

具有阈值控制策略的Filippov害虫 - 天敌模型动力学分析

王 宣*

长沙理工大学数学与统计学院, 湖南 长沙

收稿日期: 2026年6月13日; 录用日期: 2026年7月6日; 发布日期: 2026年7月13日

摘 要

考虑到杀虫剂喷施对天敌亦存在影响, 本文引入阈值控制策略探究害虫 - 天敌模型的全局动力学行为。采用菲利波夫(Filippov)定性分析方法, 剖析模型的滑模动力学与全局动力学特征, 明确了不同参数区间内真实平衡点及伪平衡点的全局渐近稳定性。通过数值模拟验证并阐释了理论结果的生物学内涵, 为害虫综合治理提供了理论支撑。

关键词

杀虫剂, 阈值控制策略, Filippov系统

Dynamical Analysis of a Filippov Pest-Natural Enemy Model with Threshold Control Strategy

Xuan Wang*

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: June 13, 2026; accepted: July 6, 2026; published: July 13, 2026

Abstract

Considering that insecticide spraying also exerts an impact on natural enemies, this paper introduces a threshold control strategy to explore the global dynamic behavior of the pest-natural enemy

*通讯作者。

model. By adopting the Filippov qualitative analysis method, the sliding mode dynamics and global dynamic characteristics of the model are analyzed, and the global asymptotic stability of real and pseudo-equilibrium points in different parameter intervals is clarified. Through numerical simulations, the biological connotation of the obtained theoretical results is verified and explained, which provides theoretical support for integrated pest management.

Keywords

Insecticide, Threshold Control Strategy, Filippov System

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

引言在现代农业生产中，大棚蔬菜种植因能突破季节与环境限制、保障作物优质高产，已成为重要的农业生产模式。然而，大棚内封闭的生态环境易导致害虫大量滋生，其中蚜虫作为典型的刺吸式害虫，以农作物汁液为食，其爆发性繁殖不仅会造成作物叶片卷曲、光合效率下降，还可能传播植物病毒，最终导致显著减产甚至绝收，严重威胁大棚蔬菜的生产效益[1]。

近年来，Filippov 系统[2]凭借其对于非光滑控制策略的精准刻画优势，已在人类传染病防控、植物病害综合治理、农业害虫生态调控等多个实际领域获得广泛应用。该系统能够有效捕捉“阈值触发”的分段控制行为，与害虫综合治理(IPM)中“按需干预”的核心思路高度契合。作为兼顾生态效益与防控效率的害虫治理理念，IPM 强调协调化学防治、生物防治与生态调控等多种手段，避免单一依赖化学农药导致的天敌消亡、害虫抗药性增强等问题，最终实现害虫种群的可持续管控。

阈值控制策略作为 IPM 的核心手段[3]-[5]，可灵活适配持续化学防控场景：当瓢虫密度低于设定阈值(ET)时，其对蚜虫的恐惧效应与捕食压力不足以弥补化学防控的局限性，需强化庇护所保护以维持天敌种群；当瓢虫密度高于阈值(ET)时，其捕食作用与恐惧效应可与化学防控形成高效协同，无须额外保护措施即可稳定抑制蚜虫增长。这类含不连续调控策略的系统可通过 Filippov 非光滑动力系统精准刻画，该方法能有效处理切换阈值引发的动力学行为突变，已被广泛应用于生态调控与病虫害治理研究中[6]。需要指出的是，本文所构建的 Filippov 模型整合了恐惧效应[7]、天敌庇护[8]以及阈值[9]触发的农药喷施三种机制，三者共同体现了害虫综合治理(IPM)中“生物防治与化学防治协同”的核心思想[10] [11]。模型中的关键阈值 ET 与 IPM 中的“经济阈值”概念密切相关，后文将对此进行详细讨论。

本文后续章节将按以下思路展开研究：第 2 章将详细构建模型并明确参数定义，Filippov 系统的基本定义及相关引理；第 3 章聚焦两类子系统的动力学分析，重点讨论平衡点的存在性与局部、全局渐近稳定性；第 4 章深入分析切换线处的滑模动力学行为，推导滑模方程并判定伪平衡点的存在条件；第 5 章结合前面的分析结果，分场景讨论 Filippov 全局系统的全局渐近稳定性，同时证明系统不存在极限环；第 6 章将探讨参数变化引发的分支现象；最后在第 7 章总结全文研究结论，并阐述其在害虫综合治理中的实践意义。

2. 模型介绍及预备知识

首先给出本文要研究的害虫 - 天敌模型：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{rx}{1+ey} \left(1 - \frac{x}{K}\right) - bxy - px, \\ \frac{dy}{dt} = bcxy - d(1-\varepsilon m)y, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中, x 表示 $t > 0$ 时刻的猎物种群, y 表示 $t > 0$ 时刻的捕食者种群。 r 为猎物的固有增长率, 表达式中 $\frac{1}{1+ey}$ 表示恐惧触发的反捕食防御行为下猎物的增长率, $e > 0$ 表示恐惧效应系数, $K > 0$ 为猎物的承载能力, $b > 0$ 为最大捕食率。 $c > 0$ 表示转化率。 p 表示杀虫剂对害虫的杀死率。 $0 < m < 1$ 表示对天敌提供的避难所保护系数。 $ET > 0$ 为控制阈值, 表述若天敌数量大于控制阈值 ET 时, 就会对猎物不施加控制策略: 若天敌数量小于控制阈值 ET 则采取措施, 对害虫喷洒农药并对天敌提供庇护所。

假设 $r > p$, 即害虫的内在增长率大于害虫灭杀率, 这保证了系统中平衡点的存在性, 使得我们的控制策略的实施是必要的和有意义的。

其中

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & y > ET, \\ 1, & y < ET. \end{cases}$$

为控制函数, $ET > 0$ 为控制阈值, 控制函数 $\varepsilon = 1$ 表示当天敌数量低于控制阈值 ET 时, 控制开启; 控制函数 $\varepsilon = 0$ 表示当天敌数量超过控制阈值 ET 时, 控制关闭。记 $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$, 显然(2.1)有下面两个子系统:

令 $H(Z) = y - ET$, $Z = (x, y)^T$, 并且 $F_{S_1}(Z) = (f_1(Z), g_1(Z))^T$, $F_{S_2}(Z) = (f_2(Z), g_2(Z))^T$, 其中

$$\begin{aligned} f_1(Z) &= \frac{rx}{1+ey} \left(1 - \frac{x}{K}\right) - bxy - px, & g_1(Z) &= bcxy - d(1-m)y, \\ f_2(Z) &= \frac{rx}{1+ey} \left(1 - \frac{x}{K}\right) - bxy - px, & g_2(Z) &= bcxy - dy. \end{aligned}$$

