

一类捕食模型的空间动力学研究

廖琳娟, 张 潼, 何秋贤, 邓永茂, 周兴杰, 黄立壮*

北部湾大学理学院, 广西 钦州

收稿日期: 2026年6月15日; 录用日期: 2026年7月9日; 发布日期: 2026年7月17日

摘 要

通过构建一类具有空间扩散的捕食模型。首先, 结合Neumann边界条件与Banach空间理论, 通过Lipschitz连续性理论, 获得模型解的适定性, 进一步地分析模型平衡点存在性。其次, 借助特征方程证明存在的平衡点是局部渐近稳定的; 最后, 通过构造Lyapunov泛函证明系统存在的平衡点是全局渐近稳定性。研究的结果丰富了捕食模型的空间动力学行为, 对种群物种可持续发展。

关键词

捕食模型, 空间动力学, Lyapunov泛函, 全局渐近稳定性

Spatial Dynamics of a Class of Diffusive Predator-Prey Models

Linjuan Liao, Tong Zhang, Qiuxian He, Yongmao Deng, Xingjie Zhou,
Lizhuang Huang*

College of Science, Beibu Gulf University, Qinzhou Guangxi

Received: June 15, 2026; accepted: July 9, 2026; published: July 17, 2026

Abstract

By constructing a class of predator-prey models with spatial diffusion, we first establish the well-posedness of solutions using Neumann boundary conditions, Banach space theory, and Lipschitz continuity theory, and further analyze the existence of equilibria. Next, with the aid of the characteristic equation, the existing equilibria are proved to be locally asymptotically stable. Finally, by constructing a Lyapunov functional, the equilibria of the system are shown to be globally asymptotically stable. The results enrich the spatial dynamics of predator-prey models and contribute to the

*通讯作者。

文章引用: 廖琳娟, 张潼, 何秋贤, 邓永茂, 周兴杰, 黄立壮. 一类捕食模型的空间动力学研究[J]. 应用数学进展, 2026, 15(7): 115-125. DOI: 10.12677/aam.2026.157307

sustainable development of populations and species.

Keywords

Predator-Prey Model, Spatial Dynamics, Lyapunov Functional, Global Asymptotic Stability

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近年来,随着人类社会经济活动的持续扩张,各类水利工程建设日益频繁,其中大坝修建、河道整治、航道开发等工程对自然水体生态系统的干扰尤为明显。这类人为干预直接改变了天然河道原本稳定的水文条件,不仅影响水流速度、流量节律、水深分布等关键流态特性,还会进一步改变水体泥沙运移、水温结构及栖息地连通性,最终对流域内水生生物乃至整个群落的空间分布格局产生深远影响,导致种群栖息地破碎化、分布范围收缩或聚集形态发生明显改变[1]。

从数学建模与理论分析的视角来看,上述由环境改变驱动的种群动态问题,具备典型的时空耦合特征,非常适合借助空间反应扩散方程进行定量刻画与机理分析。这类偏微分方程模型能够同时整合种群自身的增殖、竞争、捕食等反应过程,以及个体在空间环境中的迁移、扩散行为,既可以精准刻画生物种群数量在时间维度上的增长、衰退与动态平衡过程,又能清晰呈现其在连续空间中的扩散范围、聚集中心、边界迁移及空间异质性分布状况。凭借对时空动态的强大描述能力与良好的理论拓展性,空间反应扩散方程已成为研究生物种群动态、生态环境扰动响应及物种保护策略的重要工具,长期以来受到生物数学、数学生态学领域研究者的广泛关注与深入研究[2] [3]。

早期刻画三种群捕食模型为:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = ru_1 \left(1 - \frac{u_1}{k_1} \right) - a_1 u_1 u_3 \\ \frac{du_2}{dt} = ru_2 \left(1 - \frac{u_2}{k_2} \right) - a_2 u_2 u_3 \\ \frac{du_3}{dt} = \beta_1 a_1 u_1 u_3 + \beta_2 a_2 u_2 u_3 - a u_3 \end{cases}$$

实际中,生物之间是可以进行扩散的;显然用扩散模型刻画实际情况比用常微分方程模型更符合实际。

考虑在模型中加入逻辑斯谛增长(Logistic)和 Holling-I 型功能反应, Logistic 描述有限环境中种群数量增长模型,增长速率先升后降,最终趋于环境容纳量 k , 呈 S 型曲线; Holling-I 型功能反应描述捕食者在单位时间内,捕食种群的数量随被捕食种群密度变化的关系。

