

一类线性随机时滞微分方程半隐式 Euler-Maruyama 方法的显式均方指数稳定性充分判据

刘 皓

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2026年6月15日; 录用日期: 2026年7月9日; 发布日期: 2026年7月16日

摘 要

本文研究一类标量线性随机时滞微分方程半隐式 Euler-Maruyama 方法的均方稳定性。针对含线性耗散、离散时滞反馈和乘性噪声的线性测试模型, 先由 Itô 公式与 Halanay 型不等式给出连续随机时滞微分方程零解均方指数稳定的显式充分条件, 再构造带参数 $\theta \in [0, 1]$ 的半隐式 Euler-Maruyama 格式, 其中当前漂移项按 θ -隐式方式处理, 时滞项和扩散项保持显式。通过二阶矩递推估计, 得到数值均方指数稳定的可检验充分判据 $q_\theta(h) < 1$ 。进一步证明, 当原方程满足解析稳定性条件时, 该格式在充分小且与时滞相容的步长下保持均方指数稳定性。需要说明的是, 本文判据属于保守的二阶矩上界型充分条件, 旨在提供一个便于直接计算和数值验证的稳定性分析框架, 并不声称给出最优稳定域或充要条件。数值实验在所选参数下展示了半隐式参数对由本文充分判据刻画的可保证稳定区域的改善作用。

关键词

随机时滞微分方程, 半隐式 Euler-Maruyama 方法, 均方稳定性, 均方指数稳定, 稳定域

Square Exponential Stability of a Semi-Implicit Euler-Maruyama Method for a Class of Linear Stochastic Delay Differential Equations

Hao Liu

College of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: June 15, 2026; accepted: July 9, 2026; published: July 16, 2026

文章引用: 刘皓. 一类线性随机时滞微分方程半隐式 Euler-Maruyama 方法的显式均方指数稳定性充分判据[J]. 应用数学进展, 2026, 15(7): 75-83. DOI: 10.12677/aam.2026.157303

Abstract

This paper investigates the mean-square stability of a semi-implicit Euler-Maruyama method for a scalar linear stochastic delay differential equation with linear dissipation, discrete delay feedback and multiplicative noise. An explicit sufficient condition for the mean-square exponential stability of the zero solution of the underlying equation is first obtained by Itô's formula and a Halanay-type inequality. A semi-implicit Euler-Maruyama scheme with parameter $\theta \in [0, 1]$ is then constructed, where the current drift term is treated in a θ -implicit manner while the delay and diffusion terms are treated explicitly. A directly verifiable sufficient criterion $q_\theta(h) < 1$ for mean-square exponential stability is derived from a second-moment recurrence estimate. Further proof demonstrates that when the original equation satisfies the analytic stability condition, the scheme maintains mean-square exponential stability with a sufficiently small step size compatible with time delay. It should be noted that the criterion presented in this paper is a conservative second-moment upper bound sufficient condition, aiming to provide a stability analysis framework that facilitates direct calculation and numerical verification, without claiming to give an optimal stability region or necessary and sufficient conditions. Numerical experiments, under the selected parameters, demonstrate the improvement effect of semi-implicit parameters on the guaranteed stability region characterized by the sufficient criterion presented in this paper.

Keywords

Stochastic Delay Differential Equation, Semi-Implicit Euler-Maruyama Method, Mean-Square Stability, Mean-Square Exponential Stability, Stability Region

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随机微分方程及其数值方法是随机动力系统长期行为分析中的基本工具, 相关理论可参见 Kloeden 和 Platen [1]、Higham [2] [3] 以及 Mao [4] 等文献。与无时滞情形相比, 随机时滞微分方程的当前演化依赖历史状态, 其数值逼近与稳定性分析更为复杂。Baker 和 Buckwar [5]、Buckwar [6]、Mao [7] 对随机时滞或随机泛函微分方程的数值方法进行了系统研究。均方稳定性通过二阶矩衰减刻画随机系统的稳定行为, 是随机时滞方程数值稳定性研究中的常用指标。

