

一阶差分方程组周期边值问题解的存在性

姚奕彤

兰州理工大学理学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2026年5月25日; 录用日期: 2026年6月18日; 发布日期: 2026年6月30日

摘要

自从度量空间的概念被引入以及Banach压缩映射原理被建立以来, 对它们的拓展和改进一直是研究的热点。与此同时, 人们也将所获得的不动点结果运用于研究某些问题解的存在性。本文运用Banach代数上的图锥度量空间中的不动点定理研究一阶差分方程组周期边值问题解的存在性。

关键词

周期边值问题, 解, 存在性, 不动点, 图锥度量空间

Existence of Solutions for Periodic Boundary Value Problems of First-Order Difference Systems

Yitong Yao

School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu

Received: May 25, 2026; accepted: June 18, 2026; published: June 30, 2026

Abstract

Since the concept of metric spaces was introduced and Banach contraction mapping principle was established, their extensions and improvements have always been a research focus. Meanwhile, the obtained fixed point results have also been applied to study the existence of solutions to certain problems. In this thesis, we use some fixed point theorems in graphical cone metric space over Banach algebra to study the existence of solutions for periodic boundary value problems of first-order difference systems.

Keywords

Periodic Boundary Value Problem, Solution, Existence, Fixed Point, Graphical Cone Metric Space



1. 引言

1906年, Fréchet 在文献[1]中给出了度量空间的概念。1922年, Banach 在文献[2]中提出了著名的压缩映射原理: 在完备的度量空间上的压缩映射有唯一的不动点。从那时起, Banach 压缩映射原理在得到广泛应用的同时, 许多学者也从不同的角度对其进行了改进和推广。特别地, 2004年, Ran 和 Reurings [3]在偏序度量空间中证明了与 Banach 压缩映射原理类似的结果。Jachymski 在文献[4]中将 Banach 压缩映射原理推广到了带有图结构的度量空间中。自此, 数学工作者们在带有图结构的度量空间中取得了许多新的成果。譬如, Chifu 等人[5]在带有图结构的完备度量空间中研究了图压缩映射, 并获得了一些新的不动点结果。

基于 Jachymski [4]的思想, 2017年, Shukla 等人在文献[6]中提出了图度量空间的概念, 并且在图度量空间中建立了有关图压缩的不动点定理。近年来, 图度量空间的概念被推广到图 b 度量空间[7], 图矩形度量空间[8]。

人们对图度量空间及其上的 Banach 压缩映射原理进行推广和改进的同时, 也将所获得的不动点结果运用于研究某些积分方程解的存在性, 例如, 2017年, Shukla 等人[6]利用图度量空间中的不动点定理研究了下述积分方程

$$x(t) = \int_0^t S(t,u) f(u, x(u)) du, \quad t \in [0, I] \quad (1.1)$$

解的存在性, 其中 $I > 0$ 是一个常数, $S: [0, I] \times [0, I] \rightarrow [0, \infty)$ 和 $f: [0, I] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数。

2020年, Baradol 等人[8]在适当的条件下利用图矩形度量空间中的不动点定理获得了下述积分方程

$$x(u) = f(u) + \int_0^K L(u,t) g(t, x(t)) dt \quad (1.2)$$

解的存在性结果, 其中 $g: [0, K] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, $L: [0, K] \times [0, K] \rightarrow [0, +\infty)$ 以及 $f: [0, K] \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数。

差分方程周期边值问题系统, 是在有限离散节点上由一组差分方程与周期边界条件构成的离散边值问题, 要求未知序列及其各阶差分在区间两端取值相等, 形成封闭的周期性约束, 它既是离散动力系统与非线性分析的重要理论模型, 也广泛应用于晶格动力学、周期结构振动、生物种群动态演化、数字信号处理、数值求解微分方程周期解及离散控制系统等领域, 主要研究解的存在唯一性、多解性、正解与分歧现象, 并通过 Green 函数、不动点理论等工具给出理论刻画与数值求解的方法。

2007年, Huang 和 Zhang 在文献[9]中引入了锥度量空间的概念, 并在其上获得了相应的不动点结果。锥度量空间作为度量空间的推广, 其核心优势在于可通过锥的序结构刻画更复杂的距离关系, 允许距离具有多维度、层次性的特征, 突破了传统实数度量的单一性限制。2013年, Liu 和 Xu [10]改进了 Huang 和 Zhang 文章中锥度量空间的概念, 引入了 Banach 代数上的图锥度量空间。随着进一步的发展, 人们将图论的拓扑结构与锥度量空间的序结构进行结合, 2023年, Shukla 等人[11]利用 Banach 代数上的图锥度量空间的概念获得了相应的不动点结果, 并用于研究微分方程初值问题解的存在性。

近年来, 将图锥度量空间中的不动点定理应用于微分方程边值问题是比较新颖的, 例如, 2020年, Aryanpour 等人在文献[12]中将图锥度量空间中的不动点定理用于研究下述四阶两点边值问题

$$\begin{cases} x^{iv}(t) = k(t, x(t)), 0 < t < 1, \\ x(0) = x'(0) = x''(1) = x'''(1) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

