

基于比例边界坐标高阶完备多边形单元的二维线弹性方程数值求解

张思盈, 孟 杨, 张 莹*

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2026年6月21日; 录用日期: 2026年7月15日; 发布日期: 2026年7月21日

摘 要

针对多边形网格下二维线弹性问题的高阶离散需求, 本文研究基于比例边界坐标的高阶完备多边形单元数值方法。首先, 介绍比例边界坐标变换下具有高阶多项式完备的多边形单元插值基函数; 其次, 推导二维线弹性方程的弱形式, 建立相应的半离散Galerkin格式与全离散 θ 差分格式, 并给出质量矩阵、刚度矩阵和载荷向量的离散表达; 进一步地, 对非稳态问题引入 θ 差分格式, 并在相应假设下给出全离散格式的稳定性估计。最后, 通过稳态与非稳态数值实验, 比较2DSBd2和2DSBd3单元在 L^∞ 范数、 L^2 范数和 H^1 半范数下的误差与收敛行为。数值结果表明, 所构造方法具有良好的精度和收敛性。上述结果说明, 基于比例边界坐标的高阶完备多边形单元可为二维线弹性方程的数值求解提供一种有效的离散途径。

关键词

比例边界坐标, 线弹性方程, 多边形单元, Galerkin方法, θ 差分格式

Numerical Method of Polygonal Elements for Two-Dimensional Linear Elasticity Equations Based on Scaled Boundary Coordinates

Siying Zhang, Yang Meng, Ying Zhang*

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: June 21, 2026; accepted: July 15, 2026; published: July 21, 2026

*通讯作者。

文章引用: 张思盈, 孟杨, 张莹. 基于比例边界坐标高阶完备多边形单元的二维线弹性方程数值求解[J]. 应用数学进展, 2026, 15(7): 186-201. DOI: 10.12677/aam.2026.157315

Abstract

For the high-order discrete solution of two-dimensional linear elasticity problems on polygonal meshes, this paper studies a high-order complete polygonal element numerical method based on scaled boundary coordinates. First, polygonal element interpolation basis functions with high-order polynomial completeness under the scaled boundary coordinate transformation are introduced. Then, the weak form of the two-dimensional linear elasticity equations is derived, and the corresponding semi-discrete Galerkin formulation and fully discrete θ -difference scheme are established. The discrete expressions of the mass matrix, stiffness matrix, and load vector are also presented. Furthermore, for transient problems, a θ -difference scheme is introduced, and a stability estimate for the fully discrete formulation is given under suitable assumptions. Finally, steady-state and transient numerical experiments are carried out to compare the errors and convergence behavior of the 2DSBd2 and 2DSBd3 elements in the L^∞ -norm, L^2 -norm, and H^1 -seminorm. The numerical results show that the constructed method has good accuracy and convergence properties. These results indicate that high-order complete polygonal elements based on scaled boundary coordinates provide an effective discretization approach for the numerical solution of two-dimensional linear elasticity equations.

Keywords

Scaled Boundary Coordinates, Linear Elasticity Equation, Polygonal Element, Galerkin Method, θ -Difference Scheme

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

线弹性方程是固体力学和结构力学中的基本模型之一，常用于描述弹性体在小变形假设下的位移、应变和应力分布。在结构静力分析、结构动力响应、材料力学以及弹性波传播等问题中，线弹性方程都具有重要应用。有限元法是求解线弹性问题的经典数值方法，其基本思想是将连续区域离散为若干简单单元，并通过局部基函数构造近似解，从而将偏微分方程转化为代数方程组或常微分方程组[1] [2]。

传统有限元方法通常采用三角形、四边形等规则单元。在规则区域和常规网格上，这类方法已经形成了成熟的理论体系和计算框架。然而，在复杂几何区域、局部加密网格、裂纹扩展或边界变化等问题中，仅依赖三角形或四边形单元可能导致网格重构困难、单元质量下降以及计算精度不稳定等问题。因此，发展能够适应复杂几何形状的多边形单元成为有限元方法中的一个重要方向。多边形单元具有较强的网格适应性，可以更加灵活地处理复杂边界、非结构网格以及局部加密区域[3] [4]。

围绕多边形单元的构造，已有许多数值方法被提出，例如基于广义重心坐标的多边形有限元、虚单元法以及比例边界有限元方法等[3]-[5]。其中，虚单元法可以在一般多边形网格上构造离散格式，但其局部基函数通常不显式给出，需要通过投影算子和稳定化项构造离散双线性型。相比之下，比例边界有限元方法(Scaled Boundary Finite Element Method, SBFEM)是一种结合有限元法和边界元法特点的半解析数值方法。该方法在单元内部选取比例中心，仅对单元边界进行离散，并通过径向坐标将边界上的离散信息延拓到单元内部，因此能够较自然地处理多边形单元、复杂边界以及局部奇异问题[6]-[8]。

经典 SBFEM 的一个重要特点是形函数不是预先给定的, 而是通过控制方程导出的二阶常微分方程系统或 Hamilton 矩阵的特征值分解得到。对于齐次问题, 这种半解析形式具有较高精度; 但对于非齐次问题, 为了保证高阶完备性, 通常还需要引入与体力项相关的 bubble 函数, 从而增加额外自由度并带来实现上的复杂性。近年来, Zhang 和 Li 基于比例边界坐标提出了具有高阶多项式完备性的多边形和多面体单元构造方法。该方法利用比例边界坐标下多项式可以表示为径向幂函数与边界插值函数乘积的性质, 直接构造显式插值基函数, 不需要传统 SBFEM 中的特征值分解, 也不依赖额外的体力附加函数[9]。

在线弹性问题方面, Gravenkamp 和 Natarajan 将比例边界多边形单元用于线弹性动力学计算, 说明 SBFEM 多边形单元能够较好地适应线弹性问题中的多边形离散形式, 并且可以灵活选取边界插值阶数[10]。受上述工作的启发, 本文将基于比例边界坐标的高阶完备多边形单元用于二维线弹性方程的数值离散, 本文研究二维线弹性方程的多边形单元 Galerkin 数值方法。

基于上述研究背景, 本文将基于比例边界坐标的高阶完备多边形单元用于二维线弹性方程的数值求解。需要说明的是, 本文并非重新提出高阶完备多边形显式基函数构造, 而是在已有单元构造基础上, 建立二维线弹性方程的半离散 Galerkin 格式和非稳态问题的全离散 θ 差分格式, 并通过稳态与非稳态算例考察二阶和三阶单元的误差与收敛表现。全文结构如下: 第 2 节介绍比例边界坐标和高阶完备多边形插值基函数; 第 3 节建立二维线弹性方程的半离散与全离散格式, 并给出稳定性估计; 第 4 节给出数值实验与结果分析; 第 5 节总结全文。

2. 比例边界坐标表示下的高阶完备的多边形单元

2.1. 比例边界坐标

对于二维比例边界坐标, 我们考虑将定义域离散为 n 边的多边形元素 K , 这些多边形需要满足比例要求: 比例中心 $O(x_0, y_0)$ 对多边形的边界直接可见, 即比例中心 $O(x_0, y_0)$ 和边界点 $V_1(x_1, y_1), V_2(x_2, y_2)$ 的连线在多边形内部。图 1 描述了一个多边形的比例边界坐标 (ξ, η) , 其中径向坐标 ξ 在比例中心取值为 0, 在边界上取值为 1, 环向坐标 η 的取值范围为 $[-1, 1]$ 。