Euler-Maruyama 方法形式简单, 但在耗散较强或步长较大时, 显式格式的稳定性条件通常较为严格。为改善数值稳定性, 隐式、半隐式和 θ 型随机数值方法已被广泛研究。Higham [3] 研究了随机 θ 方法的均方与渐近稳定性; Liu、Cao 和 Fan [8] 研究了线性随机微分延迟方程半隐式 Euler 方法的收敛性与稳定性; Wang 和 Chen [9] 建立了非线性中立型随机时滞方程半隐式 Euler 方法的均方稳定性结果; 随机时滞方程 Euler 型方法、Runge-Kutta 型方法以及稳定性等价问题还可参见文献 [10]–[12]。

需要特别说明的是, 本文不把“半隐式 Euler 方法”或“线性随机时滞方程的均方稳定性”作为新的理论方向。已有文献已经系统研究了相关问题, 特别是 Liu、Cao 和 Fan [8] 已对线性随机微分延迟方程半隐式 Euler 方法的收敛性、MS-稳定性和 GMS-稳定性进行了较完整分析。与这些较一般的理论研究相比, 本文仅针对一个标量线性测试模型, 从二阶矩递推出发给出保守但形式简单的显式充分判据, 并用

稳定域图、二阶矩递推和 Monte Carlo 实验说明该判据的计算可操作性。进一步说,与已有文献中较一般的 MS-稳定性和 GMS-稳定性理论相比,本文目的不是给出新的最优稳定域,而是给出形式显式、便于计算和数值复现的二阶矩充分判据。

本文考虑如下标量线性随机时滞微分方程:

$$dX(t) = (aX(t) + bX(t-\tau))dt + \sigma X(t)dW(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

其中 $a, b, \sigma \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$ 为常时滞, $W(t)$ 为一维标准布朗运动。本文的主要工作是:构造带参数 $\theta \in [0, 1]$ 的半隐式 Euler-Maruyama 格式,推导形式简单的均方稳定性充分判据,证明小步长下的稳定性保持性质,并通过稳定域图与 Monte Carlo 实验说明该判据的可操作性。显式 Euler-Maruyama 格式对应 $\theta = 0$ 的特殊情形,本文数值部分重点讨论 $\theta > 0$ 时半隐式处理对由本文充分判据刻画的可保证稳定区域的改善。本文不声称所得判据优于已有 MS-稳定性或 GMS-稳定性结果,也不将其表述为最优稳定域。

2. 模型与解析稳定性

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq -\tau}, \mathbb{P})$ 为满足通常条件的完备滤过概率空间, $W(t)$ 为一维标准布朗运动。方程(1)配以初始条件

$$X(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \quad (2)$$

其中 φ 为 $\mathcal{F}_0$ -可测连续随机函数,并满足 $\mathbb{E} \sup_{-\tau \leq s \leq 0} |\varphi(s)|^2 < \infty$ 。由于方程系数线性增长且 Lipschitz 连续,方程(1)存在唯一强解并具有有限二阶矩。

定义 2.1 若存在常数 $C > 0$ 和 $\lambda > 0$, 使得任意满足(2)的初始函数对应的解满足

$$\mathbb{E}|X(t)|^2 \leq Ce^{-\lambda t} \mathbb{E} \sup_{-\tau \leq s \leq 0} |\varphi(s)|^2, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

则称方程(1)的零解均方指数稳定。

本文使用如下 Halanay 型比较不等式[13]: 设非负函数 u 在 $[-\tau, \infty)$ 上连续,并在 $t \geq 0$ 上右可导。若存在常数 $\alpha > \beta \geq 0$, 使得 $u'(t) \leq -\alpha u(t) + \beta M(t)$, 其中 $M(t) = \sup\{u(s) : t - \tau \leq s \leq t\}$, 则存在常数 $C \geq 1$ 和 $\lambda > 0$, 使得 $u(t) \leq C \exp(-\lambda t) M_0$, 其中 $M_0 = \sup\{u(s) : -\tau \leq s \leq 0\}$ 。本文仅使用该结论的充分性;该不等式可由标准比较法或 Halanay 型不等式直接推出。

引理 2.1 设 $X(t)$ 为方程(1)的解, 则对 $t \geq 0$, 有

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}|X(t)|^2 \leq (2a + \sigma^2 + |b|) \mathbb{E}|X(t)|^2 + |b| \mathbb{E}|X(t-\tau)|^2. \quad (4)$$