因为每个食饵种群在环境中的数量不同,因此设 k_1, k_2 为每个种群的环境容纳量。

早期的生物数学家为了解释生物种群的发展以及迁移过程,通常假设生物种群的密度在空间分布是均匀的,并建立如下的常微分方程(组)来描述[4]-[6]:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = d_1 \Delta u_1 + \varphi(u_1) - a_1 u_1 u_3, & t \in (0, +\infty) \\ \frac{du_2}{dt} = d_2 \Delta u_2 + \varphi(u_2) - a_2 u_2 u_3, & t \in (0, +\infty) \\ \frac{du_3}{dt} = d_3 \Delta v + \beta_1 a_1 u_1 u_3 + \beta_2 a_2 u_2 u_3 - a u_3, & t \in (0, +\infty) \end{cases} \quad (1)$$

其中 u_1, u_2, u_3 表示食饵种群在位置 x 和时间 t 的密度, d_1, d_2, d_3 表示两食饵种群 u_1, u_2 和捕食种群 u_3 的扩散系数, a_1, a_2 表示捕食者 u_3 对食饵 u_1, u_2 的消耗率, a 表示捕食者死亡率, β_1, β_2 表示食饵种群 u_1 和 u_2 的转换效率, Δ 为拉普拉斯算子。

在模型(1)的基础上, 令 $u_1 := u_1(x, t), u_2 := u_2(x, t), v := v(x, t)$, 其中 $\varphi(u_1) = \lambda_1 - d_1 u_1 + r_1 u_1 \left(1 - \frac{u_1}{k_1}\right)$,

$\varphi(u_2) = \lambda_2 - d_2 u_2 + r_2 u_2 \left(1 - \frac{u_2}{k_2}\right)$, 建立以下空间反应扩散模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = d_1 \Delta u_1 + \lambda_1 - d_1 u_1 + r_1 u_1 \left(1 - \frac{u_1}{k_1}\right) - a_1 u_1 u_3, & (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = d_2 \Delta u_2 + \lambda_2 - d_2 u_2 + r_2 u_2 \left(1 - \frac{u_2}{k_2}\right) - a_2 u_2 u_3, & (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty) \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} = d_3 \Delta u_3 + \beta_1 a_1 u_1 u_3 + \beta_2 a_2 u_2 u_3 - a u_3, & (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty) \\ \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = \frac{\partial u_3}{\partial \nu} = 0, & (x, t) \in \partial \Omega \times (0, +\infty) \\ u_1(x, 0) = u_1(x) \geq 0, u_2(x, 0) = u_2(x) \geq 0, u_3(x, 0) = u_3(x) \geq 0, & x \in \Omega \end{cases} \quad (2)$$

模型(2)的生物意义与模型(1)相同, r_1, r_2 是不同生物种群的内禀增长率, $\varphi(u_1)$ 和 $\varphi(u_2)$ 表示食饵种群的出生率。

2. 模型(2)解的适定性

2.1. 模型(2)非负解的存在性

首先考虑系统(2)解的适定性, 考虑以下系统

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = d_1 \Delta u_1 + \lambda_1 - d_1 u_1 + r_1 u_1 \left(1 - \frac{u_1}{k_1}\right) - a_1 u_1 u_3 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = d_2 \Delta u_2 + \lambda_2 - d_2 u_2 + r_2 u_2 \left(1 - \frac{u_2}{k_2}\right) - a_2 u_2 u_3 \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} = d_3 \Delta u_3 + \beta_1 a_1 u_1 u_3 + \beta_2 a_2 u_2 u_3 - a u_3 \end{cases} \quad (3)$$

满足以下初值条件:

$$u_1(x, 0) = u_1(x) \geq 0, u_2(x, 0) = u_2(x) \geq 0, u_3(x, 0) = u_3(x) \geq 0 \quad (4)$$

具有 Neumann 边界条件

$$\frac{\partial u_1}{\partial \nu} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = \frac{\partial u_3}{\partial \nu} = 0, (x, t) \in \partial \Omega \times (0, +\infty) \quad (5)$$