解的存在性, 其中 $k \in C([0, 1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ 。

2023年, Shukla 等人[13]利用 Banach 代数上的图锥度量空间中的不动点定理研究了下述问题

$$\frac{du_i}{dt} = N(t)K_i(t, u_i(t), u_j(t)); u_i(0) = 0, i, j = 1, 2, i \neq j, \quad (1.4)$$

其中, $K_1, K_2: I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, N: I \rightarrow \mathbb{R}$ 是三个连续函数。

受上述文献的启发, 本文研究下述一阶差分方程组周期边值问题

$$\begin{cases} \Delta u_i(k) + \alpha u_i(k+1) = f_i(k, u_i(k+1), u_j(k+1)), k \in [0, N]_{\mathbb{Z}}, i, j = 1, 2, i \neq j, \\ u_i(0) = u_i(N+1) \end{cases} \quad (1.5)$$

解的存在性, 其中 $\alpha > 1$ 是常数。

2. 预备知识

为了读者方便阅读, 我们在本节简要介绍一些有关图和图度量空间的基本定义。更多细节, 读者可以参考[4]和[6]以及其中的文献。

假设 X 是一个非空集合, Λ 是 $X \times X$ 的对角线。设 G 为一个无平行边的有向图, 其顶点集 $V(G)$ 与 X 重合, 边集 $E(G)$ 包含所有的自环(即 $E(G) \supseteq \Lambda$), 那么我们称 X 配备了图 $G = (V(G), E(G))$ 。

若 $x, y \in V(G)$, 则 G 中一条从 x 到 y 的长度为 $l \in \mathbb{N}$ 的路径是一个由 $l+1$ 个顶点组成的序列 $\{x_i\}_{i=0}^l$, 此序列满足 $x_0 = x, x_l = y$ 且 $(x_{i-1}, x_i) \in E(G), i = 1, 2, \dots, l$ 。对于 $l \in \mathbb{N}$, 我们记

$$[x]_G^l = \{y \in X : \text{在 } G \text{ 中存在一条从 } x \text{ 到 } y \text{ 的长度为 } l \text{ 的有向路径}\}.$$

我们定义一个 X 上的关系 P 如下: $(xPy)_G$ 当且仅当在 G 中存在一条从 x 到 y 的有向路径。若点 z 包含在 G 中从 x 到 y 的有向路径内, 则记作 $z \in (xPy)_G$ 。若对所有的 $n \in \mathbb{N}$ 均有 $(x_n P x_{n+1})_G$, 则称 X 中的序列 $\{x_n\}$ 是 G -逐项连通的。

2.1. 定义 1 [6]

假设 X 是一个配有图 G 的非空集合, $d_G: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个函数, 满足以下条件:

(GM1) 对所有 $x, y \in X$, 有 $d_G(x, y) \geq 0$;

(GM2) $d_G(x, y) = 0$, 当且仅当 $x = y$;

(GM3) 对所有 $x, y \in X$, 有 $d_G(x, y) = d_G(y, x)$;

(GM4) 对所有 $x, y, z \in X$, 若 $(xPy)_G, z \in (xPy)_G$, 则 $d_G(x, y) \leq d_G(x, z) + d_G(z, y)$ 。

则称映射 d_G 是 X 上的一个图度量, (X, d_G) 是一个图度量空间。

假设 \mathfrak{B} 是一个实 Banach 代数, 即 \mathfrak{B} 是一个实 Banach 空间, 并在其上定义了乘法运算, 满足以下性质(详见[13]): 对所有的 $x, y, z \in \mathfrak{B}, a \in \mathbb{R}$,

(1) $x(yz) = (xy)z$;

(2) $x(y+z) = xy + xz, (x+y)z = xz + yz$;

(3) $a(xy) = (ax)y = x(ay)$;

(4) $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ 。

假设 \mathfrak{B} 是一个带有单位元的 Banach 代数, 即存在乘法单位元 e , 使得对所有的 $x \in \mathfrak{B}$ 有 $ex = xe = x$ 。
 $x \in \mathfrak{B}$ 的谱半径

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \geq 1} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

2.2. 定义 2 [10]

假设 \mathfrak{B} 是一个带有单位元 e 和零元 θ 的 Banach 代数。 \mathfrak{B} 的非空闭子集 C 被称为一个锥, 如果满足以下条件:

- (1) $\{\theta, e\} \subset C$;
- (2) 若 $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, +\infty)$, 则 $\alpha_1 C + \alpha_2 C \subseteq C$;
- (3) $C^2 = CC \subseteq C$;
- (4) $C \cap (-C) = \{\theta\}$ 。