证明 由 Itô 公式可得

$$d|X(t)|^2 = \left((2a + \sigma^2) |X(t)|^2 + 2bX(t)X(t-\tau) \right) dt + 2\sigma |X(t)|^2 dW(t). \quad (5)$$

取期望并利用随机积分项期望为零及 $2|xy| \leq x^2 + y^2$, 即得(4)。证毕。

定理 2.1 若参数满足

$$2a + \sigma^2 + 2|b| < 0, \quad (6)$$

则方程(1)的零解均方指数稳定。

证明 令 $u(t) = \mathbb{E}|X(t)|^2$, $\alpha = -(2a + \sigma^2 + |b|)$, $\beta = |b|$ 。由条件(6)可知 $\alpha > \beta \geq 0$ 。根据引理 2.1, 有

$$u'(t) \leq -\alpha u(t) + \beta \max_{t-\tau \leq s \leq t} u(s). \quad (7)$$

由上述 Halanay 型比较不等式, 并注意到初始段上的二阶矩有界, 可得存在 $C, \lambda > 0$, 使得定义 2.1 中的估计式(3)成立。这里 Halanay 不等式中的初始二阶矩上确界由定义 2.1 右端的初始路径二阶矩上确界控制。因此方程(1)的零解均方指数稳定。证毕。

3. 半隐式 Euler-Maruyama 格式与二阶矩判据

取均匀网格 $t_k = kh$ 。为避免插值带来的额外技术问题, 假设 $\tau = mh$, 其中 m 为正整数。记 $Y_k \approx X(t_k)$, $\Delta W_k = W(t_{k+1}) - W(t_k)$ 。给定 $\theta \in [0, 1]$, 定义半隐式 Euler-Maruyama 格式

$$Y_{k+1} = Y_k + ah((1-\theta)Y_k + \theta Y_{k+1}) + bhY_{k-m} + \sigma Y_k \Delta W_k. \quad (8)$$

初始值为 $Y_k = \varphi(t_k)$, $k = -m, 1-m, \dots, 0$; 当 $1-\theta ah \neq 0$ 时, (8)可写为

$$Y_{k+1} = \frac{1+(1-\theta)ah + \sigma \Delta W_k}{1-\theta ah} Y_k + \frac{bh}{1-\theta ah} Y_{k-m}, \quad k \geq 0. \quad (9)$$

其中 $\theta = 0$ 对应显式 Euler-Maruyama 格式, $\theta = 1$ 对应当前漂移项完全隐式的格式。本文主要关心耗散主导情形 $a < 0$, 此时对 $\theta \in [0, 1]$ 和 $h > 0$ 有 $1-\theta ah > 0$ 。

定义 3.1 若存在 $C > 0$ 和 $\lambda > 0$, 使得数值解满足

$$\mathbb{E}|Y_k|^2 \leq Ce^{-\lambda t_k} \max_{-m \leq j \leq 0} \mathbb{E}|Y_j|^2, \quad k \geq 0, \quad (10)$$

则称格式(9)均方指数稳定。

引理 3.1 设 Y_k 由(9)给出, 且 $a < 0$ 。则对任意 $k \geq 0$, 有

$$\mathbb{E}|Y_{k+1}|^2 \leq q_\theta(h) \max\{\mathbb{E}|Y_k|^2, \mathbb{E}|Y_{k-m}|^2\}, \quad (11)$$

其中

$$q_\theta(h) = \frac{(|1+(1-\theta)ah| + |b|h)^2 + \sigma^2 h}{(1-\theta ah)^2}. \quad (12)$$

证明 记 $A_k = 1+(1-\theta)ah + \sigma \Delta W_k$, $D = 1-\theta ah$ 。由于 ΔW_k 与时刻 t_k 以前的信息独立, 且 $E\Delta W_k = 0$, $E(\Delta W_k)^2 = h$, 由(9)得

$$\mathbb{E}|Y_{k+1}|^2 = \frac{1}{D^2} \mathbb{E}|A_k Y_k + bhY_{k-m}|^2. \quad (13)$$