其中 $\frac{\partial}{\partial \nu}$ 表示在 $\partial\Omega$ 外法线的导数, Neumann 边界条件意味着生物种群的移动不会穿越边界 $\partial\Omega$ 。令 $\bar{X} := C(\Omega, \mathbb{R}^3)$, X 为具有完备的上确界范数 $\|\cdot\|_X$ 的 Banach 空间。即

$$\|\varphi\|_X := \max \left\{ \sup_{x \in \bar{\Omega}} \|\varphi_1(x)\|, \sup_{x \in \bar{\Omega}} \|\varphi_2(x)\|, \sup_{x \in \bar{\Omega}} \|\varphi_3(x)\| \right\}$$

$\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in X^+$, 锥 $\mathbb{R}^3$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 的具有向量 $x \geq 0$ 的子集, X 中的正锥记为 $X^+ := C(\Omega, \mathbb{R}^3)$, (X, X^+) 是一个序空间, 记 $u \geq v (u \leq v)$ 若 $u_i(x) \geq v_i(x) (u_i(x) \leq v_i(x))$ 其中 $i=1, 2, 3, x \in \Omega$ 对任意的 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in X^+$ 且 $\forall x \in \bar{\Omega}$, 定义 $F = (F_1, F_2, F_3): X^+ \rightarrow X$ 如下:

$$\begin{aligned} F_1(\phi)(x) &= \lambda_1 - d_1\phi_1(x, 0) + r_1\phi_1(x, 0) \left(1 - \frac{\phi_1(x, 0)}{k_1} \right) - a_1\phi_1(x, 0)\phi_3(x, 0) \\ F_2(\phi)(x) &= \lambda_2 - d_2\phi_2(x, 0) + r_2\phi_2(x, 0) \left(1 - \frac{\phi_2(x, 0)}{k_2} \right) - a_2\phi_2(x, 0)\phi_3(x, 0) \\ F_3(\phi)(x) &= \beta_1 a_1\phi_1(x, 0)\phi_3(x, 0) + \beta_2 a_2\phi_2(x, 0)\phi_3(x, 0) - a\phi_3(x, 0) \end{aligned} \quad (6)$$

显然, F 是在 X^+ 中的任意有界子集上的 Lipschitz [7] 连续的。系统(3)和系统(4)可被改写成如下抽象泛函微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= Au + F(u), t > 0, \\ u_0 &= \phi \in X^+. \end{aligned}$$

其中 $u = (u_1, u_2, u_3)$, $Au = (d_1, d_2, d_3)$, $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ 。

下面, 对系统(2)解的适定性给出如下定理:

定理 1 对于任意给定的初值 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in X^+$, 系统(3)满足初值(4)~(5)的唯一非负解

$u(t, x; \phi) = (u_1(t, x; \phi), u_2(t, x; \phi), u_3(t, x; \phi))$ 且对任意 $t \in [0, +\infty)$, $u(t, x; \phi) \in X^+$ 是有界的。

证明 对任意的 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in X^+$, 定义

$$F(t, \phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 - d_1\phi_1(0) + r_1\phi_1(0) \left(1 - \frac{\phi_1(0)}{k_1} \right) - a_1\phi_1(0)\phi_3(0) \\ \lambda_2 - d_2\phi_2(0) + r_2\phi_2(0) \left(1 - \frac{\phi_2(0)}{k_2} \right) - a_2\phi_2(0)\phi_3(0) \\ \beta_1 a_1\phi_1(0)\phi_3(0) + \beta_2 a_2\phi_2(0)\phi_3(0) - a\phi_3(0) \end{pmatrix}$$

易知 $F(t, \phi)$ 在 $(t, \phi) \in R \times X^+$ 是连续的, 且在 X^+ 的任意紧集上 Lipschitz 连续, 则系统(3)在解存在的最大区间 $[0, \sigma_{\max})$ 上有唯一解 $u(t, \phi)$, 其中 $u_0 = \phi$ 。并且当 $\phi_3(0) = 0, i=1, 2, 3$ 时, $F(t, \phi) \geq 0$ 。因此任意 $\phi \in X^+, t \in [0, \sigma_{\max})$, $u_i(t, \phi) \geq 0$ 。见文献[8]中定理 3, 4, $i=1, 2, 3$ 。由系统(3)中的第一个方程, 得到

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} \cdot d_1 \Delta u_1 = \lambda_1 - d_1 u_1 + r_1 u_1 \left(1 - \frac{u_1}{k_1} \right) - a_1 u_1 u_3 \leq \lambda_1 - d_1 u_1 + r_1 u_1 \left(1 - \frac{u_1}{k_1} \right),$$