若 $C^\circ \neq \emptyset$, 其中 C° 表示 C 的内部, 则锥 C 被称为一个实心锥。Banach 代数 \mathfrak{B} 中的每一个锥在 \mathfrak{B} 中诱导出一个半序: 对所有的 $x, y \in \mathfrak{B}$, $x \leq y$ 当且仅当 $y - x \in C$ 。此外, 对于所有的 $x, y \in \mathfrak{B}$, 记 $x \ll y$ 当且仅当 $y - x \in C^\circ$ 。

2.3. 定义 3 [10]

假设 X 是一个非空集合, \mathfrak{B} 是一个 Banach 代数。映射 $d: X \times X \rightarrow \mathfrak{B}$ 被称为一个锥度量, 如果满足以下条件: 对所有的 $x, y, z \in X$,

- (1) $\theta \leq d(x, y)$;
- (2) $d(x, y) = \theta, x = y$;
- (3) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ 。

在这种情况下, 称 (X, d) 为 Banach 代数 \mathfrak{B} 上的锥度量空间。

接下来, 我们引入 Banach 代数上的图锥度量空间的定义以及图锥度量空间中 Cauchy 列、收敛性及完备性的概念。

2.4. 定义 4 [10]

设 X 是一个配有图 G 的非空集合, \mathfrak{B} 是一个 Banach 代数。假设映射 $d_{G_c}: X \times X \rightarrow \mathfrak{B}$ 满足以下条件:

- (GCM1) 对所有 $x, y \in X$, 有 $d_{G_c}(x, y) \geq \theta$;
- (GCM2) 对所有 $x, y \in X$, 有 $d_{G_c}(x, y) = \theta$ 当且仅当 $x = y$;
- (GCM3) 对所有 $x, y \in X$, 有 $d_{G_c}(x, y) = d_{G_c}(y, x)$;
- (GCM4) 对所有 $x, y, w \in X$, 若 $(xPy)_G$ 且 $w \in (xPy)_G$, 则 $d_{G_c}(x, y) \leq d_{G_c}(x, w) + d_{G_c}(w, y)$ 。

则称映射 d_{G_c} 是 X 上的一个图锥度量空间, 称 (X, d_{G_c}) 是 Banach 代数 \mathfrak{B} 上的图锥度量空间。

2.5. 定义 5 [10]

设 (X, d_{G_c}) 是 Banach 代数 \mathfrak{B} 上的图锥度量空间, $\{x_n\}$ 是 X 中的一个序列, 则称 $\{x_n\}$

- (1) 是一个 Cauchy 列, 若给定 $c \in C^\circ$, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得对所有的 $n, m > n_0$, 有 $d_{G_c}(x_n, x_m) \ll c$;
- (2) 收敛并收敛于 $x \in X$, 若给定 $c \in C^\circ$, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得对所有的 $n > n_0$, 有 $d_{G_c}(x_n, x) \ll c$ 。

2.6. 定义 6 [10]

设 (X, d_{G_c}) 是 Banach 代数 \mathfrak{B} 上的图锥度量空间, 如果 X 中的每一个 Cauchy 列都收敛于某一点 $x \in X$, 则称 X 是完备的。设 G' 是另一个图, 使得 $V(G') \subseteq X$, 如果 X 中每一个 G' -逐项连通的 Cauchy 列都收敛于某一点 $x \in X$, 则称 X 是 G' -完备的。

最后, 我们给出图压缩的定义并介绍图锥度量空间中关于图压缩的不动点定理。

2.7. 定义 7 [4]

若 $V(G') \subseteq V(G)$, $E(G') \subseteq E(G)$ 且任意边 $(x, y) \in E(G')$, $x, y \in V(G')$, 则 $G' = (V(G'), E(G'))$ 被称为 $G = (V(G), E(G))$ 的一个子图。

在本节的剩余部分, 我们始终假设 G' 是 G 的一个子图, 使得 $E(G') \supseteq \Lambda$ 。

2.8. 定义 8 [10]

设 (X, d_{G_c}) 是 Banach 代数 \mathfrak{B} 上的图锥度量空间, $T: X \rightarrow X$ 是一个映射且 G' 是 G 的一个子图, 使得 $E(G') \supseteq \Lambda$ 。若以下条件成立:

(GCC1) T 具有保边性, 即若 $(x, y) \in E(G')$, 则 $(Tx, Ty) \in E(G')$;

(GCC2) 存在 $\beta \in C$, 使得 $\rho(\beta) < 1$ 并且对满足 $(x, y) \in E(G')$ 的 $x, y \in X$, 有

$$d_{G_c}(Tx, Ty) \leq \rho d_{G_c}(x, y).$$

则称 T 是一个具有压缩向量 β 的 (G, G') -图压缩映射。

若对所有的 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $x_n = Tx_{n-1}$, 则我们称序列 $\{x_n\}$ 是以 $x_0 \in X$ 为初值的 T -Picard 序列。

2.9. 定义 9 [10]

设 (X, d_{G_c}) 是 Banach 代数 \mathfrak{B} 上的图锥度量空间, $T: X \rightarrow X$ 是一个映射。则称四元组 (X, d_{G_c}, G', T) 具有性质(s): 如果 G' -逐项连通的 T -Picard 序列 $\{x_n\}$ 有两个极限 x^* 和 y^* , 且 $x^* \in X, y^* \in T(X)$, 则 $x^* = y^*$ 。