同时, $EA_k = 1+(1-\theta)ah$, $EA_k^2 = (1+(1-\theta)ah)^2 + \sigma^2 h$ 。展开(13)的分子, 并利用 $2|xy| \leq x^2 + y^2$, 可得

$$\mathbb{E}|A_k Y_k + bhY_{k-m}|^2 \leq (|1+(1-\theta)ah| + |b|h)^2 M_k + \sigma^2 h M_k, \quad (14)$$

其中 M_k 表示式(11)右端两个二阶矩的最大值。代入(13)即得(11)。这里对交叉项采取绝对值上界处理, 因此所得判据是充分条件而非必要条件。证毕。

定理 3.1 设 $a < 0$ 。若步长 h 满足 $\tau = mh$, 其中 m 为正整数, 且

$$q_\theta(h) < 1, \quad (15)$$

则半隐式 Euler-Maruyama 格式(9)均方指数稳定。更具体地, 记

$$V_0 = \max_{-m \leq j \leq 0} \mathbb{E}|Y_j|^2,$$

则对任意 $k \geq 0$, 有

$$\mathbb{E}|Y_k|^2 \leq q_\theta(h)^{\lfloor \frac{k-1}{m+1} \rfloor + 1} V_0. \quad (16)$$

证明 记

$$v_k = \mathbb{E}|Y_k|^2, \quad q = q_\theta(h), \quad V_0 = \max_{-m \leq j \leq 0} v_j.$$

由引理 3.1, 有

$$v_{k+1} \leq q \max\{v_k, v_{k-m}\}, \quad k \geq 0. \quad (17)$$

若 $V_0 = 0$, 则由(17)立即得到 $v_k = 0$, 结论显然。下设 $V_0 > 0$ 。对 $r = 0, 1, 2, \dots$, 定义整数分块

$$B_r = \{k \in \mathbb{Z} : (r-1)(m+1) < k \leq r(m+1)\}.$$

于是 $B_0 = \{-m, -m+1, \dots, 0\}$ 。下面证明, 对每个 $r \geq 0$ 和 $k \in B_r$, 有

$$v_k \leq q^r V_0. \quad (18)$$

当 $r = 0$ 时, (18)正是 V_0 的定义。假设(18)对第 r 个分块及其以前的所有分块均成立。下面证明它对 B_{r+1} 成立, 并在分块 B_{r+1} 内按指标从小到大作普通归纳。

设 $k+1 \in B_{r+1}$ 。由 B_{r+1} 的定义可知

$$r(m+1) < k+1 \leq (r+1)(m+1),$$

从而

$$r(m+1) \leq k \leq (r+1)(m+1) - 1.$$

因此, k 要么属于 B_r , 要么属于 B_{r+1} 中已经由同一分块内部归纳控制的前面指标。同时, 由上述不等式可得

$$(r-1)(m+1) < k-m \leq r(m+1),$$

故

$$k-m \in B_r.$$

于是由分块归纳假设和同一分块内的内部归纳假设, 得到

$$v_k \leq q^r V_0, \quad v_{k-m} \leq q^r V_0.$$

代入(17), 可得

$$v_{k+1} \leq q \max\{v_k, v_{k-m}\} \leq q^{r+1} V_0.$$

由分块归纳法可知, (18)对任意 $r \geq 0$ 成立。因此, 对任意 $k \geq 0$, 有

$$v_k \leq q^{\lfloor \frac{k-1}{m+1} \rfloor + 1} V_0,$$

即估计式(16)成立。

最后, 由 $q = q_\theta(h) < 1$ 且 $q \geq 0$ 可知: 若 $q = 0$, 则由(17)可直接得到充分强的衰减结论; 若 $0 < q < 1$, 令

$$\lambda = -\frac{\log q}{(m+1)h} > 0.$$

由于

$$\text{floor}\left(\frac{k-1}{m+1}\right)+1 \geq \frac{k}{m+1}, \quad k \geq 0,$$

于是

$$v_k \leq q^{k/(m+1)} V_0 = \exp(-\lambda k h) V_0.$$

因此格式(9)均方指数稳定。证毕。

推论 3.1 若原方程参数满足(6)，则对任意固定 $\theta \in [0,1]$ ，存在 $h_0 > 0$ ，使得对任意 $0 < h < h_0$ 且 τ/h 为正整数的步长，半隐式格式(9)均方指数稳定。