由比较定理, 有 $\limsup_{t \rightarrow +\infty} u_1(x, t) \leq T_1$, 且 T_1 满足 $\lambda_1 - d_1 u_1 + r_1 u_1 \left(1 - \frac{u_1}{k_1} \right) = 0$ 。

因此 $u_1(x, t)$ 在 $t \in [0, \sigma_{\max})$ 是有界的。同理得 $u_2(x, t)$ 在 $t \in [0, \sigma_{\max})$ 上也一定有界。
定义 $M(x, t) = \beta_1 u_1(x, t) + \beta_2 u_2(x, t) + u_3(x, t)$ 。

$$\begin{aligned}\frac{\partial M(x, t)}{\partial t} &= \beta_1 \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} + \beta_2 \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial u_3(x, t)}{\partial t} \\ &= \beta_1 d_1 \Delta u_1 + \beta_1 \varphi(u_1) + \beta_2 d_2 \Delta u_2 + \beta_2 \varphi(u_2) + d_3 \Delta u_3 - a u_3 \\ \Rightarrow \frac{\partial M(x, t)}{\partial t} - \beta_1 d_1 \Delta u_1 - \beta_2 d_2 \Delta u_2 - d_3 \Delta u_3 &\leq \beta_1 T_1 + \beta_2 T_2 - a u_3\end{aligned}$$

由比较定理知, $M(x, t)$ 有界, 意味着 $u_2(x, t)$ 有界。

2.2. 系统(2)平衡点存在性分析

$$\text{令} \begin{cases} \varphi(u_1) - a_1 u_1 u_3 = 0 \\ \varphi(u_2) - a_2 u_2 u_3 = 0 \\ \beta_1 a_1 u_1 u_3 + \beta_2 a_2 u_2 - a u_3 = 0 \end{cases}, \text{ 其中 } \varphi(x) = \lambda - dx + rx \left(1 - \frac{x}{k}\right).$$

易知 $u_3 = 0$ 时, 平衡点 $E_0 = (u_1^*, u_2^*, 0)$ 。

$$\text{其中 } \varphi(u_1^*) = 0, \varphi(u_2^*) = 0, u_i^* = \frac{k_i(d - r_i) \pm \sqrt{k_i^2(d - r_i)^2 + 4k_i r_i \lambda_i}}{2r_i} (i=1, 2)。$$

由 $\varphi(u_1) - a_1 u_1 u_3 = 0$, 则 $\frac{\varphi(u_1)}{u_1} = a_1 u_3$ 。

$$\text{令 } F(u_1) = \frac{\varphi(u_1)}{u_1}, \text{ 则 } \lim_{u_1 \rightarrow 0} \frac{\varphi(u_1)}{u_1} = \lim_{u_1 \rightarrow 0} \frac{\lambda_1}{u_1} = +\infty,$$

$$\lim_{u_1 \rightarrow u_1^*} \frac{F(u_1)}{u_1} = \lim_{u_1 \rightarrow u_1^*} \frac{0}{u_1} = 0, \text{ 且 } F'(u_1) = \frac{\varphi'(u_1)u_1 - \varphi(u_1)}{u_1^2} = \frac{-\lambda - \frac{r_1}{k_1}u_1^2}{u_1^2} < 0。$$

意味着 $F(u_1)$ 在 $(0, u_1^*)$ 内有唯一解满足 $\frac{\varphi(u_1^*)}{u_1^*} = a_1 u_3^*$ 。

同理可得, 唯一解 $u_2^* \in (0, u_2^*)$ 满足 $\frac{\varphi(u_2^*)}{u_2^*} = a_2 u_3^*$ 。

所以模型(2)正平衡点为 $E^*(u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ 。

3. 平衡点的稳定性

3.1. 平衡点的局部稳定性

在本节中, 通过分析平陆运河系统(2)的两个平衡点 E^0 , E^* 相应的特征方程, 研究它们的局部稳定性。

令 $0 = \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots < \mu_n < \dots$ 是 Ω 上具有 Neumann 边界算子 $-\Delta$ 的特征值, 且 $E(\mu_i)$ 是 $C^1(\Omega)$ 上与 μ_i 相对应的特征空间[9] [10]。