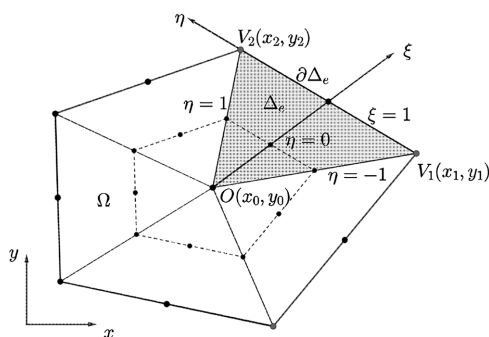


Figure 1. Scaled boundary coordinates in a triangle
图 1. 三角形中比例边界坐标

多边形内部的任意一点 (x, y) 可以由比例坐标 (ξ, η) 表示为

$$\begin{cases} x = x_0 + \xi(\mathbf{x}_b(\eta) - x_0) = x_0 + \xi(\mathbf{L}(\eta)\mathbf{x}_b - x_0), \\ y = y_0 + \xi(\mathbf{y}_b(\eta) - y_0) = y_0 + \xi(\mathbf{L}(\eta)\mathbf{y}_b - y_0), \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x}_b = [x_1, x_2, \dots, x_p]^T$ 和 $\mathbf{y}_b = [y_1, y_2, \dots, y_p]^T$ 为节点坐标, $\mathbf{L}(\eta) = [L_1(\eta), L_2(\eta), \dots, L_p(\eta)]^T$ 为一维的线单元上的形函数。关于比例坐标系统 (ξ, η) 的偏导数计算为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \xi \end{bmatrix} \mathbf{J}_b(\eta) \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中, $\mathbf{J}_b(\eta)$ 为边界 Jacobian 矩阵

$$\mathbf{J}_b(\eta) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_b(\eta) - x_0 & \mathbf{y}_b(\eta) - y_0 \\ \mathbf{x}'_b(\eta) & \mathbf{y}'_b(\eta) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

由(2)和(3)可得关于笛卡尔坐标 x 和 y 偏导数为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}_b(\eta)|} \begin{bmatrix} \mathbf{y}'_b(\eta) & -(\mathbf{y}_b(\eta) - y_0) \\ -\mathbf{x}'_b(\eta) & \mathbf{x}_b(\eta) - x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix},$$

其中 Jacobian 矩阵 $\mathbf{J}_b(\eta)$ 行列式为

$$|\mathbf{J}_b(\eta)| = (\mathbf{x}_b(\eta) - x_0) \mathbf{y}'_b(\eta) - (\mathbf{y}_b(\eta) - y_0) \mathbf{x}'_b(\eta).$$

2.2. 高阶完备的多边形单元上的插值函数

2.2.1. 多项式完备空间

记平移后的坐标为 $\bar{x} = x - x_0$, $\bar{\mathbf{x}}_b = \mathbf{x}_b - x_0$, $\bar{y} = y - y_0$, $\bar{\mathbf{y}}_b = \mathbf{y}_b - y_0$, 则比例边界坐标变换(1)可写为

$$\begin{cases} \bar{x} = \xi \mathbf{L}(\eta) \bar{\mathbf{x}}_b, \\ \bar{y} = \xi \mathbf{L}(\eta) \bar{\mathbf{y}}_b. \end{cases}$$

为说明插值空间的多项式完备性, 记 $\mathbf{P}_m(\mathbb{R}^2)$ 为单元 K 上总次数不超过 m 的多项式空间, $\mathbf{P}_l^h(\mathbb{R}^2)$ 为次数恰为 l ($l = 0, 1, \dots, m$) 的齐次多项式空间, 则有

$$\mathbf{P}_m(\mathbb{R}^2) = \mathbf{P}_0^h(\mathbb{R}^2) \oplus \mathbf{P}_1^h(\mathbb{R}^2) \oplus \dots \oplus \mathbf{P}_m^h(\mathbb{R}^2).$$

在每个多边形单元上, 任意二元齐次多项式 $p_l(x, y) \in \mathbf{P}_l^h(\mathbb{R}^2)$ 可以表示为

$$p_l(\bar{x}, \bar{y}) = p_l(\xi \mathbf{L}(\eta) \bar{\mathbf{x}}_b, \xi \mathbf{L}(\eta) \bar{\mathbf{y}}_b) = \xi^l \cdot p_l(\mathbf{L}(\eta) \bar{\mathbf{x}}_b, \mathbf{L}(\eta) \bar{\mathbf{y}}_b) = \xi^l \cdot \left\{ p_l(x, y) \right\}_{\xi=1}, \quad (4)$$

特别地, 当 $\xi = 1$ 时有

$$p_l(x, y) \Big|_{\xi=1} = \mathbf{L}(\eta) \mathbf{p}_{bl} = [L_1(\eta), L_2(\eta), \dots, L_{mn}(\eta)] \begin{bmatrix} p_l(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \\ p_l(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \\ \vdots \\ p_l(\bar{x}_{mn}, \bar{y}_{mn}) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$\mathbf{p}_{bl}$ 表示多项式 $p_l(x, y)$ 在每个线性单元的插值节点 $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ 处的取值。其中 n 为多边形的边数量, m 为每条边的插值阶数。 $N = mn$ 为整个多边形边界上的节点总数。

由(4)和(5)可知对于任意的 $x^i y^i \in \mathbf{P}_l^h(\mathbb{R}^2)$ 有

$$x^i y^i = \xi^l \mathbf{L}(\eta) \phi_{ij} = \xi^l [L_1(\eta), L_2(\eta), \dots, L_{mn}(\eta)] \begin{bmatrix} \bar{x}_1^i \bar{y}_1^j \\ \bar{x}_2^i \bar{y}_2^j \\ \vdots \\ \bar{x}_{mn}^i \bar{y}_{mn}^j \end{bmatrix},$$

由于 $P_l^h(\mathbb{R}^2) = \text{span}\{x^i y^j, i+j=l\}$, 则多项式 $p(x, y) = \sum_{l=0}^m p_l(x, y) = \sum_{l=0}^m \sum_{i+j=l} a_{ij} x^i y^j \in P_m(\mathbb{R}^2)$ 可通过比例边界坐标 (ξ, η) 表示为

$$p(x, y) = p(\xi, \eta) = \sum_{l=0}^m \sum_{i+j=l} a_{ij} \xi^l L(\eta) \phi_{ij},$$

其中 $\phi_{ij} = [\bar{x}_1^i \bar{y}_1^j, \bar{x}_2^i \bar{y}_2^j, \dots, \bar{x}_{mn}^i \bar{y}_{mn}^j]^T$ 为单项式 $x^i y^j$ 在边界插值节点处的取值向量。由此可构造包含 $P_l^h(\mathbb{R}^2)$ 的插值空间

$$P_m(\mathbb{R}^2) = \text{span}\{\xi^l L(\eta) \phi_{ij} | i+j=l, l=0, 1, 2, \dots, m\}. \quad (6)$$