证明 由(12)知 $q_\theta(0) = 1$ 。对充分小的 h ，有 $1 - \theta ah > 0$ ，并且

同时，由于 $a < 0$ 且 $\theta \in [0,1]$ 固定，可进一步取 h_0 足够小，使得 $1 + (1 - \theta)ah > 0$ ；因此在 $h = 0$ 附近展开 $q_\theta(h)$ 时可以去掉相应绝对值。

$$q_\theta(h) < 1 \Leftrightarrow (2a + 2|b| + \sigma^2)h + \left(((1 - \theta)a + |b|)^2 - \theta^2 a^2 \right) h^2 < 0. \quad (19)$$

由于一次项系数 $2a + 2|b| + \sigma^2 < 0$ ，故存在 $h_0 > 0$ ，使得 $0 < h < h_0$ 时 $q_\theta(h) < 1$ 。再由定理 3.1 得结论。证毕。

注 3.1 判据(15)是充分条件，而非必要条件。当 $q_\theta(h) \geq 1$ 时，只表示本文的二阶矩上界判据不再适用，不能由此断定数值解必然发散。

4. 稳定域比较与数值实验

当 $\theta = 0$ 时，(12)退化为显式 Euler-Maruyama 格式的判据

$$q_0(h) = (1 + ah + |b|h)^2 + \sigma^2 h. \quad (20)$$

当 $a < 0$ 且 $\theta > 0$ 时，分母 $(1 - \theta ah)^2$ 会增强当前耗散项的稳定化作用。由于分子中仍含绝对值项和时滞项，本文不声称 $q_\theta(h)$ 对 θ 在所有参数下单调下降，而只在给定参数下比较由充分判据给出的可保证稳定区域。

因此，表 1 只用于比较本文充分判据在不同 θ 下给出的可检验稳定区域，不作为半隐式方法真实稳定域的必要性或最优性判断。对于更一般的 MS-稳定性、GMS-稳定性或非线性模型，应结合已有理论结果作进一步分析。

本文取如下参数：

$$a = -3, \quad b = 0.5, \quad \sigma = 1, \quad \tau = 1. \quad (21)$$

此时 $2a + \sigma^2 + 2|b| = -4 < 0$ ，原方程满足定理 2.1 的解析稳定性条件。表 1 中所列步长均满足 $\tau/h \in \mathbb{N}$ ，因而与本文无插值格式的时滞网格假设相容。不同步长和不同 θ 下的稳定性判据值见表 1。

Table 1. Stability criterion values for different step sizes and different θ

表 1. 不同步长和不同 θ 下的稳定性判据值

步长 h	$q_0(h)$	$q_{0.5}(h)$	$q_1(h)$	判据说明
0.2	0.4500	0.4970	0.5508	三者均满足充分判据
0.25	0.3906	0.4298	0.4949	三者均满足充分判据
0.5	1.0625	0.2449	0.3300	显式判据失效，半隐式判据满足
1.0	7.2500	0.3200	0.2031	半隐式优势明显

下面结合 Monte Carlo 模拟和二阶矩递推说明理论结果。初始函数取 $\phi(s) = 1, s \in [-\tau, 0]$ 。Monte Carlo 实验用 $N = 3000$ 条样本路径估计 $\mathbb{E}|Y_k|^2$ ，每条样本路径按照格式(9)生成，其中 $\Delta W_k \sim N(0, h)$ 。除特别说明外，数值实验取终止时间 $T = 20$ ，并在 MATLAB 中固定随机数 rng (20260521, 'twister')；同一组比较实验使用相同的布朗增量样本，图中纵轴采用对数尺度，同时给出由格式(9)诱导的二阶矩递推曲线作为参考，以减小强噪声情形下有限样本 Monte Carlo 估计波动的影响。