令 $X = [C^1(\Omega)]^3$, $\{\phi_{ij} : j=1, 2, \dots, \dim E(\mu_i)\}$ 是 $E(\mu_i)$ 上的一组标准正交基。且 $X_{ij} = \{c\phi_{ij} : c \in \mathbb{R}^3\}$, 则

$$X := \bigoplus_{i=0}^{\infty} X_i, X_i := \bigoplus_{j=1}^{\dim E(\mu_i)} X_{ij}, \text{ 令 } LM = D\Delta M + g(E)M, \text{ 其中 } D = \text{diag}(d_1, d_2, d_3), M = (u_1, u_2, u_3)^T,$$

$E = (\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3})$ 任意平衡点, 且

$$g(E)M = \begin{pmatrix} [\varphi^1(\bar{u}_1) - a_1\bar{u}_3]u_1 - a_1\bar{u}_1u_3 \\ [\varphi^1(\bar{u}_2) - a_2\bar{u}_3]u_2 - a_2\bar{u}_2u_3 \\ \beta_1a_1\bar{u}_3u_1 + \beta_2a_2\bar{u}_3u_2 + (\beta_1a_1\bar{u}_1 + \beta_2a_2\bar{u}_2 - a)\bar{u}_3 \end{pmatrix},$$

对任意 $i \geq 1$, X_i 在算子 L 下是不变的, 且 ξ 是 L 的一个特征值, 当且仅当对于某个 $i \geq 1$ 是矩阵 $-\mu_i D + g(E)$ 的特征值, 因此, 在 X_i 上就有一个特征向量。

记 $-\mu_i D + g(E)$ 特征方程如下

$$\begin{vmatrix} \lambda + \mu_i d_1 - (\varphi^1(\bar{u}_1) - a_1\bar{u}_3) & 0 & -a_1\bar{u}_1 \\ 0 & \lambda + \mu_i d_2 - (\varphi^1(\bar{u}_2) - a_2\bar{u}_3) & -a_2\bar{u}_2 \\ -\beta_1a_1\bar{u}_3 & -\beta_2a_2\bar{u}_3 & \lambda + \mu_i d_3 - (\beta_1a_1\bar{u}_1 + \beta_2a_2\bar{u}_2 - a) \end{vmatrix} = 0$$

通过计算得 $-\mu_i D + g(E)$ 的特征方程形式如下:

$$\begin{aligned} & (\lambda + \mu_i d_1 - \varphi^1(\bar{u}_1) + a_1\bar{u}_3)(\lambda + \mu_i d_2 - \varphi^1(\bar{u}_2) + a_2\bar{u}_3)(\lambda + \mu_i d_3 - \beta_1a_1\bar{u}_1 - \beta_2a_2\bar{u}_2 + a) \\ & - (\lambda + \mu_i d_1 - \varphi^1(\bar{u}_1) + a_1\bar{u}_3)a_2^2\beta_2\bar{u}_2\bar{u}_3 - (\lambda + \mu_i d_2 - \varphi^1(\bar{u}_2) + a_2\bar{u}_3)a_1^2\beta_1\bar{u}_1\bar{u}_3 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

关于平衡点 E^0 和 E^* 的局部稳定性, 有如下定理。

定理 2 系统(2)的平衡点 $E^0 = (u_1^0, u_2^0, 0)$ 是局部渐近稳定的。

证明 在系统(8)中, 令 $E^0 = (u_1^0, u_2^0, 0)$, 可得

$$(\lambda + \mu_i d_1 - \varphi^1(\bar{u}_1))(\lambda + \mu_i d_2 - \varphi^1(\bar{u}_2))(\lambda + \mu_i d_3 - \beta_1a_1\bar{u}_1 - \beta_2a_2\bar{u}_2 + a) = 0$$

当 $d_1 > r_1$ 且 $d_2 > r_2$ 且 $\beta_1a_1u_1^0 + \beta_2a_2u_2^0 - a < 0$, 显然方程总有根

$$\lambda_1 = -\mu_i d_1 + \varphi^1(u_1) < 0, \lambda_2 = -\mu_i d_2 + \varphi^1(u_2) < 0, \lambda = -\mu_i d_3 + \beta_1a_1\bar{u}_1 + \beta_2a_2\bar{u}_2 - a < 0,$$