2.10. 定理 1 [10]

设 (X, d_{G_c}) 是 Banach 代数 \mathfrak{B} 上的一个 G' -完备的图锥度量空间, $T: X \rightarrow X$ 是一个 (G, G') -图压缩映射。假设以下条件成立:

(A) 存在 $x_0 \in X$ 以及 $l \in \mathbb{N}$, 使得 $Tx_0 \in [x_0]_{G'}^l$;

(B) 若 G' -逐项连通的 T -Picard 序列 $\{x_n\}$ 在 X 中收敛, 则存在 $\{x_n\}$ 的一个极限 $z \in X$ 以及 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得对所有的 $n > n_0$ 都有 $(x_n, z) \in E(G')$ 或 $(z, x_n) \in E(G')$ 。

则存在 $x^* \in X$, 使得以 $x_0 \in X$ 为初值的 T -Picard 序列 $\{x_n\}$ 是 G' -逐项连通的, 并且收敛于 x^* 和 Tx^* 。

2.11. 定理 2 [10]

假设定理 1 中的所有条件均满足且四元组 (X, d_{G_c}, G', T) 具有性质(s), 则 T 在 X 中存在一个不动点。

3. 主要结果

研究一阶差分方程组周期边值问题

$$\begin{cases} \Delta u_i(k) + \alpha u_i(k+1) = f_i(k, u_i(k+1), u_j(k+1)), k \in [0, N]_{\mathbb{Z}}, i, j = 1, 2, i \neq j, \\ u_i(0) = u_i(N+1) \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 $\alpha > 1$ 是常数, N 是一个固定的正整数, $f_i: [0, N]_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$ 是连续函数。

考虑下述线性周期边值问题

$$\begin{cases} \Delta u(k) + \alpha u(k+1) = h(k), k \in [0, N]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0) = u(N+1). \end{cases} \quad (3.2)$$

3.1. 引理 1

对于任意的 $h: [0, N]_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$, 周期边值问题(3.2)存在唯一解

$$u(k) = \sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) h(\ell), k \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}},$$

其中

$$G(k, \ell) = \frac{(1+\alpha)^{\ell-k}}{(1+\alpha)^{N+1} - 1} \begin{cases} (1+\alpha)^{N+1}, 0 \leq \ell \leq k-1, \\ 1, k \leq \ell \leq N. \end{cases}$$

3.2. 引理 2

引理 1 中定义的 $G(k, \ell)$ 具有以下性质:

$$\min_{(k, \ell) \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}} \times [0, N]_{\mathbb{Z}}} G(k, \ell) = \frac{1}{(1+\alpha)^{N+1} - 1}, \quad (3.3)$$

$$\max_{(k, \ell) \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}} \times [0, N]_{\mathbb{Z}}} G(k, \ell) = \frac{(1+\alpha)^N}{(1+\alpha)^{N+1} - 1} \quad (3.4)$$

以及

$$\sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) = \frac{1}{\alpha}, k \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}}. \quad (3.5)$$

差分方程组(3.1)可以转化为:

$$u_i(k) = \sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) f_i(\ell, u_i(\ell+1), u_j(\ell+1)), k \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}}. \quad (3.6)$$

令 $F = \{u: [0, N+1]_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}\}$ 且 $X = F \times F$ 。

称 $(u_1, u_2) \in X$ 为(3.1)的下解是指

$$u_i(k) \leq \sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) f_i(\ell, u_i(\ell+1), u_j(\ell+1)), k \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}}, i, j = 1, 2, i \neq j.$$

设 $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in X$, 若 $u_i(k) \leq v_i(k), k \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}}, i = 1, 2$, 则我们记 $(u_1, u_2) \subseteq (v_1, v_2)$ 。

令

$$B = \{(u_1, u_2) \in X : 0 \leq u_i(k) \leq 1, k \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}}, i = 1, 2\},$$

给 X 赋予图 $G = G'$: 其顶点集 $V(G) = X$, 边集

$$E(G) = \Lambda \cup \{(u_1, u_2), (v_1, v_2)\} \in X \times X : (u_1, u_2), (v_1, v_2) \in B \text{ 且 } (u_1, u_2) \subseteq (v_1, v_2)\}.$$

定义算子 $T: X \rightarrow X$ 如下

$$T(u_1, u_2) = \left(\sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) f_1(\ell, u_1(\ell+1), u_2(\ell+1)), \sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) f_2(\ell, u_2(\ell+1), u_1(\ell+1)) \right),$$

显然, T 的不动点即为一阶差分方程组边值问题(3.1)的解。

3.3. 定理 1

假设下述条件成立:

(H1) 对于 $s_1, s_2, s_3, s_4 \in [0, 1], s_1 \leq s_3, s_2 \leq s_4$,

$$0 \leq f_i(\ell, s_1, s_2) \leq f_i(\ell, s_3, s_4), \ell \in [0, N]_{\mathbb{Z}}, i = 1, 2;$$