定义切换曲线为

$$\Sigma = \{Z \in \mathbb{R}_+^2 | H(Z) = 0\}$$

并且

$$S_1 = \{Z \in \mathbb{R}_+^2 | H(Z) < 0\}, S_2 = \{Z \in \mathbb{R}_+^2 | H(Z) > 0\},$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{rx}{1+ey} \left(1 - \frac{x}{K}\right) - bxy - px, \\ \frac{dy}{dt} = bcxy - d(1-m)y. \end{cases} \quad (2.2)$$

在 S_2 区域中系统(2.1)可写成

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{rx}{1+ey} \left(1 - \frac{x}{K}\right) - bxy - px, \\ \frac{dy}{dt} = bcxy - dy. \end{cases} \quad (2.3)$$

记 $L_{F_i} H(Z) = \langle \nabla H(Z), F_i(Z) \rangle$ 表示函数 H 在向量场 $F_i(Z)$ 上的李导数, 这里 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积。根据文献[12], 可定义切换线上的区域如下:

定义 2.1 (i) 如果在切换线 Σ 上 $L_{F_1}H(Z) > 0$ 且 $L_{F_2}H(Z) < 0$, 称满足条件的点构成的集合为切换线 Σ 上的吸引滑模区域, 记为 Σ_s 。

(ii) 如果在切换线 Σ 上 $L_{F_1}H(Z) \cdot L_{F_2}H(Z) > 0$, 称满足条件的点构成的集合为切换线 Σ 上的穿越区域, 记为 Σ_c 。

(iii) 如果在切换线 Σ 上 $L_{F_1}H(Z) < 0$ 且 $L_{F_2}H(Z) > 0$, 称满足条件的点构成的集合为切换线 Σ 上的排斥滑模区域, 记为 Σ_e 。

根据 Filippov 凸方法, 可以得到 Filippov 系统在切换线 Σ 上的滑模方程[13]:

$$\frac{dZ}{dt} = F^s(Z) = \lambda F_1(Z) + (1-\lambda) F_2(Z), Z \in \Sigma_s,$$

其中

$$\lambda = \frac{\langle \nabla H(Z), F_2(Z) \rangle}{\langle \nabla H(Z), F_2(Z) - F_1(Z) \rangle}.$$

接下来给出本文中涉及到的平面 Filippov 系统的平衡点类型。

定义 2.2 (i) 若 $Z \in S_1$ 且 $F_{S_1}(Z) = 0$, 或 $Z \in S_2$ 且 $F_{S_2}(Z) = 0$, 则称 Z 为实平衡点;

(ii) 若 $Z \in S_1$ 且 $F_{S_2}(Z) = 0$, 或 $Z \in S_2$ 且 $F_{S_1}(Z) = 0$, 则称 Z 为虚平衡点;

(iii) 若 $Z \in \Sigma_s \cup \Sigma_e$ 且满足 $F^s(Z) = 0$, 则称 Z 为伪平衡点;

(iv) 若 $Z \in \Sigma$ 且 $F_{S_1}(Z) = 0$ 或 $F_{S_2}(Z) = 0$, 则称 Z 为边界平衡点。

定义 2.3 若 $Z \in \Sigma$ 满足下面条件之一:

$$(1) L_{F_1}H(Z) = 0, F_{S_1}(Z) \neq 0; (2) L_{F_2}H(Z) = 0, F_{S_2}(Z) \neq 0,$$

那么称点 Z 为 Filippov 系统(2.1)的切点。

下面两个引理给出了系统(2.1)的正性和有界性[14]。

引理 2.4 假设 $(x(t), y(t))$ 为系统(2.1)在区间 $[0, T)$ ($T \in (0, +\infty)$) 上满足初始条件 $x(0) = x_0 \geq 0$ 和 $y(0) = y_0 \geq 0$ 的解, 则对所有的 $t \in [0, T)$ 有 $x(t) \geq 0$ 且 $y(t) \geq 0$ 。

由(2.1)的第二个方程,

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=0} = [bcxy - d(1-\varepsilon m)y] \Big|_{y=0} = 0,$$

若 $y(0) = 0$, 则对所有的 $t \in [0, T)$, 都有 $y(t) = 0$; 若 $y(0) > 0$, 假设存在 $t_0 > 0$, 使得 $y(t_0) \leq 0$, 那么将存在 $t^* > 0$, 使得 $y(t^*) = 0$ 且对任意的 $t \in [0, t^*)$, 有 $y(t) > 0$ 。由(2.1)的第二个式子, 得

$$\frac{dy}{dt} = bcxy - d(1-\varepsilon m)y \geq bcxy$$

则当 $t \doteq t^*$ 时有 $y(t^*) \geq y(0)e^{bct^*} > 0$ 。这与 $y(t^*) = 0$ 矛盾。同理由(2.1)的第一个方程可得 $x(t) \geq 0$ 。因此只要解满足 $x(0) = x_0 \geq 0$, $y(0) = y_0 \geq 0$, 则对任意的 $t \in [0, T)$, 有 $x(t) \geq 0$, $y(t) \geq 0$ 。

引理 2.5 系统(2.1)满足初值条件 $x(0) = x_0 \geq 0$ 和 $y(0) = y_0 \geq 0$ 的解在 $[0, +\infty)$ 上是有界的。

证明 令 $(x(t), y(t))$ 为系统(2.1)满足初值条件 $x(0) = x_0 \geq 0$ 和 $y(0) = y_0 \geq 0$ 的解, 且 $(x_0, y_0) \in R_+^2$, 因为 $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x \geq K} \leq 0$, 所以对系统的任意一个解都存在 $T > 0$ 。当 $t \geq T$ 时有 $x(t) \leq K$ 由引理(2.4)可知对于任意的 $t \in [0, T)$ 都有 $x(t) \geq 0$, $y(t) \geq 0$ 。

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(x+\frac{1}{c}y\right)}{dt} &= \frac{rx}{1+ey}\left(1-\frac{x}{K}\right)-bxy-\varepsilon px-\frac{d(1-m)}{c}y \\
&\leq rx\left(1-\frac{x}{K}\right)-\frac{d(1-m)}{c}y \\
&\leq rK-\min\left(r,\frac{d(1-m)}{c}\right)\left(x+\frac{y}{c}\right),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

所以

$$\begin{aligned}
x(t)+\frac{1}{c}y(t) &\leq \frac{rK}{\min\{r,d(1-m)\}}+\left(x_0+\frac{1}{c}y_0-\frac{rK}{\min\{r,d(1-m)\}}\right)e^{-\min\{r,d(1-m)\}t} \\
&\leq \frac{rK}{\min\{r,d(1-m)\}}+\left|x_0+\frac{1}{c}y_0\right|
\end{aligned}$$