2.2.2. 显式插值基函数

对于上述空间 $P_m(\mathbb{R}^2) = \text{span}\{\xi^l L(\eta) \phi_{ij} | i+j=l, l=0, 1, 2, \dots, m\}$ 共有 $\rho = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$ 个基函数, 将所有单项式在边界节点上的取值按列排列, 得到列满秩矩阵

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_1 & \bar{y}_1 & \cdots & \bar{x}_1^m & \bar{x}_1^{m-1} \bar{y}_1 & \cdots & \bar{y}_1^m \\ 1 & \bar{x}_2 & \bar{y}_2 & \cdots & \bar{x}_2^m & \bar{x}_2^{m-1} \bar{y}_2 & \cdots & \bar{y}_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \bar{x}_N & \bar{y}_N & \cdots & \bar{x}_N^m & \bar{x}_N^{m-1} \bar{y}_N & \cdots & \bar{y}_N^m \end{bmatrix}_{N \times \rho}, \quad (7)$$

可表示为

$$\Phi_1 = \text{span}\{\phi_{00}, \phi_{10}, \phi_{01}, \dots, \phi_{m0}, \dots, \phi_{0m}\}.$$

由于边界插值节点总数 N 大于多项式空间 $P_m(\mathbb{R}^2)$ 的维数 ρ , 仅由多项式节点取值向量构成的矩阵 Φ_1 不能覆盖全部边界自由度, 因此需要通过正交分解补充剩下的 $N-\rho$ 个基函数,

$$\Phi_1^\perp = \text{span}\{q_{\rho+1}, q_{\rho+2}, \dots, q_N\},$$

其中为 q_k 在补充基函数 $\{\varphi_{\rho+1}, \varphi_{\rho+2}, \dots, \varphi_N\}$ 在边界节点处的取值, 即

$$q_k = [\varphi_k(\bar{x}_1, \bar{y}_1), \varphi_k(\bar{x}_2, \bar{y}_2), \dots, \varphi_k(\bar{x}_N, \bar{y}_N)]^T, k = \rho+1, \dots, N,$$

由于 $q_1, q_2, \dots, q_N$ 线性无关, 可据此构造边界节点基函数为 $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$

$$\{\varphi_{\rho+1}, \dots, \varphi_N\} = \{\xi^{\lambda_k} L(\eta) q_k, k = \rho+1, \dots, N\}. \quad (8)$$

其中 λ_k 为任意非负实数。

由(6)和(7)可知 $P_m(\mathbb{R}^2) \subset V_K^m$, 因此单元 K 上的插值空间 V_K^m 具有 m 阶多项式完备性。于是 K 上的 V_K^m 可完善为

$$\begin{aligned} V_K^m &:= \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_\rho, \varphi_{\rho+1}, \dots, \varphi_N\} \\ &= \text{span}\{\xi^l L(\eta) \phi_{ij}, \xi^{\lambda_k} L(\eta) q_k | i+j=l, l=0, 1, 2, \dots, m; \lambda_k \in \mathbf{R}^+ \cup \{0\}, k = \rho+1, \dots, N\}. \end{aligned}$$

对于任意向量 $u \in V_K^m$ 可唯一地表示为幂函数的线性组合

$$u(\xi, \eta) = \sum_{l=1}^N \tilde{c}_l \varphi_l = \sum_{l=0}^m \sum_{i+j=l} c_{ij} \xi^l L(\eta) \phi_{ij} + \sum_{k=\rho+1}^N c_k \xi^{\lambda_k} L(\eta) q_k, \quad (9)$$

其中常数 $c_{ij} = \tilde{c}_l (i+j=l, l=0, \dots, m; t=1, \dots, d)$ 和 $c_k = \tilde{c}_l (k, t=d+1, \dots, N)$ 是基函数的系数。

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= [\phi_{00}, \phi_{10}, \phi_{01}, \dots, \phi_{m0}, \dots, \phi_{0m}], \\
\Phi_2 &= [\mathbf{q}_{\rho+1}, \mathbf{q}_{\rho+2}, \dots, \mathbf{q}_N], \\
\Lambda_1 &= \text{diag}(0, 1, 1, 2, 2, \dots, m, \dots, m), \\
\Lambda_2 &= \text{diag}(\lambda_{\rho+1}, \lambda_{\rho+2}, \dots, \lambda_N), \\
C_1 &= [\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_\rho]^T = [c_{00}, c_{10}, c_{01}, \dots, c_{m0}, \dots, c_{0m}]^T, \quad C_2 = [\tilde{c}_{\rho+1}, \tilde{c}_{\rho+2}, \dots, \tilde{c}_N]^T = [c_{\rho+1}, c_{\rho+2}, \dots, c_N]^T.
\end{aligned}$$

则(9)中的二元函数 $u(\xi, \eta)$ 可表示为

$$u(\xi, \eta) = L(\eta) \Phi \xi^\Lambda C, \quad (10)$$

其中

$$\Phi = [\Phi_1, \Phi_2], \quad (11)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \\ & \Lambda_2 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

特别地, 当 $\xi = 1$ 时, ξ^Λ 为单位阵 I 。将 $\xi = 1$ 代入(13)得

$$u(\xi = 1, \eta) = L(\eta) \Phi C,$$

则有

$$C = \Phi^{-1} u_h. \quad (14)$$

其中边界节点值 $u_h = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$ 。

由(10)和(14)得到元素 K 上插值基函数为

$$I_k(\xi, \eta) = L(\eta) \Phi \xi^\Lambda \Phi^{-1}.$$

在不添加泡函数的情况下 $I_k(\xi, \eta)$ 具有 m 阶多项式完备性。

2.2.3. 二阶与三阶单元

当 $m = 2$ 时, 具有二阶多项式完备性的插值基函数可写为

$$I_K^{(2)}(\xi, \eta) = L^{(2)}(\eta) \Phi^{(2)} \xi^{\Lambda^{(2)}} \left(\Phi^{(2)} \right)^{-1} = L^{(2)}(\eta) \left[\Phi_1^{(2)}, \Phi_2^{(2)} \right] \begin{bmatrix} \xi^{\Lambda_1^{(2)}} \\ \xi^{\Lambda_2^{(2)}} \end{bmatrix} \left(\Phi^{(2)} \right)^{-1}$$

其中

$$\begin{aligned}
\Phi^{(2)} &= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{2n} & y_{2n} & x_{2n}^2 & x_{2n} y_{2n} & y_{2n}^2 \end{bmatrix}_{2n \times 6}, \\
\xi^{\Lambda_1^{(2)}} &= \text{diag}(\xi^0, \xi^1, \xi^1, \xi^2, \xi^2, \xi^2), \\
\xi^{\Lambda_2^{(2)}} &= \text{diag}(\underbrace{\xi^3, \xi^3, \dots, \xi^3}_{2n-6}),
\end{aligned}$$