(H2) $f_i(\ell, 1, 1) \leq \alpha, \ell \in [0, N]_{\mathbb{Z}}, i = 1, 2$;

(H3) 对于任意的 $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in X, ((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \in E(G^n)$,

$$f_i(\ell, v_i(\ell+1), v_j(\ell+1)) - f_i(\ell, u_i(\ell+1), u_j(\ell+1)) \leq v_i(\ell+1) - u_i(\ell+1),$$

$$\ell \in [0, N]_{\mathbb{Z}}, i, j = 1, 2, i \neq j.$$

则(3.1)在 B 中下解的存在性就保证了(3.1)解的存在性。

证明: 令 Banach 代数 $\mathfrak{B} = \mathbb{R}^2$, 其中的范数和乘法运算定义如下:

(I) $(x, y) \in \mathfrak{B}, \|(x, y)\| := |x| + |y|$;

(II) $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathfrak{B}, (x_1, y_1), (x_2, y_2) := (x_1 x_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$ 。

令 $C = \{(x, y) \in \mathfrak{B} : x, y \geq 0\}$, 则 C 是 \mathfrak{B} 中的锥。

定义 $d_{G_c}: X \times X \rightarrow \mathfrak{B}$ 如下:

$$d_{G_c}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = (D(u_1, v_1), D(u_2, v_2)),$$

其中, $D: F \times F \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$D(u, v) = \max_{k \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}}} |u(k) - v(k)|,$$

下证: (X, d_{G_c}) 是 Banach 代数 \mathfrak{B} 上的 G' -完备度量空间。

由 G' 逐项连通知, 对每个 $n \in N$, 有 $x_n = x_{n+1}$ 或 $x_n < x_{n+1}$, 因此序列 $\{x_n\}$ 是单调递增的。特别地, 对每个 $k \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}}$ 以及 $i = 1, 2$, 序列 $\{u_i^{(n)}(k)\}$ 是单调不减且有上界。由于

$d_{G_c}(x_n, x_m) = (D(u_1^{(n)}, u_1^{(m)}), D(u_2^{(n)}, u_2^{(m)}))$ 且趋近于 θ , 当 $n, m \rightarrow \infty$ 意味着 $D(u_i^{(n)}, u_i^{(m)}) \rightarrow 0$ 。而

$$|u_i^{(n)}(k) - u_i^{(m)}(k)| \leq D(u_i^{(n)}, u_i^{(m)}),$$

故对每个固定的 k 和 i , $\{u_i^{(n)}(k)\}$ 是实数 Cauchy 列, 由实数完备性, 该数列收敛, 记收敛为 $z_i(k)$ 。

定义 $z = (z_1, z_2)$, 其中 $z_i(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_i^{(n)}(k)$ 。由于每个 $u_i^{(n)}(k) \in [0, 1]$, 极限 $z_i(k) \in [0, 1]$, 故 $z \in X$ 且 $z \in B$ 。

接下来, 我们需要证明 $d_{G_c}(x_n, z) \rightarrow \theta$ 在锥度量意义下。由于 $D(u_i^{(n)}, z_i) = \max_{k \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}}} |u_i^{(n)}(k) - z_i(k)|$, 而每个 k 出的差趋近于 0, 有限最大值也趋近于 0。因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} D(u_i^{(n)}, z_i) = 0$, 于是

$$d_{G_c}(x_n, z) = (D(u_1^{(n)}, z_1), D(u_2^{(n)}, z_2)) \rightarrow (0, 0) = \theta$$

在 Banach 代数 $\mathfrak{B} = \mathbb{R}^2$ 意义下, 等价于锥度量空间中的收敛, 所以 $\{x_n\}$ 收敛到 z 。因此, 每一个 G' -逐项连通的 Cauchy 列都在 X 中收敛, 则可以验证 (X, d_{G_c}) 是 Banach 代数 \mathfrak{B} 上的 G' -完备的图锥度量空间。

下证: $T: X \rightarrow X$ 为 (G, G') -图压缩。

(1) 令 $((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \in E(G')$, 我们证明 $(T(u_1, u_2), T(v_1, v_2)) \in E(G')$ 。分两种情况:

(i) $((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \in \Lambda$ 。在这种情况下显然有 $(T(u_1, u_2), T(v_1, v_2)) \in \Lambda$ 。

(ii) $((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \in X \times X, (u_1, u_2), (v_1, v_2) \in B$ 且 $(u_1, u_2) \subseteq (v_1, v_2)$ 。

这种情况下我们有:

$$0 \leq u_i(k) \leq v_i(k) \leq 1, k \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}}, i = 1, 2.$$