故 $(x(t), y(t))$ 在 $t \in [0, +\infty)$ 上有界。 $\square$

3. 子系统动力学分析

本章节聚焦于两类子系统的动力学行为展开分析，具体涵盖平衡点的存在性判定与稳定性特征探究。

3.1. 子系统 S_1 动力学分析

对于子系统(2.2)，经过计算得到三个平衡点： $E_{11}=(0,0)$ ， $E_{12}=\left(K-\frac{Kp}{r},0\right)$ ，

$$E_1=(x_1,y_1), \text{ 其中 } x_1=\frac{d(1-m)}{bc}, \quad y_1=\frac{-(b+ep)+\sqrt{(b+ep)^2-4eb\left(p-r\left(1-\frac{x_1}{K}\right)\right)}}{2eb}.$$

考虑子系统(2.2)的 Jacobi 矩阵

$$J_1=\begin{pmatrix} \frac{r}{1+ey}\left(1-\frac{2x}{K}\right)-by-p & -\frac{rex\left(1-\frac{x}{K}\right)}{(1+ey)^2}-bx \\ bcy & bcx-d(1-m) \end{pmatrix}$$

平衡点 E_{11} 是一个鞍点；平衡点 E_{12} 满足 $bcK\left(1-\frac{p}{r}\right)<d(1-m)$ 时为局部稳定的结点，满足 $bcK\left(1-\frac{p}{r}\right)>d(1-m)$ 时为鞍点；对于正平衡点 E_1 所对应的特征方程为 $\lambda^2+tr(J(E_1))\lambda+det(J(E_1))=0$ 其中 $tr(J(E_1))<0$ ， $det(J(E_1))>0$ 。当且仅当 $bcK\left(1-\frac{p}{r}\right)>d(1-m)$ 时，它是局部稳定的结点或焦点，再结合以下结论可知该平衡点在区域 S_1 内全渐近稳定。

引理 3.1 系统(2.2)在 S_1 区域没有极限环。

证明 构造 Dulac 函数 $B(x,y)=\frac{1}{xy}$ ，则 $\frac{\partial(Bf_1)}{\partial x}+\frac{\partial(Bg_1)}{\partial y}=-\frac{r}{Ky(1+ey)}<0$ 。根据 Bendixson-Dulac 法可知系统(2.2)在 S_1 区域没有极限环。 $\square$

综上所述，对于子系统(2.2)，我们可以得出以下定理：

定理 3.2 若 $bcK\left(1-\frac{p}{r}\right) < d(1-m)$, 则 E_{12} 全局渐近稳定; 若 $bcK\left(1-\frac{p}{r}\right) > d(1-m)$, 则 E_1 全局渐近稳定。

3.2. 子系统 S_2 动力学分析

对于子系统(2.3), 通过简单的计算可得到三个平衡点: $E_{21} = (0, 0)$, $E_{22} = \left(K - \frac{Kp}{r}, 0\right)$

$$E_2 = (x_2, y_2), \text{ 其中 } x_2 = \frac{d}{bc}, y_2 = \frac{-(b+ep) + \sqrt{(b+ep)^2 - 4eb\left(p-r\left(1-\frac{x_2}{K}\right)\right)}}{2eb}.$$

考虑子系统(2.3)的 Jacobi 矩阵

$$J_2 = \begin{pmatrix} \frac{r}{1+ey}\left(1-\frac{2x}{K}\right) - by - p & -\frac{rex\left(1-\frac{x}{K}\right)}{(1+ey)^2} - bx \\ bcy & bcx - d \end{pmatrix}$$

平衡点 E_{21} 是一个鞍点; 当 $bcK\left(1-\frac{p}{r}\right) > d$ 时 E_{22} 是一个鞍点, 当且仅当 $bcK\left(1-\frac{p}{r}\right) < d$ 时 E_{22} 是一个局部稳定的结点; 对正平衡点 E_2 所对应的特征方程为 $\lambda^2 + tr(J(E_2))\lambda + det(J(E_2)) = 0$, 其中 $tr(J(E_2)) < 0$, $det(J(E_2)) > 0$, 当 $bcK\left(1-\frac{p}{r}\right) > d$ 时, 平衡点 E_2 是局部稳定的结点或焦点, 同理结合以下结论可知该平衡点在区域 S_2 内全局渐近稳定。

引理 3.2 系统(2.3)在 S_2 区域没有极限环。

证明 构造 Dulac 函数 $B(x, y) = \frac{1}{xy}$, 则 $\frac{\partial(Bf_2)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg_2)}{\partial y} = -\frac{r}{Ky(1+ey)} < 0$ 。根据 Bendixson-Dulac 法可知系统(2.3)在 S_2 区域没有极限环。

综上所述, 对于子系统(2.3), 我们可以得出以下定理:

定理 3.4 如果 $bcK\left(1-\frac{p}{r}\right) < d$, 则 E_{22} 全局渐近稳定; 若 $bcK\left(1-\frac{p}{r}\right) > d$, 则 E_2 全局渐近稳定。

4. 滑模动力学分析

本章我们主要讨论滑模的动力学行为。

根据滑模域的定义, 可以得到 $\Sigma_s = \{x \in \Sigma \mid \langle \nabla H(Z), F_{S_1}(Z) \rangle > 0, \langle \nabla H(Z), F_{S_2}(Z) \rangle < 0\}$, 即

$$\left. \langle \nabla H(Z), F_{S_1}(Z) \rangle \right|_{y \in \Sigma} = bcxy - d(1-m)y > 0 \Rightarrow x > x_1$$

$$\left. \langle \nabla H(Z), F_{S_2}(Z) \rangle \right|_{y \in \Sigma} = bcxy - d < 0 \Rightarrow x < x_2$$

则系统(2.1)的滑模区域和穿越区域分别为 $\Sigma_s = \{(x, y) \in \Sigma \mid y = ET, x_1 < x < x_2\}$ 和 $\Sigma_c = \Sigma_{c_1} \cup \Sigma_{c_2}$ 其中 $\Sigma_{c_1} = \{(x, y) \in \Sigma \mid 0 < x < x_1\}$ 和 $\Sigma_{c_2} = \{(x, y) \in \Sigma \mid x > x_2\}$ 。

由 Filippov 凸方法可得到系统(2.1)在滑模区域 Σ_s 的滑模方程为

$$\frac{dx}{dt} = \frac{rx}{1+eET}\left(1-\frac{x}{K}\right) - bETx - px = f(x) \quad (4.1)$$

令 $\frac{dx}{dt} = f(x) = 0$ ，因此等式(4.1)有两个根

$$x = 0 \text{ 或 } x = K \left[1 - \frac{(bET + p)(eET + 1)}{r} \right] = x_p,$$

因为 $x = 0 < x_1 < r$ ，故省略这个解；为了确保 $x_p \in (x_1, x_2)$ ，有

$$\frac{d(1-m)}{bc} < K \left(1 - \frac{(bET + p)(eET + 1)}{r} \right) < \frac{d}{bc}$$