此时的单元记为 2DSBd2。

当 $m=3$ 时, 具有三阶多项式完备性的插值基函数可写为

$$I_K^{(3)}(\xi, \eta) = L^{(3)}(\eta) \Phi^{(3)} \xi^{\Lambda^{(3)}} \left(\Phi^{(3)} \right)^{-1} = L^{(3)}(\eta) \left[\Phi_1^{(3)}, \Phi_2^{(3)} \right] \begin{bmatrix} \xi^{\Lambda_1^{(3)}} \\ \xi^{\Lambda_2^{(3)}} \end{bmatrix} \left(\Phi^{(3)} \right)^{-1},$$

其中

$$\Phi^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2 y_1 & x_1 y_1^2 & y_1^3 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2^3 & x_2^2 y_2 & x_2 y_2^2 & y_2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{3n} & y_{3n} & x_{3n}^2 & x_{3n} y_{3n} & y_{3n}^2 & x_{3n}^3 & x_{3n}^2 y_{3n} & x_{3n} y_{3n}^2 & y_{3n}^3 \end{bmatrix}_{3n \times 10},$$

$$\xi^{\Lambda_1^{(3)}} = \text{diag}(\xi^0, \xi^1, \xi^1, \xi^2, \xi^2, \xi^2, \xi^3, \xi^3, \xi^3, \xi^3),$$

$$\xi^{\Lambda_2^{(3)}} = \text{diag}(\underbrace{\xi^4, \xi^4, \dots, \xi^4}_{3n-10}),$$

此时的单元记为 2DSBd3。

与传统比例边界有限元方法相比, 该方法不再依赖隐式特征值分解来构造形函数, 而是直接给出显式插值基函数; 同时, 其高阶完备性由基函数空间本身保证, 不依赖额外的体力附加函数。因此, 该方法既保留了多边形网格处理复杂区域的灵活性, 又具有较好的高阶逼近能力, 适合用于线弹性方程等问题的数值离散。

3. 线弹性方程

3.1. 线弹性方程初边值问题

对于各向同性材料, 设弹性体 $\Omega \in \mathbb{R}^2$ 为具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, 设 $\Gamma_D \subseteq \partial\Omega$ 为位移边界, 在 Γ_D 上给定 Dirichlet 边界条件。时间区域为 $[0, T]$ 。弹性体所受外力的单位体密度 $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, y, t) = (f_1, f_2)^T$, 当弹性体内部发生形变时, 其位移函数 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, t) = (u_1, u_2)^T$ 满足的方程为:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(x, y, t), & (x, y) \in \Omega, t \in [0, T] \\ \mathbf{u} = \mathbf{g}_D(x, y, t) = (g_1, g_2)^T, & (x, y) \in \partial\Omega, t \in [0, T], \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{u}'_0 & (x, y) \in \Omega, t = 0. \end{cases} \quad (15)$$

应力张量定义

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}),$$

其中 $\lambda \in (0, +\infty)$, $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$, $0 < \mu_1 < \mu_2$ 为 Lamé 参数, 应变张量定义为

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T),$$

∇ 是梯度算子, $\nabla \cdot$ 是散度算子。

3.2. 弱形式推导

现在我们给出非稳态线弹性方程的弱形式, 并用 Galerkin 方法对其进行离散。设 $\mathbf{u} \in H^2\left(0, T; [H^1(\Omega)]^2\right)$, (15) 的两端同时与测试函数 $\mathbf{v}^T \in [H_0^1(\Omega)]^2$ 做内积, 有

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{u}_t dx dy - \int_{\Omega} \mathbf{v}^T (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) dx dy = \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{f} dx dy,$$

由分部积分得

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{u}_t dx dy + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v}^T : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) dx dy = \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{f} dx dy.$$

其中二阶张量的内积 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v}$ 为

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v}^T : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial x} \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial y} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \sigma_{11}(\mathbf{u}) & \sigma_{12}(\mathbf{u}) \\ \sigma_{21}(\mathbf{u}) & \sigma_{22}(\mathbf{u}) \end{pmatrix} \\ &= \sigma_{11}(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x} + \sigma_{21}(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial v_1}{\partial y} + \sigma_{12}(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x} + \sigma_{22}(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial v_2}{\partial y}. \end{aligned}$$

非稳态线弹性方程对应的变分形式(16)为: 求 $\mathbf{u} \in H^2\left(0, T; [H^1(\Omega)]^2\right)$, 使得

$$(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2, \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{u}_t dx dy, \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v}^T : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) dx dy, \\ (\mathbf{f}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{f} dx dy. \end{aligned}$$

称这样的 $\mathbf{u}$ 为初边值问题(15)的广义解。

3.3. 半离散 Galerkin 格式

设有限元空间 U_h 的维数和全局基函数的个数均为 N_b , 有限元空间 U_h 单元上的有限元基函数记为 $\phi_i(\xi, \eta) = \mathbf{L}(\eta) \boldsymbol{\Phi} \xi^i \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{e}_i$ ($i=1, \dots, N_b$), 其中 $\mathbf{e}_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)^T$, $\phi_i(\xi, \eta)$ 为定义在多边形单元 K 上的局部插值基函数, 则有限元空间 U_h 可表示为

$$U_h = \text{span}\{\phi_i(\xi, \eta)\}_{i=1}^{N_b},$$

有限元数值解向量

$$\mathbf{u}_h = (u_{1h}, u_{2h})^T,$$

其中

$$u_{1h} = \sum_{i=1}^{N_b} u_{1i}(t) \phi_i(\xi, \eta), \quad u_{2h} = \sum_{i=1}^{N_b} u_{2i}(t) \phi_i(\xi, \eta).$$

建立关于 $u_{1i}(t)$ 和 $u_{2i}(t)$ ($i=1, \dots, N_b$) 的线性代数系统, 并对其求解可得有限元解 $\mathbf{u}_h = (u_{1h}, u_{2h})^T$ 。分别选取 $\mathbf{v}_h = (\phi_i(\xi, \eta), 0)^T$ ($i=1, \dots, N_b$), $\mathbf{v}_h = (0, \phi_j(\xi, \eta))^T$ ($j=1, \dots, N_b$)。即在第一组测试函数中, 取 $v_{1h} = \phi_j(\xi, \eta)$ ($j=1, \dots, N_b$), $v_{2h} = 0$; 在第二组测试函数中, 取 $v_{1h} = 0$, $v_{2h} = \phi_j(\xi, \eta)$ ($j=1, \dots, N_b$)。

在比例边界坐标变换(2)和(3)下, 可以得到

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \frac{1}{|J_b(\eta)|} \left(\mathbf{L}'(\eta) \mathbf{y}_b \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi} (\mathbf{L}(\eta) \mathbf{y}_b - \mathbf{y}_0) \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \right),$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial y} = \frac{1}{|J_b(\eta)|} \left(-L'(\eta) \mathbf{x}_b \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} (L(\eta) \mathbf{x}_b - \mathbf{x}_0) \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \right),$$

其中, $\phi_i(\xi, \eta)$ 关于比例边界坐标的偏导数为

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} = L(\eta) \Phi \Lambda \xi^\Lambda \Phi^{-1} \mathbf{e}_i, \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} = L'(\eta) \Phi \xi^\Lambda \Phi^{-1} \mathbf{e}_i \quad (i=1, \dots, N_b),$$