因此, 系统(2)的平衡点 $E^0 = (u_1^0, u_2^0, 0)$ 局部渐进稳定的。证毕。

定理 3: 系统(2)的正平衡点 E^* 是局部渐近稳定的。

证明: 在系统(7)中, 令 $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$, 由(7)得

$$\begin{aligned} & (\lambda + \mu_i d_i - \varphi^1(\bar{u}_i) + a_i\bar{u}_3)(\lambda + \mu_i d_j - \varphi^1(\bar{u}_j) + a_j\bar{u}_3)(\lambda + \mu_i d_3 - \beta_1a_1\bar{u}_1 - \beta_2a_2\bar{u}_2 + a) \\ & = \beta_2a_2^2\bar{u}_2\bar{u}_3(\lambda + \mu_i d_i - \varphi^1(\bar{u}_i) + a_i\bar{u}_3) + \beta_1a_1^2\bar{u}_1\bar{u}_2(\lambda + \mu_i d_2 - \varphi^1(\bar{u}_2) + a_2\bar{u}_3) \end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned} 1 = & \frac{\beta_2a_2^2u_2^*u_3^*(\lambda + \mu_i d_i - \varphi^1(u_1^*) + a_1u_3^*)}{(\lambda + \mu_i d_i - \varphi^1(u_1^*) + a_1u_3^*)(\lambda + \mu_i d_2 - \varphi^1(u_2^*) + a_2u_3^*)(\lambda + \mu_i d_3 - \beta_1a_1u_1^* - \beta_2a_2u_2^* + a)} \\ & + \frac{\beta_1a_1^2u_1^*u_2^*(\lambda + \mu_i d_2 - \varphi^1(u_2^*) + a_2u_3^*)}{(\lambda + \mu_i d_i - \varphi^1(u_1^*) + a_1u_3^*)(\lambda + \mu_i d_2 - \varphi^1(u_2^*) + a_2u_3^*)(\lambda + \mu_i d_3 - \beta_1a_1u_1^* - \beta_2a_2u_2^* + a)} \end{aligned} \quad (8)$$

下证方程(8)的所有根具有负实部。否则(8)存在一个根 $\lambda_3 = \text{Re}\lambda_3 + i\text{Im}\lambda_3$, 其中 $\text{Re}\lambda_3 \geq 0$, 因此 E^* 满足

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \beta_1 a_1 u_1^* + \beta_2 a_2 u_2^* = a \\ \varphi(u_1^*) = a_1 u_1^* u_3^* \\ \varphi(u_2^*) = a_2 u_2^* u_3^* \end{cases}, \text{ 则} \\
1 &= \left| \frac{\beta_2 a_2^2 u_2^* u_3^*}{(\lambda + \mu_1 d_2 - \varphi^1(u_2^*) + a_2 u_3^*)(\lambda + \mu_1 d_3 - \beta_1 a_1 u_1^* - \beta_2 a_2 u_2^* + a)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\beta_1 a_1^2 u_1^* u_2^*}{(\lambda + \mu_1 d_1 - \varphi^1(u_1^*) + a_1 u_3^*)(\lambda + \mu_1 d_3 - \beta_1 a_1 u_1^* - \beta_2 a_2 u_2^* + a)} \right| \\
&< \frac{\beta_2 a_2 \varphi(u_2^*)}{a a_2 u_3^*} + \frac{\beta_1 a_1 \varphi(u_1^*)}{a a_1 u_3^*} \\
&= \frac{\beta_2 \varphi(u_2^*) + \beta_1 \varphi(u_1^*)}{a u_3^*} = \frac{\beta_1 a_1 u_1^* u_3^* + \beta_2 a_2 u_2^* u_3^*}{a u_3^*} = \frac{\beta_1 a_1 u_1^* + \beta_2 a_2 u_2^*}{a} = 1
\end{aligned}$$

矛盾。从而系统(2)的平衡点 E^* 是局部渐近稳定的。证毕。

3.2. 平衡点的全局渐近稳定性

在本节中, 构造 Lyapunov 泛函[11]来研究系统的平衡点的全局渐近稳定性。

定理 4 当 $d_1 \geq r_1$ 且 $d_2 \geq r_2$ 时, 系统(2)的平衡点 E^0 是全局渐近稳定的。

证明 构造 Lyapunov 泛函

$$L(x, t) = \int_{\Omega} L_1(x, t) dx,$$

其中 $L_1(x, t) = \beta_1 u_1^0 g\left(\frac{u_1}{u_1^0}\right) + \beta_2 u_2^0 g\left(\frac{u_2}{u_2^0}\right) + u_3$, $g(x) = x - 1 - \ln x (x > 0)$ 易知 $g(x) = 0$ 当且仅当 $x = 1$ 。