那么系统可能存在一个伪平衡点 $E_p = (x_p, ET)$ 。下面得到 $x_p \in [x_1, x_2]$ 的充要条件：

$$f(x_1) = x_1 \frac{b + be(y_1 + ET) + pe}{1 + eET} (y_1 - ET),$$

$$f(x_2) = x_2 \frac{b + be(y_2 + ET) + pe}{1 + eET} (y_2 - ET)。$$

$$\text{其中 } y_1 = \frac{-(b+ep) + \sqrt{(b+ep)^2 - 4eb \left(p - r \left(1 - \frac{x_1}{K} \right) \right)}}{2eb}, \quad y_2 = \frac{-(b+ep) + \sqrt{(b+ep)^2 - 4eb \left(p - r \left(1 - \frac{x_2}{K} \right) \right)}}{2eb},$$

由此可以推断出 $y_1 > y_2$ 。若 $y_2 < ET < y_1$ ， $f(x_1) > 0$ ， $f(x_2) < 0$ ，根据零点存在定理可知伪平衡点 E_p 存在。又根据定义(2.3)，可得到两个切点 $T_1 = (x_1, ET)$ ， $T_2 = (x_2, ET)$ ，显然切点 T_1 和 T_2 为滑模区域 Σ_s 的端点。

通过对滑模动力学方程求导得到 $f'(E_p) = -\frac{r x_p}{K(1+eET)} < 0$ ，由此可说明伪平衡点 E_p 在 Σ_s 上是局部稳定的。

5. 全局动力学分析

本节聚焦于 Filippov 系统的全局动力学特性分析。具体研究步骤如下：先论证系统不存在极限环，再整合各平衡点的虚实属性与局部稳定性结论，以此结合理论分析与数值仿真手段，完整刻画系统的全局动力学行为。鉴于参数 ET 的取值会显著改变平衡点的存在性与稳定性，下文将分多种情形展开详细讨论。需要指出的是，要实现系统全局稳定性的判定，首要工作是排除极限环的存在。

引理 5.1 系统(2.1)不存在环绕滑模段 Σ_s 的穿越极限环。

证明 假设存在一个环绕滑模段 Σ_s 的极限环 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ ，其中 $\Gamma_i = \Gamma \cap S_i$ ， $i = 1, 2$ 。极限环 Γ 与切换线 $x = ET$ 相交于 M, N 两点，对任意小的 $\theta > 0$ ，作辅助线 $y = ET - \theta$ ， $y = ET + \theta$ ，且 Γ 分别与两条辅助线相交于 M_1, N_1, M_2, N_2 ，令 ∂D_1 为线段 Γ_1 与 $M_1 N_1$ 所围成的区域 D_1 的边界， ∂D_2 为线段 Γ_2 与 $N_2 M_2$ 所围成的区域 D_2 的边界。 M, N, M_1, N_1, M_2, N_2 的纵坐标分别为 $y_m, y_n, y_m + a_1(\theta), y_n - a_2(\theta), y_m + a_3(\theta), y_n - a_4(\theta)$ ，且 $\lim_{\theta \rightarrow 0} a_i(\theta) = 0, (i = 1, 2, 3, 4)$ 。取 Dulac 函数 $B(x, y) = \frac{1}{xy}$ ，有 $\frac{\partial(Bf_1)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg_1)}{\partial y} \doteq -\frac{r}{ky(1+ey)}$ ；

$\frac{\partial(Bf_2)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg_2)}{\partial y} \doteq -\frac{r}{ky(1+ey)}$ ；那么

$$\iint_{D_1} \left[\frac{\partial(Bf_1)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg_1)}{\partial y} \right] dx dy + \iint_{D_2} \left[\frac{\partial(Bf_2)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg_2)}{\partial y} \right] dx dy < 0 \quad (5.1)$$

在 D_1 中应用格林公式有

$$\begin{aligned} & \iint_{D_1} \left[\frac{\partial(Bf_1)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg_1)}{\partial y} \right] dx dy \\ &= \int_{\partial D_1} B(f_1 dy - g_1 dx) + \int_{N_1 M_1} B(f_1 dy - g_1 dx) \\ &= - \int_{N_1 M_1} Bg_1 dx \\ &= \int_{y_m + a_1(\theta)}^{y_n - a_2(\theta)} \left(bc - \frac{d(1-m)}{x} \right) dx \end{aligned}$$

同样地，在 D_2 中应用格林公式有

$$\iint_{D_2} \left[\frac{\partial(Bf_2)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg_2)}{\partial y} \right] dx dy = \int_{y_n - a_4(\theta)}^{y_m + a_3(\theta)} \left(bc - \frac{d}{x} \right) dy$$

从而可得

$$\begin{aligned} & \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\iint_{D_1} \left[\frac{\partial(Bf_1)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg_1)}{\partial y} \right] + \iint_{D_2} \left[\frac{\partial(Bf_2)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg_2)}{\partial y} \right] \right) dx dy \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\int_{y_m + a_1(\theta)}^{y_n - a_2(\theta)} \left(bc - \frac{d(1-m)}{x} \right) dy + \int_{y_n - a_4(\theta)}^{y_m + a_3(\theta)} \left(bc - \frac{d}{x} \right) dy \right) \\ &= \int_{y_m}^{y_n} \frac{md}{x} dy > 0. \end{aligned}$$

这与(5.1)产生了矛盾，从而引理得证，如图1所示。证毕。 $\square$

引理 5.2 系统(2.1)不存在包含部分滑模段 Σ_s 的极限环。

证明(图2) 当 $y_1 < ET$ 时，存在实平衡点 E_1 ，且由前面的内容可知，该实平衡点 E_1 在子系统 S_1 内是全局渐近稳定的。若存在极限环 Γ 包含部分 Σ_s ，则轨线经过一段时间后再回到 Σ_s 形成极限环，这与实平衡点 E_1 的全局渐近稳定性矛盾；同理，当 $ET < y_2$ 时会存在全局渐近稳定的实平衡点 E_2 ，这种情况下也不会存在包含部分滑模段的极限环；当 $y_2 < ET < y_1$ 时，存在局部稳定的伪平衡点， E_p ，轨线经过滑模段 Σ_s 时会收敛到 E_p 。综上所述，该系统不存在与 Σ_s 部分重合的极限环。 $\square$

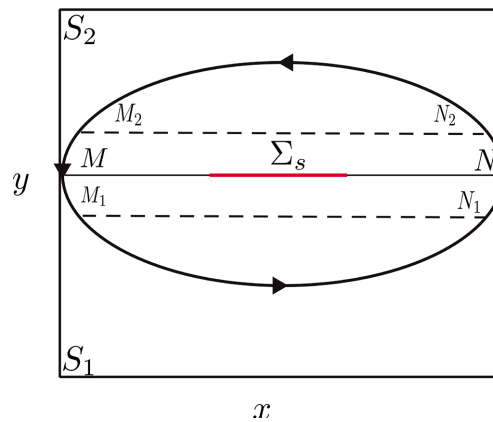


Figure 1. Schematic diagram of possible limit rings around the entire slip mode segment Σ_s .