并且, 在比例边界坐标系下

$$d\Omega = \xi J_b(\eta) d\xi d\eta.$$

因此, 我们得到两组方程

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N_b} u_{1i}''(t) \int_{-1}^1 \int_0^1 \phi_i \phi_j \xi J_b d\xi d\eta \\ & + \sum_{i=1}^{N_b} u_{1i}(t) \left(\int_{-1}^1 \int_0^1 \lambda \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \xi J_b d\xi d\eta + 2 \int_{-1}^1 \int_0^1 \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \xi J_b d\xi d\eta + \int_{-1}^1 \int_0^1 \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \xi J_b d\xi d\eta \right) \\ & + \sum_{i=1}^{N_b} u_{2i}(t) \left(\int_{-1}^1 \int_0^1 \lambda \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \xi J_b d\xi d\eta + \int_{-1}^1 \int_0^1 \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \xi J_b d\xi d\eta \right) \\ & = \int_{-1}^1 \int_0^1 f_1 \phi_j \xi J_b d\xi d\eta, \\ & \sum_{i=1}^{N_b} u_{2i}''(t) \int_{-1}^1 \int_0^1 \phi_i \phi_j \xi J_b d\xi d\eta \\ & + \sum_{i=1}^{N_b} u_{1i}(t) \left(\int_{-1}^1 \int_0^1 \lambda \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \xi J_b d\xi d\eta + \int_{-1}^1 \int_0^1 \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \xi J_b d\xi d\eta \right) \\ & + \sum_{i=1}^{N_b} u_{2i}(t) \left(\int_{-1}^1 \int_0^1 \lambda \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \xi J_b d\xi d\eta + 2 \int_{-1}^1 \int_0^1 \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \xi J_b d\xi d\eta + \int_{-1}^1 \int_0^1 \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \xi J_b d\xi d\eta \right) \\ & = \int_{-1}^1 \int_0^1 f_2 \phi_j \xi J_b d\xi d\eta. \end{aligned}$$

定义刚度矩阵

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 & \mathbf{K}_4 + \mathbf{K}_5 \\ \mathbf{K}_6 + \mathbf{K}_7 & \mathbf{K}_8 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_2 \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \left[\int_{-1}^1 \int_0^1 \lambda \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \xi J_b d\xi d\eta \right]_{i,j=1}^{N_b}, \quad \mathbf{K}_2 = \left[\int_{-1}^1 \int_0^1 \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \xi J_b d\xi d\eta \right]_{i,j=1}^{N_b}, \\ \mathbf{K}_3 &= \left[\int_{-1}^1 \int_0^1 \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \xi J_b d\xi d\eta \right]_{i,j=1}^{N_b}, \quad \mathbf{K}_4 = \left[\int_{-1}^1 \int_0^1 \lambda \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \xi J_b d\xi d\eta \right]_{i,j=1}^{N_b}, \\ \mathbf{K}_5 &= \left[\int_{-1}^1 \int_0^1 \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \xi J_b d\xi d\eta \right]_{i,j=1}^{N_b}, \quad \mathbf{K}_6 = \left[\int_{-1}^1 \int_0^1 \lambda \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \xi J_b d\xi d\eta \right]_{i,j=1}^{N_b}, \\ \mathbf{K}_7 &= \left[\int_{-1}^1 \int_0^1 \mu \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \xi J_b d\xi d\eta \right]_{i,j=1}^{N_b}, \quad \mathbf{K}_8 = \left[\int_{-1}^1 \int_0^1 \lambda \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \xi J_b d\xi d\eta \right]_{i,j=1}^{N_b}. \end{aligned}$$

定义质量矩阵

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_e & \mathbf{O}_e \\ \mathbf{O}_e & \mathbf{M}_e \end{pmatrix},$$

其中

$$\mathbf{M}_e = \left[\int_{-1}^1 \int_0^1 \phi_i \phi_j \xi \mathbf{J}_b d\xi d\eta \right]_{i,j=1}^{N_b}, \mathbf{O}_e = [0_{ij}]_{i,j=1}^{N_b}.$$

定义右端向量

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)^T,$$

其中

$$\mathbf{F}_1 = \left[\int_{-1}^1 \int_0^1 f_1 \phi_j \xi \mathbf{J}_b d\xi d\eta \right]_{j=1}^{N_b}, \mathbf{F}_2 = \left[\int_{-1}^1 \int_0^1 f_2 \phi_j \xi \mathbf{J}_b d\xi d\eta \right]_{j=1}^{N_b}.$$

定义未知向量

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)^T,$$

其中

$$\mathbf{X}_1 = [u_{1i}]_{i=1}^{N_b}, \mathbf{X}_2 = [u_{2i}]_{i=1}^{N_b}.$$

然后, 我们得到一个关于 $u_{1i}(t)$ 和 $u_{2i}(t)$ ($i=1, \dots, N_b$) 的常微分方程组

$$\mathbf{M}\mathbf{X}''(t) + \mathbf{K}\mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(t). \quad (17)$$

至此, 我们得到了一个半离散的 Galerkin 方程(17)。

3.4. 单元矩阵的数值积分方案

在实际计算中, 单元刚度矩阵、质量矩阵和右端向量均采用 Gauss 积分计算。对于刚度矩阵和质量矩阵, 本文将比例边界单元的面积积分转化为沿单元各条边的边界积分, 并结合径向方向的解析积分得到单元矩阵。对于刚度矩阵和质量矩阵, 2DSBd2 单元和 2DSBd3 单元每条边均采用 6 个一维 Gauss 积分点。

对于右端载荷向量, 由于其包含外力函数, 需要在比例边界子区域内进行面积积分。本文在径向方向 ξ 和环向方向 η 上采用张量积 Gauss 积分公式。对于 2DSBd2 和 2DSBd3 单元, 每条边对应的比例边界子区域均采用 3×3 个 Gauss 积分点, 即每条边共有 9 个积分点。若多边形单元共有 n_e 条边, 则右端载荷向量计算中的积分点总数为 $9n_e$ 。

上述积分方案能够避免在比例中心处直接计算基函数导数, 同时保证刚度矩阵、质量矩阵和载荷向量具有足够的数值积分精度。

3.5. 全离散的 Galerkin 格式

进一步对时间区域 $[0, T]$ 进行离散, 得到全离散 Galerkin 方法, 设 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$, 时间方向的步长为 τ , $t_m = m\tau, m=1, 2, \dots, M$, 设 $\mathbf{X}_m$ 是 $\mathbf{X}(t_m)$ 的数值解, 相应的 θ 差分有限元方法为

$$\mathbf{M} \frac{\mathbf{X}_{m+1} - 2\mathbf{X}_m + \mathbf{X}_{m-1}}{\tau^2} + \mathbf{K}\mathbf{X}_{m+\theta} = \mathbf{F}_{m+\theta}, \quad (18)$$

下面记作 $\mathbf{X}_{m+\theta} = \theta\mathbf{X}_{m+1} + (1-2\theta)\mathbf{X}_m + \theta\mathbf{X}_{m-1}$, $\mathbf{F}_{m+\theta} = \theta\mathbf{F}_{m+1} + (1-2\theta)\mathbf{F}_m + \theta\mathbf{F}_{m-1}$, 设 $\hat{\mathbf{K}} = \frac{\mathbf{M}}{\tau^2} + \theta\mathbf{K}$,