下证: $T(u_1, u_2), T(v_1, v_2) \in B$ 且 $T(u_1, u_2) \subseteq T(v_1, v_2)$ 。

事实上, 由条件(H1), (H2)以及引理 3.1 可知,

$$\begin{aligned} (0, 0) &\subseteq T(u_1, u_2) \\ &= \left(\sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) f_1(\ell, u_1(\ell+1), u_2(\ell+1)), \sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) f_2(\ell, u_2(\ell+1), u_1(\ell+1)) \right) \\ &\subseteq \left(\sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) f_1(\ell, 1, 1), \sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) f_2(\ell, 1, 1) \right) \\ &\subseteq \left(\alpha \sum_{\ell=0}^N G(k, \ell), \alpha \sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) \right) \\ &= (1, 1), \end{aligned}$$

这表明 $T(u_1, u_2) \in B$ 。同理可得, $T(v_1, v_2) \in B$ 。

另一方面, 由条件(H1)可知,

$$\begin{aligned} T(u_1, u_2) &= \left(\sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) f_1(\ell, u_1(\ell+1), u_2(\ell+1)), \sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) f_2(\ell, u_2(\ell+1), u_1(\ell+1)) \right) \\ &\subseteq \left(\sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) f_1(\ell, v_1(\ell+1), v_2(\ell+1)), \sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) f_2(\ell, v_2(\ell+1), v_1(\ell+1)) \right) \\ &= T(v_1, v_2), \end{aligned}$$

这就证明了 $(T(u_1, u_2), T(v_1, v_2)) \in E(G')$ 。

(2) 令 $\beta = \left(\frac{1}{\alpha}, 0\right)$, 则 $\beta \in C$ 且 $\rho(\beta) = \frac{1}{\alpha} < 1$ 。故对于任意的 $((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \in E(G')$, 我们有

$$\begin{aligned} &d_{G_c}(T(u_1, u_2), T(v_1, v_2)) \\ &= d_{G_c} \left(\sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) f_1(\ell, u_1(\ell+1), u_2(\ell+1)), \sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) f_2(\ell, u_2(\ell+1), u_1(\ell+1)), \right. \\ &\quad \left. \sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) f_1(\ell, v_1(\ell+1), v_2(\ell+1)), \sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) f_2(\ell, v_2(\ell+1), v_1(\ell+1)) \right) \\ &= \left(D \left(\sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) f_1(\ell, u_1(\ell+1), u_2(\ell+1)), \sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) f_1(\ell, v_1(\ell+1), v_2(\ell+1)), \right. \right. \\ &\quad \left. \left. D \left(\sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) f_2(\ell, u_2(\ell+1), u_1(\ell+1)), \sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) f_2(\ell, v_2(\ell+1), v_1(\ell+1)) \right) \right) \right), \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
& d_{G_c}(T(u_1, u_2), T(v_1, v_2)) \\
&= \left(\max_{k \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}}} \left[\sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) f_1(\ell, v_1(\ell+1), v_2(\ell+1)) - \sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) f_1(\ell, u_1(\ell+1), u_2(\ell+1)) \right], \right. \\
&\quad \left. \max_{k \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}}} \left[\sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) f_2(\ell, v_2(\ell+1), v_1(\ell+1)) - \sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) f_2(\ell, u_2(\ell+1), u_1(\ell+1)) \right] \right) \\
&= \left(\max_{k \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}}} \sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) [f_1(\ell, v_1(\ell+1), v_2(\ell+1)) - f_1(\ell, u_1(\ell+1), u_2(\ell+1))], \right. \\
&\quad \left. \max_{k \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}}} \sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) [f_2(\ell, v_2(\ell+1), v_1(\ell+1)) - f_2(\ell, u_2(\ell+1), u_1(\ell+1))] \right) \\
&\leq \left(\max_{k \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}}} \sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) [v_1(\ell+1) - u_1(\ell+1)], \max_{k \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}}} \sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) [v_2(\ell+1) - u_2(\ell+1)] \right), \\
&\leq \left(\max_{k \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}}} \sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) \max_{\ell \in [0, N]_{\mathbb{Z}}} [v_1(\ell+1) - u_1(\ell+1)], \max_{k \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}}} \sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) \max_{\ell \in [0, N]_{\mathbb{Z}}} [v_2(\ell+1) - u_2(\ell+1)] \right), \\
&\leq \left(D(u_1, v_1) \max_{k \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}}} \sum_{\ell=0}^N G(k, \ell), D(u_2, v_2) \max_{k \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}}} \sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) \right), \\
&= \left(\frac{1}{\alpha} D(u_1, v_1), \frac{1}{\alpha} D(u_2, v_2) \right) \\
&= \beta(D(u_1, v_1), D(u_2, v_2)) \\
&= \beta d_{G_c}((u_1, u_2), (v_1, v_2)),
\end{aligned}$$