图 1. 围绕整个滑模段 Σ_s 的可能极限环示意图

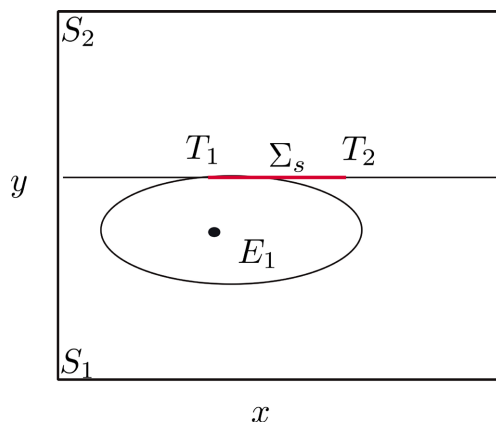


Figure 2. Schematic diagram of a possible limit ring around a partial slip mode segment Σ_s

图 2. 围绕部分滑模段 Σ_s 的可能极限环示意图

阈值 ET 的选取不同, 会直接导致系统平衡点呈现出不同的虚实状态, 基于这一特点, 下文将分多种情况进行具体分析。

首先我们令 $R_1 \doteq \frac{d(1-m)}{bck\left(1-\frac{p}{r}\right)}$, $R_2 \doteq \frac{d}{bck\left(1-\frac{p}{r}\right)}$, 那么可以得到 $R_1 < R_2$ 。

情形 1 当 $y_2 < ET < y_1$ 时, E_1 和 E_2 均变为虚平衡点, 则有以下结论成立。

定理 5.3 若 $y_2 < ET < y_1$, 则伪平衡点 E_p 是全局渐近稳定的。

证明 当 $y_2 < ET < y_1$ 时, E_1 和 E_2 都为虚平衡点。由式(4.1)的性质知 $f(x_1) > 0$, $\psi(x_2) < 0$, 此时函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上存在唯一零点, 即存在唯一的伪平衡点 E_p 且是局部稳定的。且由引理 5.1 与 5.2 可知系统(2.1)不存在极限环。因此无论 S_1 还是 S_2 中的轨线最终都将达到滑模段趋于伪平衡点 E_p , 因此伪平衡点 E_p 是全局渐近稳定的, 如图 3 所示。证毕。

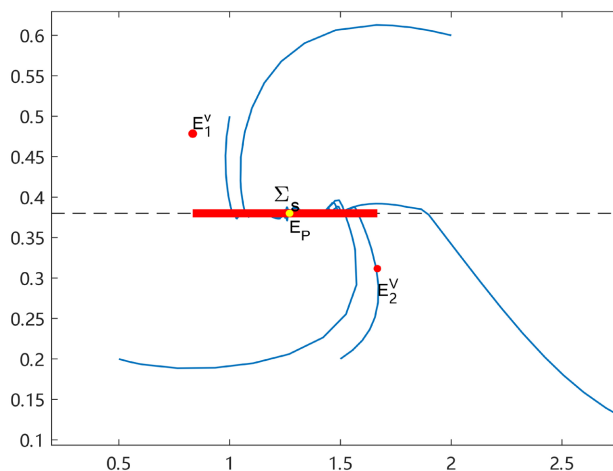


Figure 3. Global asymptotic stabilization diagram for the pseudo-equilibrium point E_p , where $r=0.6, K=4, e=0.8, b=0.3, c=0.4, d=0.2, m=0.5, p=0.2, ET=0.38$

图 3. 伪平衡点 E_p 的全局渐近稳定图, 其中 $r=0.6, K=4, e=0.8, b=0.3, c=0.4, d=0.2, m=0.5, p=0.2, ET=0.38$

情形 2 当 $y_2 < y_1 < ET$ 时, 存在实平衡点 E_1 , 虚平衡点 E_2 。此时, 系统(2.1)存在实平衡点在 S_1 区域内, 且伪平衡点不存在, 则有以下结论成立。

定理 5.4 若 $y_2 < y_1 < ET$, 且 $R_1 < 1$, 则实平衡点 E_1 是全局渐近稳定的。

证明 当 $y_2 < y_1 < ET$ 时, E_1 为实平衡点, 且 E_1 是子系统 S_1 的全局渐近稳定的平衡点。由式(4.1)的性质知 $f(x_1) < 0$, $f(x_2) < 0$, 故在区间 $[x_1, x_2]$ 上, $f(x) < 0$, 这说明伪平衡点 E_p 不存在。当 $R_1 > 1$ 时边界平衡点 E_{12} 为不稳定的平衡点, 又由引理 5.1 和 5.2 知系统(2.1)内不存在极限环, 所以 S_2 中的轨线无论是否碰撞滑模段最终趋于 S_1 , 而 S_1 中的轨线将趋于 E_1 , 由定理 3.2 知 E_1 全局渐近稳定。故无论初始位置如何, 轨迹最终会收敛到 E_1 , 故 E_1 全局渐近稳定, 如图 4(a)所示。证毕。