$\hat{F} = F_{m+\theta} + \left[\frac{2M}{\tau^2} - (1-2\theta)M \right] X_m - \left[\frac{M}{\tau^2} + \theta K \right] X_{m-1}$, 结合半离散系统(17)与时间差分格式(18), 可得到如下全离散代数系统

$$\hat{K}X_{m+1} = \hat{F}, \quad (19)$$

求解线性代数系统(19), 从而可得有限元的数值解向量 X_{m+1} 。

取初值

$$X_0 = X(x, y, 0), \quad X_1 = X_0 + \tau X'_0,$$

$$\text{其中 } X'_0 = \frac{\partial X(x, y, 0)}{\partial t}.$$

上述三层 θ 差分格式属于二阶时间系统的常用时间离散格式, 本文主要关注其稳定性条件及其在线弹性问题中的数值表现。下面我们得到关于(19)初值和右端的先验误差估计。

3.6. 全离散格式的稳定性与先验估计[11]

为考虑全离散格式的稳定性, 下面给出全离散代数格式(18)关于初值与右端项的能量估计。步长 $\tau > 0$, 时间剖分

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_M = T, \quad t_m = m\tau, m = 1, 2, \cdots, M,$$

令 $X_m = X(x, y, t_m)$, 定义矩阵

$$D = M + \left(\theta - \frac{1}{4} \right) \tau^2 K,$$

质量矩阵 M 与刚度矩阵 K 均为对称正定矩阵, 当 $\theta \geq 0.25$ 时, 故 D 也是对称正定矩阵, 从而可在离散空间上定义内积与相应范数

$$(u, v)_D = D(u, v), \quad \|u\|_D = \sqrt{(Du, u)},$$

以及

$$\|u\|_K = \sqrt{(Ku, u)}.$$

稳定性定理

设 $\{X_m\}_{m=0}^M$ 满足全离散格式(18), 并且对任意 $m = 1, 2, \cdots, M-1$, 有

$$\left\| \frac{X_{m+1} - X_m}{\tau} \right\|_D^2 + \left\| \frac{X_{m+1} + X_m}{2} \right\|_K^2 \leq \left\| \frac{X_1 - X_0}{\tau} \right\|_D^2 + \left\| \frac{X_1 + X_0}{2} \right\|_K^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \tau \|F_{k+\theta}\|,$$

在上述假设下, 当 $\theta \geq 0.25$ 时, 全离散格式关于时间步长 τ 无条件稳定。

证明: 由恒等式

$$\theta X_{m+1} + (1-2\theta)X_m + \theta X_{m-1} = \frac{1}{4}(X_{m+1} + 2X_m + X_{m-1}) + \left(\theta - \frac{1}{4} \right) (X_{m+1} - 2X_m + X_{m-1}),$$

可将(18)全离散格式改写为

$$D \frac{X_{m+1} - 2X_m + X_{m-1}}{\tau^2} + K \frac{X_{m+1} + 2X_m + X_{m-1}}{4} = F_{m+\theta}.$$

记

$$\mathbf{s}_m = \mathbf{X}_m - \mathbf{X}_{m-1}, \mathbf{r}_m = \frac{1}{2}(\mathbf{X}_m + \mathbf{X}_{m-1}),$$

则有

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{m+1} - 2\mathbf{X}_m + \mathbf{X}_{m-1} &= \mathbf{s}_{m+1} - \mathbf{s}_m, \\ \mathbf{X}_{m+1} + 2\mathbf{X}_m + \mathbf{X}_{m-1} &= 2(\mathbf{r}_{m+1} + \mathbf{r}_m),\end{aligned}$$

从而上式可写成

$$\mathbf{D} \frac{\mathbf{s}_{m+1} - \mathbf{s}_m}{\tau^2} + \mathbf{K} \frac{\mathbf{r}_{m+1} + \mathbf{r}_m}{2} = \mathbf{F}_{m+\theta}.$$

两边与 $\mathbf{s}_{m+1} + \mathbf{s}_m = 2(\mathbf{r}_{m+1} - \mathbf{r}_m)$ 做欧式内积, 利用恒等式

$$(a-b, a+b) = \|a\|^2 - \|b\|^2,$$

可得

$$\frac{1}{\tau^2} (\|\mathbf{s}_{m+1}\|_D^2 - \|\mathbf{s}_m\|_D^2) + (\|\mathbf{r}_{m+1}\|_K^2 - \|\mathbf{r}_m\|_K^2) = (\mathbf{F}_m, \mathbf{s}_{m+1} + \mathbf{s}_m).$$

再由 Cauchy-Schwarz 不等式与 Young 不等式,

$$(\mathbf{F}_{m+\theta}, \mathbf{s}_{m+1} + \mathbf{s}_m) \leq \frac{1}{2\tau} \|\mathbf{s}_{m+1} + \mathbf{s}_m\|_D^2 + \frac{\tau}{2} \|\mathbf{F}_{m+\theta}\|_{D^{-1}}^2,$$

于是可得

$$\left\| \frac{\mathbf{X}_{m+1} - \mathbf{X}_m}{\tau} \right\|_D^2 + \left\| \frac{\mathbf{X}_{m+1} + \mathbf{X}_m}{2} \right\|_K^2 \leq \left\| \frac{\mathbf{X}_m - \mathbf{X}_{m-1}}{\tau} \right\|_D^2 + \left\| \frac{\mathbf{X}_m + \mathbf{X}_{m-1}}{2} \right\|_K^2 + \frac{1}{2} \tau \|\mathbf{F}_{m+\theta}\|_{D^{-1}}^2,$$

对 m 求和即可得到所述估计, 定理得证。

由算子差分格式的稳定性理论可知, 当 $\theta \geq 0.25$ 时, 本文采用的 θ -差分全离散格式对时间步长 τ 不受条件限制, 从而具有无条件稳定性。特别地, 当 $\theta = 0.25$ 时, 该格式既具有良好的稳定性, 又便于数值实现, 因此本文后续数值实验中取 $\theta = 0.25$ 。

4. 数值实验与结果分析

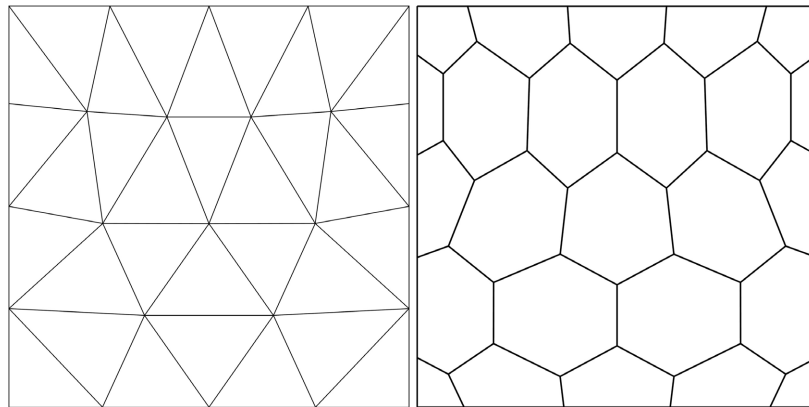


Figure 2. A polygonal mesh generated from triangular elements of h -specified size
图 2. 由尺寸为 h 的三角形单元生成的多边形网格