沿着系统(2)的解计算 $L_1(x, t)$ 的导数

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_1(x, t)}{\partial t} &= \beta_1 \left(1 - \frac{u_1^0}{u_1}\right) \frac{\partial u_1}{\partial t} + \beta_2 \left(1 - \frac{u_2^0}{u_2}\right) \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial t} \\
&= \beta_1 \left(1 - \frac{u_1^0}{u_1}\right) [d_1 \Delta u_1 + \varphi(u_1) - a_1 u_1 u_3] + \beta_2 \left(1 - \frac{u_2^0}{u_2}\right) [d_2 \Delta u_2 + \varphi(u_2) - a_2 u_2 u_3] \\
&\quad + d_3 \Delta u_3 + \beta_1 a_1 u_1 u_3 + \beta_2 a_2 u_2 u_3 - a u_3 \\
&= \beta_1 d_1 \left(1 - \frac{u_1^0}{u_1}\right) \Delta u_1 + \beta_2 d_2 \left(1 - \frac{u_2^0}{u_2}\right) \Delta u_2 + d_3 \Delta u_3 + \beta_1 \left(1 - \frac{u_1^0}{u_1}\right) [\varphi(u_1) - a_1 u_1 u_3] \\
&\quad + \beta_2 \left(1 - \frac{u_2^0}{u_2}\right) [\varphi(u_2) - a_2 u_2 u_3] + \beta_1 a_1 u_1 u_3 + \beta_2 a_2 u_2 u_3 - a u_3 \\
&= L_2(x, t) + L_3(x, t)
\end{aligned}$$

其中 $L_2(x, t) = \beta_1 d_1 \left(1 - \frac{u_1^0}{u_1}\right) \Delta u_1 + \beta_2 d_2 \left(1 - \frac{u_2^0}{u_2}\right) \Delta u_2 + d_3 \Delta u_3$,

$$L_3(x, t) = \beta_1 \left(1 - \frac{u_1^0}{u_1}\right) [\varphi(u_1) - a_1 u_1 u_3] + \beta_2 \left(1 - \frac{u_2^0}{u_2}\right) [\varphi(u_2) - a_2 u_2 u_3] + \beta_1 a_1 u_1 u_3 + \beta_2 a_2 u_2 u_3 - a u_3$$

由于 E^0 满足方程 $\varphi(u_1^0) = 0, \varphi(u_2^0) = 0$ 。

有

$$\begin{aligned} L_3(x, t) &= \beta_1 \left(1 - \frac{u_1^0}{u_1} \right) \left[\varphi(u_1) - a_1 u_1 u_3 - \varphi(u_1^0) \right] \\ &\quad + \beta_2 \left(1 - \frac{u_2^0}{u_2} \right) \left[\varphi(u_2) - a_2 u_2 u_3 - \varphi(u_2^0) \right] + \beta_1 a_1 u_1 u_3 + \beta_2 a_2 u_2 u_3 - a u_3 \\ &= \beta_1 \frac{(u_1 - u_1^0) [\varphi(u_1) - \varphi(u_1^0)]}{u_1} + \beta_2 \frac{(u_2 - u_2^0) [\varphi(u_2) - \varphi(u_2^0)]}{u_2} \\ &\quad - \beta_1 a_1 u_1 u_3 + \beta_1 a_1 u_1^0 u_3 - \beta_2 a_2 u_2 u_3 + \beta_2 a_2 u_2^0 u_3 + \beta_1 a_1 u_1 u_3 + \beta_2 a_2 u_2 u_3 - a u_3 \end{aligned}$$

注意到 $\beta_1 a_1 u_1^0 + \beta_2 a_2 u_2^0 - a = 0$,

$$L_3(x, t) = \beta_1 \frac{(u_1 - u_1^0) [\varphi(u_1) - \varphi(u_1^0)]}{u_1} + \beta_2 \frac{(u_2 - u_2^0) [\varphi(u_2) - \varphi(u_2^0)]}{u_2},$$