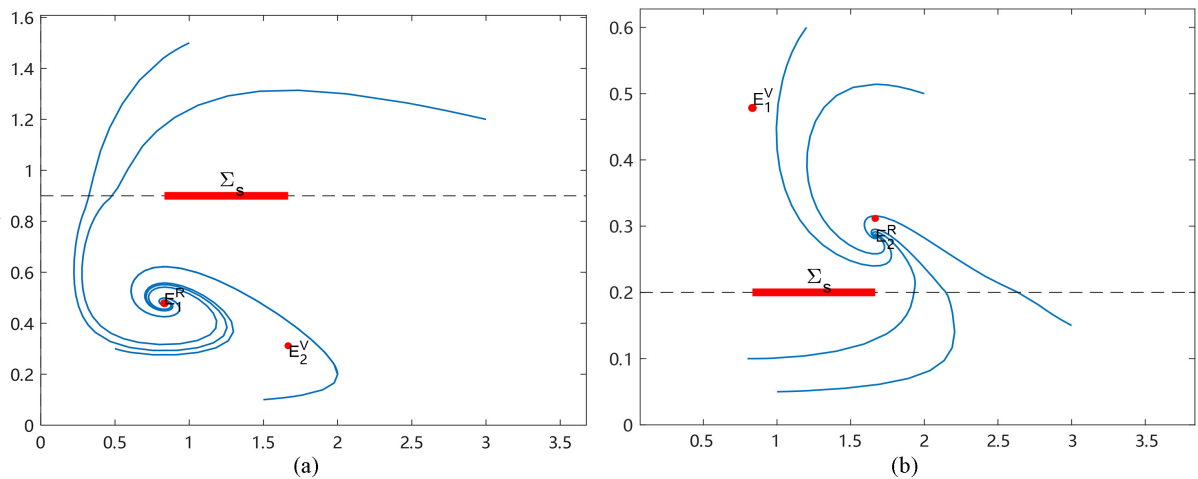


Figure 4. Global asymptotic stability diagrams for the system (2.1) for the two cases, (a) $ET = 0.9$, (b) $ET = 0.2$, respectively, with the other parameters $r = 0.6$, $K = 4$, $e = 0.8$, $b = 0.3$, $c = 0.4$, $d = 0.2$, $m = 0.5$, $p = 0.2$

图 4. 系统(2.1)分别在(a) $ET = 0.9$, (b) $ET = 0.2$ 两种情况下的全局渐近稳定图, 其它参数为 $r = 0.6$, $K = 4$, $e = 0.8$, $b = 0.3$, $c = 0.4$, $d = 0.2$, $m = 0.5$, $p = 0.2$

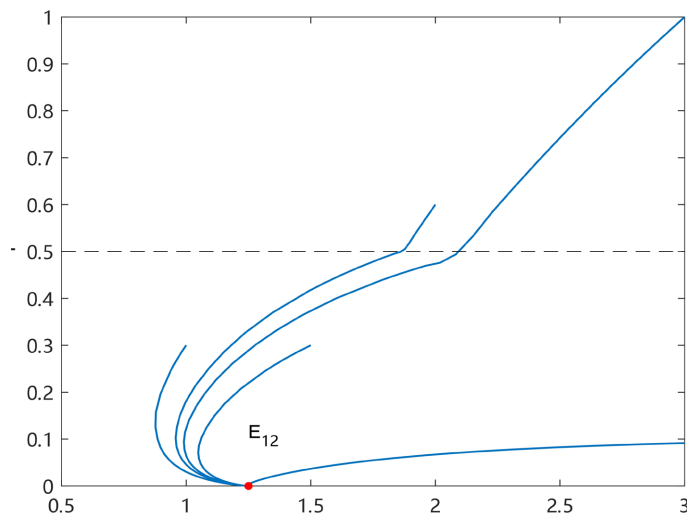


Figure 5. Global asymptotic stabilization diagram for the pseudo-equilibrium point E_{12} , where $r = 0.8$, $K = 5$, $e = 0.5$, $b = 0.15$, $c = 0.3$, $d = 0.9$, $m = 0.7$, $p = 0.6$, $ET = 0.5$

图 5. 边界平衡点 E_{12} 的全局渐近稳定图, 其中 $r = 0.8$, $K = 5$, $e = 0.5$, $b = 0.15$, $c = 0.3$, $d = 0.9$, $m = 0.7$, $p = 0.6$, $ET = 0.5$

情形 3 当 $ET < y_2 < y_1$ 时, 存在虚平衡点 E_1 , 实平衡点 E_2 。此时, 系统(2.1)存在实平衡点在 S_2 区域内, 且伪平衡点不存在, 则有以下结论成立。

定理 5.5 若 $ET < y_2 < y_1$, 且 $R_2 < 1$ 则实平衡点 E_2 是全局渐近稳定的。

证明 当 $ET < y_2 < y_1$ 时, E_2 为实平衡点, 且 E_2 是子系统 S_2 的全局渐近稳定的平衡点。由式(4.1)的性质知 $f(x_1) > 0$, $f(x_2) > 0$, 故在区间 $[x_1, x_2]$ 上, $f(x) > 0$, 这说明伪平衡点 E_p 不存在。又因为当 $R_2 < 1$ 时边界平衡点 E_{12} 是不稳定的平衡点, 由引理 5.1 和 5.2 知系统(2.1)内不存在极限环, 所以 S_1 中的轨线无论是否碰撞滑模段最终趋于 S_2 , 而 S_2 中的轨线将趋于 E_2 , 由定理 3.4 知 E_2 全局渐近稳定。故无论初始位置如何, 轨迹最终会收敛到 E_2 , 故 E_2 全局渐近稳定, 如图 4(b)所示。证毕。

定理 5.6 若 $R_1 > 1$ 时, 实平衡点 E_{12} 是全局渐近稳定的。

证明 由于 $1 < R_1 < R_2$, 由前面内容可知, 此时不存在实平衡点 E_1 与 E_2 , 系统(2.2)与系统(2.3)的解轨线都会收敛到平衡点 E_{12} , 在 $1 < R_1 < R_2$ 条件下, 我们可以通过式子(4.1)计算出

$$f(x_1) = x_1 \frac{b + be(y_1 + ET) + pe}{1 + eET} (y_1 - ET) < 0, \quad f(x_2) = x_2 \frac{b + be(y_2 + ET) + pe}{1 + eET} (y_2 - ET) < 0$$

这表明此时系统不存在伪平衡点, 根据该系统(2.2)不存在极限环且解具有有界性, 由此可以判断平衡点 E_{12} 是全局渐近稳定的。如图 5 所示。证毕。

6. 边界平衡点分支

在含阈值控制策略的 Filippov 害虫 - 天敌系统中, 边界平衡点分支是指当关键控制参数(如天敌密度阈值 ET 、杀虫剂杀死率 p 等)连续变化并跨越某一临界值时, 系统的实平衡点与切换线上的切点或边界平衡点发生碰撞、融合或消失, 进而导致系统全局动力学行为发生定性突变的现象。本章以 ET 和 p 为主要分支参数, 系统研究 Filippov 系统(2.1)的边界结点分支与切向分支, 解析推导分支发生的临界条件, 并通过分支图清晰展示系统稳定状态随参数变化的转换路径。

6.1. 分支临界条件的解析推导

根据第 4~5 章的分析, 系统的动力学行为依赖于实平衡点 E_1 、 E_2 与切换线 $\Sigma: y = ET$ 的相对位置, 以及伪平衡点 E_p 的存在性。记:

$$x_1 = \frac{d(1-m)}{bc}, \quad x_2 = \frac{d}{bc}$$

$$y_1 = \frac{-(b+ep) + \sqrt{(b+ep)^2 - 4eb \left(p - r \left(1 - \frac{x_1}{K} \right) \right)}}{2eb}$$

$$y_2 = \frac{-(b+ep) + \sqrt{(b+ep)^2 - 4eb \left(p - r \left(1 - \frac{x_2}{K} \right) \right)}}{2eb}$$