这就证明了 $T: X \rightarrow X$ 是 (G, G') -图压缩。

下证：定理 2.10 中的条件(B)成立。

根据子图 G' 的定义，若 $(x_n, x_{n+1}) \in E(G')$ 且不是自环，则 $x_n < x_{n+1}$ ；若为自环，则有 $x_n = x_{n+1}$ ，因此序列 $\{x_n\}$ 是单调递增，有 $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$ ，即对每个 $k \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}}$ 及 $i=1, 2$ ，有 $u_i^{(n)}(k) \leq u_i^{(n+1)}(k)$ 。由于序列 $\{x_n\}$ 在 X 中收敛，设 $z = (z_1, z_2) \in X$ 为其极限，序列 $\{x_n\}$ 在图锥度量 $d_{G_c}: X \times X \rightarrow \mathfrak{B}$ 意义下进行，而 $d_{G_c}: X \times X \rightarrow \mathfrak{B}$ 定义如下：

$$d_{G_c}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = (D(u_1, v_1), D(u_2, v_2)),$$

其中 $D(u, v) = \max_{k \in [0, N+1]_{\mathbb{Z}}} |u(k) - v(k)|$ 。由于定义域 $[0, N+1]_{\mathbb{Z}}$ 是有限点集。因此，对每个固定的 k 和 i ，序列 $\{u_i^{(n)}(k)\}$ 收敛到 $z_i(k)$ 。由序列 $\{x_n\}$ 的单调递增性，对每个 n 和 k ，有 $u_i^{(n)}(k) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} u_i^{(m)}(k) = z_i(k)$ ，因此 $x_n \leq z$ 。又因为所有的 $x_n \in B$ ，故极限 z 满足 $0 \leq z_i(k) \leq 1$ 即 $z \in B$ 。由于 $x_n, z \in B$ 且 $x_n \leq z$ ，根据 $E(G')$ 的定义，有 $(x_n, z) \in E(G')$ 对所有的 $n \geq 0$ 成立。特别地，取 $n_0 = 0$ (或任意正整数)，则对所有的 $n > n_0$ 也有 $(x_n, z) \in E(G')$ 。这就满足了条件(B)成立。

假设 $(u_1, u_2) \in B$ 是(3.1)的下解，则由 $(u_1, u_2) \in B$ 以及上述证明可知 $T(u_1, u_2) \in B$ ，进一步由 (u_1, u_2) 是(3.1)的下解可知， $(u_1, u_2) \subseteq T(u_1, u_2)$ ，因此 $T(u_1, u_2) \in [(u_1, u_2)]_{G'}^l$ ，这说明了定理 2.10 中的条件(A)成立。此外，易验证定理 2.10 中的条件(B)成立且四元组 (X, d_{G_c}, G', T) 具有性质(s)。因此，定理 3.3 的所有条件均满足。故 T 存在一个不动点，该不动点即为一阶差分方程组边值问题(3.1)的解。

4. 实例分析

考虑下述差分方程组周期边值问题

$$\begin{cases} \Delta u_1(k) + 2u_1(k+1) = \frac{k}{2N} [u_1^2(k+1) + 1], k \in [0, N]_{\mathbb{Z}}, \\ \Delta u_2(k) + 2u_2(k+1) = \frac{k}{2N} [u_2^2(k+1) + 2], k \in [0, N]_{\mathbb{Z}}, \\ u_1(0) = u_1(N+1), \\ u_2(0) = u_2(N+1). \end{cases} \quad (4.1)$$

显然 $\alpha = 2$ 以及 $f_i(\ell, x, y) = \frac{\ell}{2N} [x^2 + i]$, $i = 1, 2$, 首先验证定理 3.3 中的条件(H1)成立, 因为 $\ell \geq 0$, $x^2 \geq 0$, $i > 0$, 则 $f_i(\ell, x, y) \geq 0$. 因为 $\ell \leq N$ 故 $\frac{\ell}{2N} \leq \frac{1}{2}$; 当 $x \leq 1$ 时, $x^2 \leq 1$, 于是有 $f_1 \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1 \leq 2$ 以及 $f_2 \leq \frac{1}{2}(1+2) = 1.5 \leq 2$. 因此 $0 \leq f_i \leq \alpha$. 对于固定的 ℓ , $\frac{\ell}{2N} \geq 0$, 而 x^2 在 $[0, 1]$ 上单调递增, f_i 不依赖于 y , 可视为关于 y 的常函数单调递增, 故 f_i 关于 x 和 y 均单调递增. 因此条件(H1)成立. 其次验证定理 3.3 中的条件(H2)成立, 因为 $f_1(\ell, 1, 1) = \frac{\ell}{2N}(1+1) = \frac{\ell}{N} \leq 1 \leq 2$, $f_2(\ell, 1, 1) = \frac{\ell}{2N}(1+2) = \frac{3\ell}{2N} \leq \frac{3}{2} \leq 2$, 所以 $f_i(\ell, 1, 1) \leq \alpha$. 因此条件(H2)成立. 接下来验证定理 3.3 中的条件(H3)成立, 取 $(u_1, u_2) = (0, 0)$, 有 $T_i(0, 0)(k) = \sum_{\ell=0}^N G(k, \ell) f_i(\ell, 0, 0)$, 其中

$$f_1(\ell, 0, 0) = \frac{\ell}{2N}(0+1) = \frac{\ell}{2N} \geq 0, \quad f_2(\ell, 0, 0) = \frac{\ell}{2N}(0+2) = \frac{\ell}{N} \geq 0.$$

由于 $G(k, \ell) \geq 0$, 故 $T_i(0, 0)(k) \geq 0$. 因此 $(0, 0) \in T(0, 0)$, 条件(H3)成立.