取参数(21)与 $h = 1$ ，此时 $\tau = 1$ ，故延迟步数 $m = 1$ 。首先依据表 1 中的保守充分判据进行稳定性分析：当 $\theta = 0$ 时，显式格式不满足 $q_\theta(h) < 1$ ；当 $\theta = 0.5$ 和 $\theta = 1$ 时，两种半隐式格式均满足相应的充分判据。图 1 给出了三种 θ 取值下二阶矩的 Monte Carlo 数值估计曲线。可以看出，显式格式的二阶矩呈增长趋势，而两种半隐式格式的二阶矩呈衰减趋势，数值结果与表 1 所给出的保守充分判据相一致。

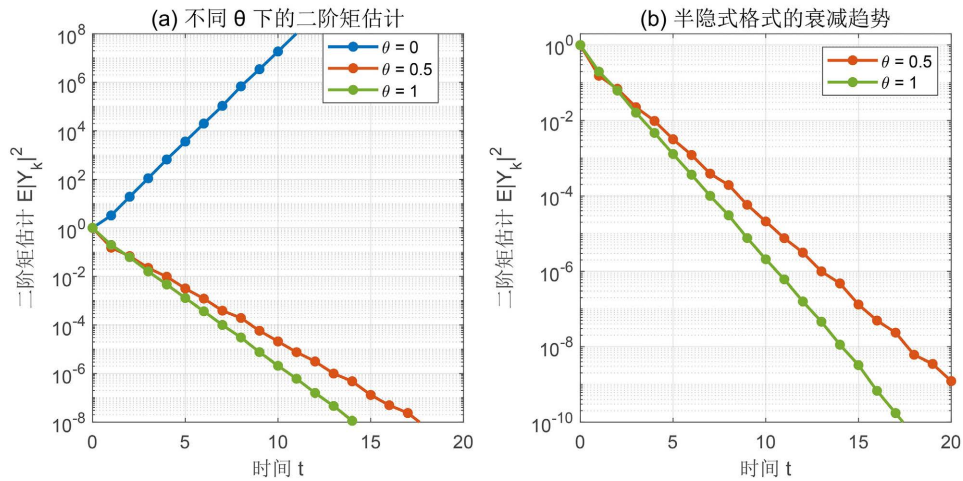


Figure 1. Monte Carlo estimates of the second moment for different θ
图 1. 不同 θ 下 Monte Carlo 二阶矩估计的变化趋势

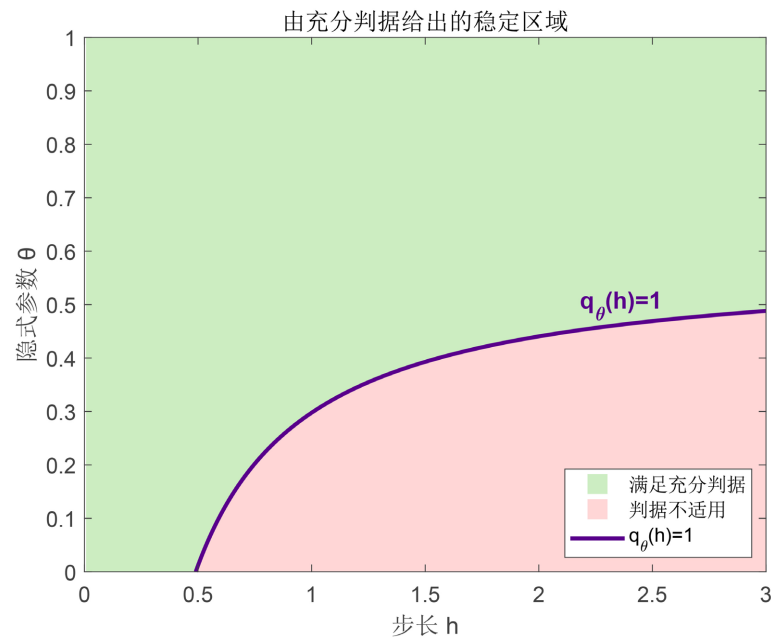


Figure 2. Schematic stability region determined by the sufficient stability criterion
图 2. 由稳定性充分判据给出的稳定区域示意图