系统发生边界平衡点分支的临界条件主要包括以下两类:

(1) 边界平衡点分支条件

当 $ET = y_1$ 时, 子系统 S_1 的全局渐近稳定实平衡点 E_1 恰好落在切换线 Σ 上, 成为边界平衡点。当 ET 由小于 y_1 变为大于 y_1 时, E_1 由虚平衡点转变为实平衡点(或反之), 系统全局稳定平衡点从滑模段上的伪平衡点 E_p 切换为 S_1 区域内的实平衡点 E_1 。

同理, 当 $ET = y_2$ 时, 子系统 S_2 的实平衡点 E_2 落在切换线 Σ 上, 发生边界结点分支。

(2) 切向分支条件

记滑模动力学方程(4.1)为 $\frac{dx}{dt} = f(x)$, 其中 $f(x) = \frac{rx}{1+eET} \left(1 - \frac{x}{K}\right) - bETx - px$ 。切点 $T_1 = (x_1, ET)$ 和 $T_2 = (x_2, ET)$ 位于滑模区域 Σ_s 的边界。当伪平衡点 E_p 与切点 T_1 或 T_2 碰撞时, 发生切向分支, 其临界条件为 $f(x_1) = 0$ 或 $f(x_2) = 0$, 即:

$$x_1 \frac{b + be(y_1 + ET) + pe}{1 + eET} (y_1 - ET) = 0 \text{ 或 } x_2 \frac{b + be(y_2 + ET) + pe}{1 + eET} (y_2 - ET) = 0$$

由于 $x_1, x_2 > 0$, 上述条件等价于 $ET = y_1$ 或 $ET = y_2$ 。这说明在本模型中, 切向分支与边界结点分支在同一临界参数值处同时发生, 属于典型的边界焦点分支。

此外, 杀虫剂杀死率 p 的变化会改变 x_1 、 x_2 、 y_1 、 y_2 的值, 从而影响分支临界点的位置。对 y_1 、 y_2 关于 p 求偏导可得:

$$\frac{\partial y_1}{\partial p} < 0, \quad \frac{\partial y_2}{\partial p} < 0$$

这意味着增加农药杀死率 p 会同时降低临界阈值 y_1 和 y_2 , 使系统更早进入“化学防治主导”的参数区域。

6.2. 分支图与数值验证

(1) 一维分支图(以 ET 为分支参数)

固定参数: $r = 0.6$, $K = 4$, $e = 0.8$, $b = 0.3$, $c = 0.4$, $d = 0.2$, $m = 0.5$, $p = 0.2$ 。计算得分支临界值: $y_2 \approx 0.2840$, $y_1 \approx 0.4784$

当 ET 由小到大变化时, 系统的全局渐近稳定状态呈现如下三支转换规律:

- 当 $0 < ET < y_2$ 时: 实平衡点 E_2 全局渐近稳定(S_2 区域主导);
- 当 $y_2 < ET < y_1$ 时: 伪平衡点 E_p 全局渐近稳定(滑模控制主导);
- 当 $ET > y_1$ 时: 实平衡点 E_1 全局渐近稳定(S_1 区域主导)。

(2) 数值模拟验证

选取图 6 所示四组 ET 值(0.2, 0.2840, 0.4784, 0.6), 分别对应上述三个分支阶段及分支临界点:

- 图 6(a) $ET = 0.2 < y_2$: 轨线收敛于 E_2 , 实平衡点稳定;
- 图 6(b) $ET = 0.2840 = y_2$: 边界平衡点分支发生, 系统处于临界状态;
- 图 6(c) $ET = 0.4784 = y_1$: 另一边平衡点分支发生;
- 图 6(d) $ET = 0.6 > y_1$: 轨线收敛于 E_1 , 实平衡点稳定。

数值结果与分支分析理论预测完全一致, 验证了分支临界条件的正确性。

6.3. 分支的生物学意义

从害虫综合治理的角度看, 边界平衡点分支揭示了以下重要规律:

- 当 ET 取值在 (y_2, y_1) 区间时, 系统自然收敛到滑模段上的伪平衡点 E_p , 此时天敌密度稳定在阈值附近, 无需额外干预即可实现害虫的可持续控制, 这是 IPM 的理想状态;
- 当 ET 过低时 ($ET < y_2$), 天敌密度难以维持, 系统依赖 S_2 区域的平衡点, 实际控制效果较差;
- 当 ET 过高时 ($ET > y_1$), 天敌密度充足, 系统进入 S_1 区域的生物防治主导模式, 亦为理想状态。

因此, 合理设定阈值 ET 使其落入 (y_2, y_1) 或大于 y_1 的范围, 是保障害虫可持续治理的关键。同时, 控制农药杀死率 p 不宜过高, 以免压缩滑模控制的有效窗口。