本节通过稳态和非稳态二维线弹性算例考察所构造多边形单元的数值表现。计算区域采用由三角形

网格生成的多边形网格,如图 2 所示。误差分别采用 L^∞ 范数、 L^2 范数和 H^1 半范数进行度量。本文主要比较 2DSBd2 与 2DSBd3 两类单元,以检验二阶和三阶高阶完备多边形单元的空间逼近能力。需要指出的是,本文实验主要用于验证所构造方法在光滑解析解算例中的收敛性,并未系统比较其与其他多边形方法或传统有限元方法的效率差异。

4.1. 稳态线弹性方程数值算例

对于稳态线弹性问题,设介质所占的空间区域为矩形区域 $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, 设 Lamé 参数 $\lambda = 2, \mu = 1$, 考虑如下二维稳态线弹性方程

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{f}, & (x, y) \in \Omega, \\ \mathbf{u} = (u_1, u_2)^T = (0, 0)^T, & (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

弹性体所受外力的单位体密度 $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$ 为

$$\begin{aligned} f_1 = & -(\lambda + 2\mu)2\pi(\sin(2\pi x) + \pi x \cos(2\pi x))\sin(2\pi y) + 4\mu\pi^2 x \sin^2(\pi x)\sin(2\pi y) \\ & -(\lambda + \mu)\pi \cos(\pi x)(\sin^2(2\pi y) + 2\pi y \sin(4\pi y)), \\ f_2 = & \mu\pi^2 y \sin(\pi x)\sin^2(2\pi y) - (\lambda + 2\mu)\sin(\pi x)(4\pi \sin(4\pi y) + 8\pi^2 y \cos(4\pi y)) \\ & -(\lambda + \mu)2\pi(\sin^2(\pi x) + \pi x \sin(2\pi x))\cos(2\pi y). \end{aligned}$$

当弹性体内部发生形变时,其位移函数 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ 为

$$\begin{aligned} u_1 &= x \sin^2(\pi x) \sin(2\pi y), \\ u_2 &= y \sin(\pi x) \sin^2(2\pi y). \end{aligned}$$

在不同范数下的误差及收敛阶如表 1 和图 3 所示,可以看出,随着网格尺寸 h 减小,2DSBd2 和 2DSBd3 单元在 L^∞ 范数、范数和 H^1 半范数下的误差均呈下降趋势。对于 2DSBd2 单元, L^∞ 与 L^2 误差大致表现为三阶收敛, H^1 半范数误差接近二阶收敛;对于 2DSBd3 单元,三类误差整体更小,且 L^∞ 与 L^2 误差表现出接近四阶的收敛趋势, H^1 半范数误差接近三阶收敛。该结果与二阶、三阶多项式完备空间的理论逼近能力基本一致。

Table 1. Approximation errors and convergence rates on polygonal meshes of steady-state line elastic equation
表 1. 稳态线弹性方程多边形网格数值分析的误差逼近和收敛性结果

单元		$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$	$h = 0.0313$
2DSBd2	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _\infty$	0.0660	0.0089	0.0014	1.6648e-4
	收敛阶		2.8906	2.6684	3.0720
	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _0$	0.0224	0.0031	4.0523e-4	5.1336e-5
	收敛阶		2.8532	2.9355	2.9807
	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _1$	0.7386	0.2007	0.0513	0.0128
	收敛阶		1.8798	1.9680	2.0028
2DSBd3	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _\infty$	0.0342	9.2263e-4	6.3699e-5	3.7787e-6
	收敛阶		5.2121	3.8564	4.0753
	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _0$	0.0079	3.2629e-4	2.0719e-5	1.2738e-6
	收敛阶		4.5976	3.9771	4.0237

续表

$\ \mathbf{u}-\mathbf{u}_h\ _1$	0.3232	0.0277	0.0036	4.5731e-4
收敛阶		3.5445	2.9438	2.9768

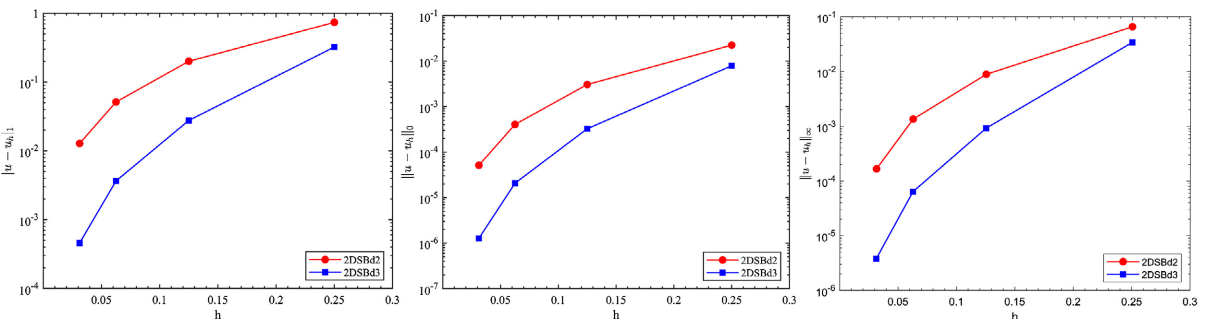


Figure 3. The L^∞ -norm error、 L^2 -norm error and H^1 -seminorm error versus h over polygonal meshes in Table 1
图 3. 表 1 所示的多边形网格上的 L^∞ 范数、 L^2 范数和 H^1 半范数误差关于 h 的变化关系

4.2. 非稳态线弹性方程数值算例

在矩形区域 $\Omega=[0,1]\times[0,1]$ 上, 设 Lamé 参数 $\lambda=2$, $\mu=1$, 考虑如下二维非稳态线弹性方程

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(x, y, t), & (x, y) \in \Omega, t \in [0, T], \\ \mathbf{u} = (0, 0)^T, & (x, y) \in \partial\Omega, t \in [0, T], \\ \mathbf{u}_0 = (0, 0)^T, \mathbf{u}'_0 = (0, 0)^T, & (x, y) \in \Omega, t = 0. \end{cases}$$

位移函数 $\mathbf{u}(x, y, t) = (u_1, u_2)^T$ 为

$$u_1 = u_2 = t^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y),$$

应力 $\mathbf{f}(x, y, t) = (f_1, f_2)^T$ 为

$$f_1 = f_2 = (2 + (\lambda + 3\mu)t^2\pi^2) \sin(\pi x) \sin(\pi y) - (\lambda + \mu)t^2\pi^2 \cos(\pi x) \cos(\pi y).$$

在终止时刻 $T=1$, 取时间步长 $\tau=h^2$, 并令 $\theta=0.25$, 计算数值解和精确解在 L^∞ 范数、 L^2 范数和 H^1 半范数下的误差及相应的收敛阶数, 结果如表 2 和图 4 所示。