由本文充分判据描述的稳定域示意图见图 2。图中绿色区域表示 $q_\theta(h) < 1$ ，即本文充分判据能够保证均方指数稳定；红色区域表示 $q_\theta(h) \geq 1$ ，即该判据不再适用。需要说明的是，图 2 仅展示判据函数在连续参数平面上的延拓示意区域，并不表示所有点都对应本文无插值格式下可直接采用的步长；严格用于格式时仍需满足 $\tau/h \in \mathbb{N}$ 。在本文所选参数下，随着 θ 增大，由充分判据 $q_\theta(h) < 1$ 描述的可保证稳定区域明显扩大。

最后固定 $a = -3$ ， $b = 0.5$ ， $h = 1$ ， $\tau = 1$ ， $\theta = 1$ ，分别取 $\sigma = 1, 2, 4$ 。此时

$$q_1(1) = \frac{(1+|b|)^2 + \sigma^2}{(1-a)^2}, \quad (22)$$

对应数值约为 0.2031、0.3906、1.1406。不同噪声强度下的二阶矩递推曲线与 Monte Carlo 对照结果见图 3。为提高强噪声情形下数值结果的可复现性，图 3 中实线由格式(9)对应的二阶矩递推系统直接计算，虚线为 $N = 3000$ 条样本路径的 Monte Carlo 估计。具体地，在参数 $h = 1$ 、 $\tau = 1$ 、 $\theta = 1$ 、 $a = -3$ 、 $b = 0.5$ 下，格式可写为

$$Y_{k+1} = R_k Y_k + \gamma Y_{k-1}, \quad R_k = \frac{1 + \sigma \Delta W_k}{4}, \quad \gamma = \frac{1}{8}.$$

令二阶矩和相邻步交叉矩分别为

$$M_k = \mathbb{E}|Y_k|^2, \quad C_k = \mathbb{E}(Y_k Y_{k-1}).$$

由于 R_k 与 $\mathcal{F}_k$ 独立，并且

$$\mathbb{E}R_k = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{E}R_k^2 = \frac{1 + \sigma^2}{16},$$

可得递推关系

$$M_{k+1} = \frac{1 + \sigma^2}{16} M_k + \frac{1}{16} C_k + \frac{1}{64} M_{k-1},$$

$$C_{k+1} = \frac{1}{4} M_k + \frac{1}{8} C_k.$$

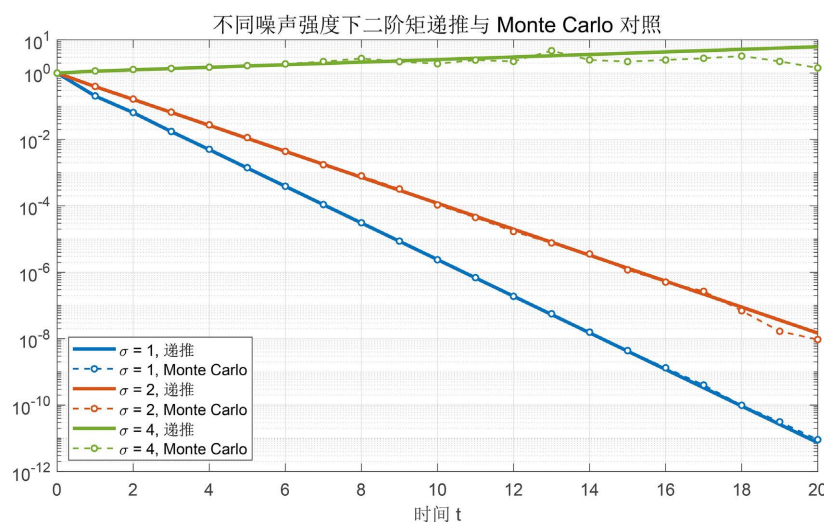


Figure 3. Second-moment recurrence and Monte Carlo estimates of the semi-implicit scheme under different noise intensities

图 3. 不同噪声强度下半隐式格式的二阶矩递推与 Monte Carlo 对照

初始常值函数 $\varphi \equiv 1$ 时取 $M_{-1} = M_0 = C_0 = 1$ 。据此得到图 3 中的实线。由图 3 可见, 当 $\sigma = 1, 2$ 时, 二阶矩递推曲线与 Monte Carlo 估计均呈衰减趋势; 当 $\sigma = 4$ 时, 本文充分判据不再适用, 二阶矩递推曲线表现出增长趋势, 说明乘性噪声强度是影响均方稳定性的重要因素。需要强调的是, Monte Carlo 曲线仅作为有限样本数值对照, 图 3 不用于判断均方稳定边界或步长取值优劣性。

