et al.* (2020) Graph Signal Processing—Part III: Machine Learning on Graphs, from Graph Topology to Applications. arXiv: 2001.00426.
- [5] Kipf, T.N. and Welling, M. (2017) Semi-Supervised Classification with Graph Convolutional Networks. arXiv: 1609.02907.
- [6] Bo, D., Wang, X., Liu, Y., *et al.* (2023) A Survey on Spectral Graph Neural Networks. arXiv: 2302.05631.
- [7] Shuman, D.I., Narang, S.K., Frossard, P., Ortega, A. and Vandergheynst, P. (2013) The Emerging Field of Signal Processing on Graphs: Extending High-Dimensional Data Analysis to Networks and Other Irregular Domains. *IEEE Signal*

- Processing Magazine*, **30**, 83-98. <https://doi.org/10.1109/msp.2012.2235192>
- [8] Ortega, A., Frossard, P., Kovačević, J., Moura, J.M.F. and Vandergheynst, P. (2018) Graph Signal Processing: Overview, Challenges, and Applications. *Proceedings of the IEEE*, **106**, 808-828. <https://doi.org/10.1109/jproc.2018.2820126>
- [9] Sandryhaila, A. and Moura, J.M.F. (2013) Discrete Signal Processing on Graphs. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **61**, 1644-1656. <https://doi.org/10.1109/tsp.2013.2238935>
- [10] Sandryhaila, A. and Moura, J.M.F. (2014) Discrete Signal Processing on Graphs: Frequency Analysis. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **62**, 3042-3054. <https://doi.org/10.1109/tsp.2014.2321121>
- [11] Chen, Z.Q., Chen, F.L., Zhang, L., et al. (2024) Bridging the Gap between Spatial and Spectral Domains: A Unified Framework for Graph Neural Networks. arXiv: 2107.10234.
- [12] Isufi, E., Gama, F., Shuman, D.I. and Segarra, S. (2024) Graph Filters for Signal Processing and Machine Learning on Graphs. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **72**, 4745-4781. <https://doi.org/10.1109/tsp.2024.3349788>
- [13] Horn, R.A. and Johnson, C.R. (2012) Matrix Analysis. 2nd Edition, Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9781139020411>
- [14] Chen, Y., Cheng, C. and Sun, Q. (2023) Graph Fourier Transform Based on Singular Value Decomposition of the Directed Laplacian. *Sampling Theory, Signal Processing, and Data Analysis*, **21**, Article No. 24. <https://doi.org/10.1007/s43670-023-00062-w>
- [15] Wei, D. and Yuan, S. (2024) Hermitian Random Walk Graph Fourier Transform for Directed Graphs and Its Applications. *Digital Signal Processing*, **155**, Article ID: 104751. <https://doi.org/10.1016/j.dsp.2024.104751>
- [16] Defferrard, M., Bresson, X. and Vandergheynst, P. (2024) Convolutional Neural Networks on Graphs with Fast Localized Spectral Filtering: A Comprehensive Study. *Proceedings of the 30th International Conference on Neural Information Processing Systems*, Barcelona, 5-10 December 2016, 3844-3852.
- [17] Duan, P., Dvornek, N.C., Wang, J., Eilbott, J., Du, Y., Sukhodolsky, D.G., et al. (2024). Spectral Brain Graph Neural Network for Prediction of Anxiety in Children with Autism Spectrum Disorder. 2024 *IEEE International Symposium on Biomedical Imaging (ISBI)*, Athens, 27-30 May 2024. <https://doi.org/10.1109/isbi56570.2024.10635753>
- [18] Huang, Y., Gleich, D.F. and Li, P. (2026) Powers of Magnetic Graph Matrix: Fourier Spectrum, Walk Compression, and Applications. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **123**, e2516664123. <https://doi.org/10.1073/pnas.2516664123>
- [19] Hara, J., Tanaka, Y. and Eldar, Y.C. (2023) Graph Signal Sampling under Stochastic Priors. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **71**, 1421-1434. <https://doi.org/10.1109/tsp.2023.3267990>
- [20] Zhang, Y. and Li, B. (2026) Sampling of Graph Signals Based on Joint Time-Vertex Fractional Fourier Transform. *Signal Processing*, **239**, Article ID: 110309. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2025.110309>