由表 2 和图 4 可见, 在 $\tau=h^2$ 且 $\theta=0.25$ 的设置下, 非稳态线弹性算例同样表现出较稳定的空间收敛趋势。2DSBd2 单元在 L^∞ 和 L^2 范数下接近三阶收敛, 在 H^1 半范数下接近二阶收敛; 2DSBd3 单元在 L^∞ 和 L^2 范数下接近四阶收敛, 在 H^1 半范数下接近三阶收敛。由于本实验中时间步长随 h^2 同步缩小, 时间离散误差相对较小, 因此表 2 主要反映空间离散误差的收敛行为。

Table 2. Approximation errors and convergence rates on polygonal meshes of non-steady-state line elastic equation
表 2. 非稳态线弹性方程多边形网格数值分析的误差逼近和收敛性结果

单元		$h=0.25$	$h=0.125$	$h=0.0625$	$h=0.0313$
2DSBd2	$\ \mathbf{u}-\mathbf{u}_h\ _\infty$	0.0114	0.0017	2.0266e-4	2.1006e-5
	收敛阶		2.7454	3.0684	3.2702
	$\ \mathbf{u}-\mathbf{u}_h\ _0$	0.0058	6.1633e-4	7.2667e-5	8.8917e-6
	收敛阶		3.2343	3.0843	3.0308

续表

2DSBd3	$\ u - u_h\ _1$	0.1689	0.0372	0.0089	0.0022
	收敛阶		2.1828	2.0634	2.0163
	$\ u - u_h\ _\infty$	0.0013	8.3530e-5	5.0610e-6	3.1439e-7
	收敛阶		3.9601	4.0448	4.0088
	$\ u - u_h\ _0$	5.9626e-4	3.7179e-5	2.2796e-6	1.4312e-7
	收敛阶		4.0034	4.0276	3.9935
	$\ u - u_h\ _1$	0.0157	0.0018	2.1372e-4	2.6587e-5
	收敛阶		3.1247	3.0742	3.0069

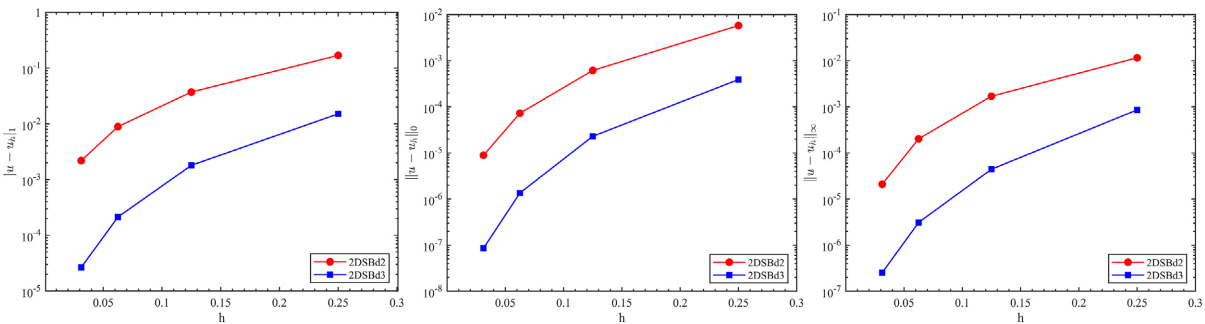


Figure 4. The L^∞ -norm error, L^2 -norm error and H^1 -seminorm error versus h -over polygonal meshes in Table 2

图 4. 表 2 所示的多边形网格上的 L^∞ 范数、 L^2 范数和 H^1 半范数误差关于 h 的变化关系

5. 结论

本文研究了基于比例边界坐标高阶完备多边形单元的二维线弹性方程数值求解方法。首先，引入比例边界坐标下的高阶完备多边形插值基函数，并建立二维线弹性方程的弱形式、半离散 Galerkin 格式和全离散 θ 差分格式；其次，在相应矩阵正定性假设下给出了全离散格式的稳定性估计；最后，通过稳态与非稳态算例考察了 2DSBd2 和 2DSBd3 单元的误差与收敛表现。

数值结果表明，在本文考虑的二维、各向同性的光滑解析解算例中，所构造方法具有较好的收敛性。随着网格尺寸 h 减小，二阶与三阶多边形单元在 L^∞ 范数、 L^2 范数和 H^1 半范数下的误差整体下降；其中，三阶单元通常具有更小误差和更高收敛阶。

与比例边界多边形单元在线弹性动力学中的应用[10]相比，本文的推进主要体现在：在基于比例边界坐标的高阶完备显式多边形单元基础上，建立了二维线弹性方程的半离散 Galerkin 格式和非稳态问题的全离散差分格式，并通过稳态与非稳态算例验证了 2DSBd2 和 2DSBd3 单元的收敛性。未来可进一步将该方法推广至三维线弹性问题、弹塑性问题，并探索其与自适应网格或其他多边形数值方法的混合应用。

基金项目

辽宁省教育厅青年项目基金(No. LJ212410165017)。

参考文献

- [1] Hughes, T.J.R. (1987) The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. Prentice-Hall.
- [2] Ciarlet, P.G. (1978) The Finite Element Method for Elliptic Problems. North-Holland.
- [3] Sukumar, N. and Tabarraei, A. (2004) Conforming Polygonal Finite Elements. *International Journal for Numerical*

-
- Methods in Engineering*, **61**, 2045-2066. <https://doi.org/10.1002/nme.1141>
- [4] Beirão da Veiga, L., Brezzi, F., Marini, L.D. and Russo, A. (2014) The Hitchhiker's Guide to the Virtual Element Method. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **24**, 1541-1573. <https://doi.org/10.1142/s021820251440003x>
- [5] Gain, A.L., Talischi, C. and Paulino, G.H. (2014) On the Virtual Element Method for Three-Dimensional Linear Elasticity Problems on Arbitrary Polyhedral Meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **282**, 132-160. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.05.005>
- [6] Song, C. and Wolf, J.P. (1997) The Scaled Boundary Finite-Element Method—Alias Consistent Infinitesimal Finite-Element Cell Method—For Elastodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **147**, 329-355. [https://doi.org/10.1016/s0045-7825\(97\)00021-2](https://doi.org/10.1016/s0045-7825(97)00021-2)
- [7] Wolf, J.P. and Song, C. (2001) The Scaled Boundary Finite-Element Method—A Fundamental Solution-Less Boundary-Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**, 5551-5568. [https://doi.org/10.1016/s0045-7825\(01\)00183-9](https://doi.org/10.1016/s0045-7825(01)00183-9)
- [8] Song, C. (2018) The Scaled Boundary Finite Element Method: Introduction to Theory and Implementation. John Wiley & Sons. <https://doi.org/10.1002/9781119388487>
- [9] Zhang, Y. and Li, C. (2026) Construction of the Polygonal and Faceted Polyhedral Elements with High Order Completeness Based on the Scaled Boundary Coordinates. *Computers & Mathematics with Applications*, **208**, 80-96. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2026.01.035>
- [10] Gravenkamp, H. and Natarajan, S. (2018) Scaled Boundary Polygons for Linear Elastodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **333**, 238-256. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.01.031>
- [11] Vabishchevich, P.N. (2023) Operator-Difference Schemes on Non-Uniform Grids for Second-Order Evolutionary Equations. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, **38**, 267-277. <https://doi.org/10.1515/rnam-2023-0020>