5. 结论

本文在已有随机时滞方程数值稳定性研究基础上, 针对一类标量线性随机时滞微分方程, 讨论了半隐式 Euler-Maruyama 方法的一个显式均方稳定性充分判据。首先给出原方程零解均方指数稳定的充分条件(6); 随后构造带参数 $\theta \in [0, 1]$ 的半隐式格式, 并通过二阶矩递推估计得到数值均方指数稳定的判据(15)。进一步证明, 当原方程满足解析稳定性条件时, 半隐式格式在充分小且与时滞相容的步长下保持该稳定性。数值实验表明, 在所选耗散主导参数下, 半隐式参数能够扩大由本文充分判据刻画的可保证稳定区域, 并改善显式格式在较大步长下的稳定性表现。

需要指出的是, 本文条件是显式可检验的保守充分条件, 尚非必要条件, 也不意图替代已有文献中更一般的 MS-稳定性、GMS-稳定性或非线性稳定性理论。本文的价值主要在于给出一个便于直接计算、数值验证和示例说明的线性测试模型分析框架; 在正式使用时, 应将其定位为对已有理论的补充性、可计算示例, 而不是新的最优稳定域理论。后续可进一步研究多维线性系统、非线性随机时滞方程、变时滞情形以及更精细的必要或充要稳定性判据。

参考文献

- [1] Kloeden, P.E. and Platen, E. (1992) Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer.
- [2] Higham, D.J. (2001) An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations. *SIAM Review*, **43**, 525-546. <https://doi.org/10.1137/s0036144500378302>
- [3] Higham, D.J. (2000) Mean-Square and Asymptotic Stability of the Stochastic Theta Method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **38**, 753-769. <https://doi.org/10.1137/s003614299834736x>
- [4] Mao, X. (2007) Stochastic Differential Equations and Applications. 2nd Edition, Horwood Publishing.
- [5] Baker, C.T.H. and Buckwar, E. (2000) Numerical Analysis of Explicit One-Step Methods for Stochastic Delay Differential Equations. *LMS Journal of Computation and Mathematics*, **3**, 315-335. <https://doi.org/10.1112/s1461157000000322>
- [6] Engelborghs, K., Luzyanina, T. and Roose, D. (2000) Numerical Bifurcation Analysis of Delay Differential Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **125**, 265-275. [https://doi.org/10.1016/s0377-0427\(00\)00472-6](https://doi.org/10.1016/s0377-0427(00)00472-6)
- [7] Mao, X. (2003) Numerical Solutions of Stochastic Functional Differential Equations. *LMS Journal of Computation and Mathematics*, **6**, 141-161. <https://doi.org/10.1112/s1461157000000425>
- [8] Liu, M., Cao, W. and Fan, Z. (2004) Convergence and Stability of the Semi-Implicit Euler Method for a Linear Stochastic Differential Delay Equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **170**, 255-268. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2004.01.040>
- [9] Wang, W. and Chen, Y. (2011) Mean-Square Stability of Semi-Implicit Euler Method for Nonlinear Neutral Stochastic Delay Differential Equations. *Applied Numerical Mathematics*, **61**, 696-701. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2011.01.003>
- [10] Wu, F., Mao, X. and Szpruch, L. (2010) Almost Sure Exponential Stability of Numerical Solutions for Stochastic Delay Differential Equations. *Numerische Mathematik*, **115**, 681-697. <https://doi.org/10.1007/s00211-010-0294-7>
- [11] Guo, Q., Qiu, M. and Mitsui, T. (2016) Asymptotic Mean-Square Stability of Explicit Runge-Kutta Maruyama Methods for Stochastic Delay Differential Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **296**, 427-442. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.10.014>
- [12] Ngoc, P.H.A. and Tran, K.Q. (2022) On Stability of Solutions of Stochastic Delay Differential Equations. *Systems & Control Letters*, **169**, Article 105384. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2022.105384>
- [13] Mohamad, S. and Gopalsamy, K. (2000) Continuous and Discrete Halanay-Type Inequalities. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **61**, 371-385.