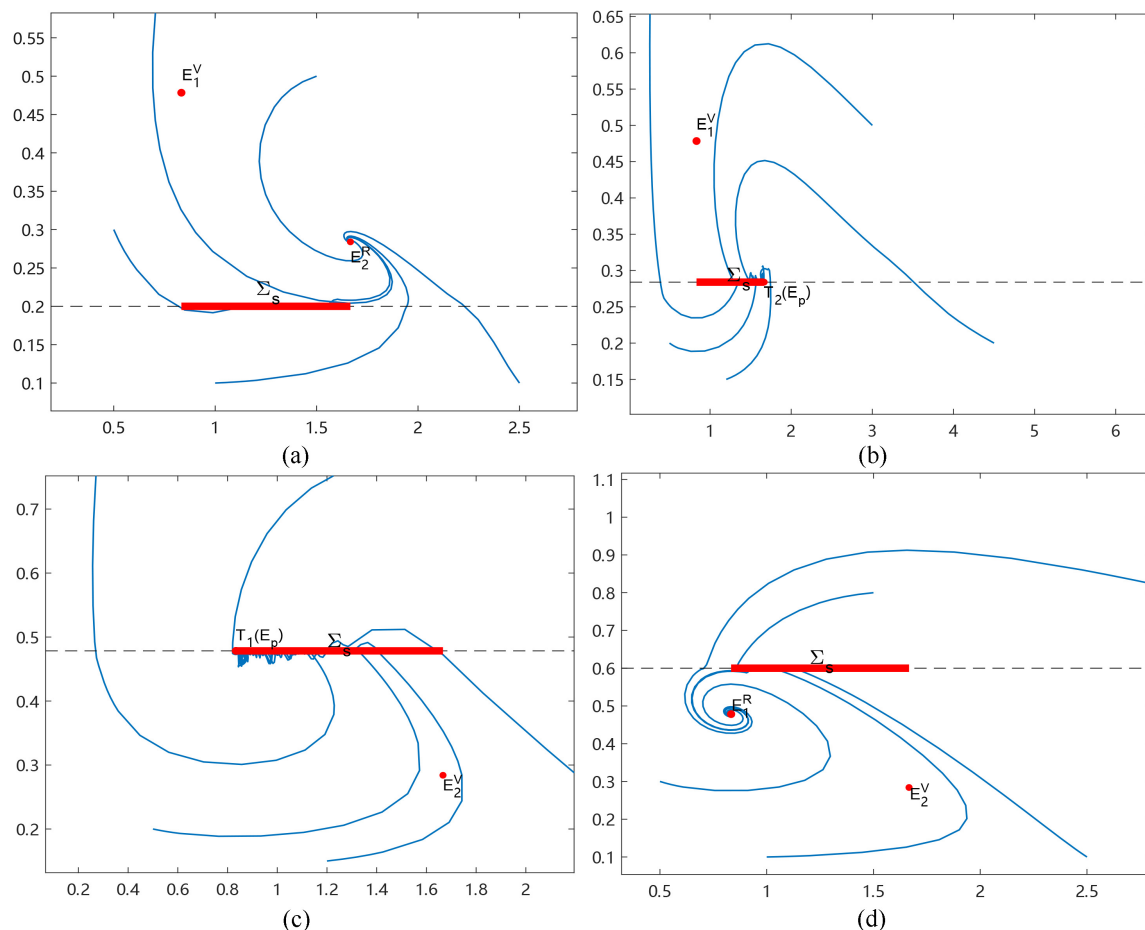


Figure 6. Global asymptotic stability diagrams for the system (2.1) for the four cases (a) $ET = 0.2$, (b) $ET = 0.2840$, (c) $ET = 0.4784$, (d) $ET = 0.6$, respectively, with the other parameters $r = 0.6$, $K = 4$, $e = 0.8$, $b = 0.3$, $d = 0.2$, $m = 0.5$, $p = 0.2$, $c = 0.3$

图 6. 系统(2.1)分别在(a) $ET = 0.2$, (b) $ET = 0.2840$, (c) $ET = 0.4784$, (d) $ET = 0.6$, 两种情况下的全局渐近稳定图, 其它参数为 $r = 0.6$, $K = 4$, $e = 0.8$, $b = 0.3$, $c = 0.3$, $d = 0.2$, $m = 0.5$, $p = 0.2$

7. 结论

本文研究的主要目的是研究控制策略对天敌捕食害虫的影响, 使用非光滑 Filippov 的定性分析和数值模拟来研究所提出的 Filippov 系统的动力学, 并指出化学防治和生物防治对害虫治理的作用。利用 Filippov 系统相关的定性分析理论得到平衡点的类型和滑模区域, 并对子系统动力学和滑模动力学进行了分析。在平衡点存在的情况下, 第五节中对实平衡点和伪平衡点的全局稳定性进行了分析。并讨论了在 $y_2 < ET < y_1$, $y_2 < y_1 < ET$ 和 $ET < y_2 < y_1$ 三种情形下实平衡点的存在性和全局稳定性。当 $y_2 < ET < y_1$ 时, 伪平衡点 E_p 是全局渐近稳定的; 当 $y_2 < y_1 < ET$ 时, 平衡点 E_1 是全局渐近稳定的; 当 $ET < y_2 < y_1$ 时, 平衡点 E_2 是全局渐近稳定的。前两种情况表明害虫的数量稳定在阈值 ET 处或在阈值 ET 以下, 能够避免害虫数量爆发。研究表明, 控制可变参数 $p-ET$, 即增加天敌的投放量和改变阈值 ET 能够避免害虫数量暴发对农作物造成经济影响和破坏生态环境, 从而为害虫综合治理提供策略。

参考文献

- [1] Qin, W., Tan, X., Tosato, M. and Liu, X. (2019) Threshold Control Strategy for a Non-Smooth Filippov Ecosystem with

- Group Defense. *Applied Mathematics and Computation*, **362**, Article 124532.
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.06.046>
- [2] Chen, C. and Chen, X. (2018) Rich Sliding Motion and Dynamics in a Filippov Plant-Disease System. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **28**, Article 1850012. <https://doi.org/10.1142/s0218127418500128>
 - [3] Chen, C., Li, C. and Kang, Y. (2018) Modelling the Effects of Cutting off Infected Branches and Replanting on Fire-Blight Transmission Using Filippov Systems. *Journal of Theoretical Biology*, **439**, 127-140.
<https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2017.11.017>
 - [4] Chen, C., Kang, Y. and Smith, R. (2018) Sliding Motion and Global Dynamics of a Filippov Fire-Blight Model with Economic Thresholds. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **39**, 492-519.
<https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2017.08.002>
 - [5] Zhao, T., Xiao, Y. and Smith, R.J. (2013) Non-Smooth Plant Disease Models with Economic Thresholds. *Mathematical Biosciences*, **241**, 34-48. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2012.09.005>
 - [6] Wang, J., Zhang, F. and Wang, L. (2016) Equilibrium, Pseudoequilibrium and Sliding-Mode Heteroclinic Orbit in a Filippov-Type Plant Disease Model. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **31**, 308-324.
<https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2016.01.017>
 - [7] Guo, Z., Huang, L. and Zou, X. (2013) Impact of Discontinuous Treatments on Disease Dynamics in an SIR Epidemic Model. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **9**, 97-110.
 - [8] Kong, F. and Nieto, J. (2020) Impact of Discontinuous Treatments on the Generalized Epidemic Model. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **56**, 349-378.
 - [9] Li, W., Huang, L. and Ji, J. (2019) Periodic Solution and Its Stability of a Delayed Beddington-Deangelis Type Predator-Prey System with Discontinuous Control Strategy. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **42**, 4498-4515.
<https://doi.org/10.1002/mma.5673>
 - [10] Duan, L., Huang, L. and Chen, Y. (2015) Global Exponential Stability of Periodic Solutions to a Delay Lasota-Ważewska Model with Discontinuous Harvesting. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **144**, 561-573.
<https://doi.org/10.1090/proc12714>
 - [11] Qin, W., Tan, X., Shi, X., Chen, J. and Liu, X. (2019) Dynamics and Bifurcation Analysis of a Filippov Predator-Prey Ecosystem in a Seasonally Fluctuating Environment. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **29**, Article 1950020.
<https://doi.org/10.1142/s0218127419500202>
 - [12] 马知恩, 周义仓, 李承治. 常微分方程定性及稳定性方法[M]. 第2版. 北京: 科学出版社, 2015.
 - [13] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 董镇喜. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985.
 - [14] 黄立宏, 王佳伏. 右端不连续微分方程模型及其动力学分析[M]. 北京: 科学出版社, 2021.