综上所述, 经过验证 f_1 和 f_2 满足定理 3.3 的所有条件, 且 $(0, 0)$ 是(4.1)在 B 中的一个下解, 故由定理 3.3 可知, 一阶差分方程组周期边值问题(4.1)存在一个解.

5. 总结与展望

自从度量空间的概念被提出以及 Banach 压缩映射原理被建立以来, 数学工作者们在对度量空间和 Banach 压缩映射原理进行改进和推广的同时, 利用所获得的新的不动点方面的结果去研究某些问题解的存在性. 现有的工作中, 利用新的不动点方面的结果研究的某些问题大多集中于积分方程和微分方程边值问题. 本文我们主要研究下述一阶差分方程组周期边值问题

$$\begin{cases} \Delta u_i(k) + \alpha u_i(k+1) = f_i(k, u_i(k+1), u_j(k+1)), k \in [0, N]_{\mathbb{Z}}, i, j = 1, 2, i \neq j, \\ u_i(0) = u_i(N+1) \end{cases}$$

其中 $\alpha > 1$ 是常数. 我们运用 Banach 代数上的图锥度量空间中的不动点定理获得了上述一阶差分方程组周期边值问题解的存在性.

在拓展方向方面, 该方法可以推广到测度链研究领域, 测度链理论是德国学者 S. Hilger 为了统一连续和离散分析而提出的一种新的分析理论. 测度链包括实数集和整数集作为其特殊情形, 这使得人们可以在测度链的框架下同时研究连续系统和离散系统. 我们将来的目标是把最新的有关图度量空间或者 Banach 代数上的图锥度量空间中不动点方面的成果运用于测度链上的非线性动力方程边值问题, 建立其解的存在性方面的结果.

参考文献

- [1] Fréchet, M.M. (1906) Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **22**, 1-72. <https://doi.org/10.1007/bf03018603>
- [2] Banach, S. (1922) Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*, **3**, 133-181. <https://doi.org/10.4064/fm-3-1-133-181>
- [3] Ran, A. and Reurings, M. (2003) A Fixed Point Theorem in Partially Ordered Sets and Some Applications to Matrix Equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **132**, 1435-1443. <https://doi.org/10.1090/s0002-9939-03-07220-4>
- [4] Jachymski, J. (2008) The Contraction Principle for Mappings on a Metric Space with a Graph. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **136**, 1359-1373. <https://doi.org/10.1090/s0002-9939-07-09110-1>
- [5] Chifu, C. and Petruşel, G. (2012) Generalized Contractions in Metric Spaces Endowed with a Graph. *Fixed Point Theory and Applications*, **2012**, Article No. 161. <https://doi.org/10.1186/1687-1812-2012-161>
- [6] Shukla, S., Radenović, S. and Vetro, C. (2017) Graphical Metric Space: A Generalized Setting in Fixed Point Theory. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, **111**, 641-655. <https://doi.org/10.1007/s13398-016-0316-0>
- [7] Chuensupantharat, N., Kumam, P., Chauhan, V., Singh, D. and Menon, R. (2019) Graphic Contraction Mappings via Graphical B-Metric Spaces with Applications. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **42**, 3149-3165. <https://doi.org/10.1007/s40840-018-0651-8>
- [8] Baradol, P., Gopal, D. and Radenović, S. (2020) Computational Fixed Points in Graphical Rectangular Metric Spaces with Application. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **375**, Article ID: 112805.
- [9] Huang, L. and Zhang, X. (2007) Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of Contractive Mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **332**, 1468-1476. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.03.087>
- [10] Liu, H. and Xu, S. (2013) Cone Metric Spaces with Banach Algebras and Fixed Point Theorems of Generalized Lipschitz Mappings. *Fixed Point Theory and Applications*, **2013**, Article No. 320. <https://doi.org/10.1186/1687-1812-2013-320>
- [11] Shukla, S., Dubey, N. and Shukla, R. (2023) Fixed Point Theorems in Graphical Cone Metric Spaces and Application to a System of Initial Value Problems. *Journal of Inequalities and Applications*, **2023**, Article No. 91. <https://doi.org/10.1186/s13660-023-03002-3>
- [12] Aryanpour, L., Rahimi, H. and Soleimani Rad, G. (2020) Fixed Point Results for Hardy-Rogers Type Contractions with Respect to a C-Distance in Graphical Cone Metric Spaces. *Issues of Analysis*, **27**, 27-37. <https://doi.org/10.15393/j3.art.2020.6850>
- [13] Rudin, W. (1991) *Functional Analysis*. McGraw-Hill.