注意看当 $d_1 \geq r_1$ 且 $d_2 \geq r_2$ 时, $\varphi(u)$ 单调递减。

因此, 有

$$\begin{aligned} \frac{\varphi L_1(x, t)}{\varphi t} &= \int_{\Omega} \frac{\partial L(x, t)}{\partial t} dx \\ &= \int_{\Omega} L_2(x, t) + L_3(x, t) dx \\ &= \int_{\Omega} L_2(x, t) dx + \int_{\Omega} L_3(x, t) dx \end{aligned}$$

由于系统(2)满足 Neumann 边界条件和 Green 公式[12],

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} L_2(x, t) dx &= \beta_1 d_1 \int_{\Omega} \Delta u_1 dx - \beta_1 d_1 u_1^0 \int_{\Omega} \frac{\Delta u_1}{u_1} dx + \beta_2 d_2 \int_{\Omega} \Delta u_2 dx \\ &\quad - \beta_2 d_2 u_2^0 \int_{\Omega} \frac{\Delta u_2}{u_2} dx + d_3 \int_{\Omega} \Delta u_3 dx \\ &= -\beta_1 d_1 u_1^0 \int_{\Omega} \frac{\|\nabla u_1\|^2}{u_1^2} dx - \beta_2 d_2 u_2^0 \int_{\Omega} \frac{\|\nabla u_2\|^2}{u_2^2} dx \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1(x, t)}{\partial t} &= -\beta_1 d_1 u_1^0 \int_{\Omega} \frac{\|\nabla u_1\|^2}{u_1^2} dx - \beta_2 d_2 u_2^0 \int_{\Omega} \frac{\|\nabla u_2\|^2}{u_2^2} dx \\ &\quad + \beta_1 \int_{\Omega} \frac{(u_1 - u_1^0) [\varphi(u_1) - \varphi(u_1^0)]}{u_1} dx \\ &\quad - \beta_2 \int_{\Omega} \frac{(u_2 - u_2^0) [\varphi(u_2) - \varphi(u_2^0)]}{u_2} dx \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

$\frac{\partial L(x, t)}{\partial t} = 0$ 当且仅当 $u_1 = u_1^0, u_2 = u_2^0, u_3 = 0$ 显然 $\left\{ (u_1, u_2, u_3) : \frac{\partial L(x, t)}{\partial t} = 0 \right\}$ 的最大不变集仅是 E^0 。由

LaSalle 不变性原理[13] [14]知, 当 $d_1 \geq r_1, d_2 \geq r_2$ 时, 系统(2)的平衡点 E^0 是全局渐近稳定的。

定理 5 当 $d_1 \geq r_1$ 且 $d_2 \geq r_2$ 时, 系统(2)的平衡点 E^* 是全局渐近稳定的。

证明 构造 Lyapunov 泛函

$$\omega(x, t) = \int_{\Omega} \omega_1(x, t) dx,$$

$$\text{其中 } \omega_1(x, t) = \beta_1 u_1^* g\left(\frac{u_1}{u_1^*}\right) + \beta_2 u_2^* g\left(\frac{u_2}{u_2^*}\right) + u_3^* g\left(\frac{u_3}{u_3^*}\right).$$

容易得到, 对所有 $t > 0$, 有 $\omega_1(x, t) > 0$ 。沿着系统(2)的解计算 $\omega_1(x, t)$ 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_1(x, t)}{\partial t} &= \beta_1 \left(1 - \frac{u_1^*}{u_1}\right) \frac{\partial u_1}{\partial t} + \beta_2 \left(1 - \frac{u_2^*}{u_2}\right) \frac{\partial u_2}{\partial t} + \left(1 - \frac{u_3^*}{u_3}\right) \frac{\partial u_3}{\partial t} \\ &= \beta_1 \left(1 - \frac{u_1^*}{u_1}\right) [d_1 \Delta u_1 + \varphi(u_1) - a_1 u_1 u_3] + \beta_2 \left(1 - \frac{u_2^*}{u_2}\right) [d_2 \Delta u_2 + \varphi(u_2) - a_2 u_2 u_3] \\ &\quad + \left(1 - \frac{u_3^*}{u_3}\right) (d_3 \Delta u_3 + \beta_1 a_1 u_1 u_3 + \beta_2 a_2 u_2 u_3 - a u_3) \\ &= \beta_1 d_1 \left(1 - \frac{u_1^*}{u_1}\right) \Delta u_1 + \beta_2 d_2 \left(1 - \frac{u_2^*}{u_2}\right) \Delta u_2 + d_3 \left(1 - \frac{u_3^*}{u_3}\right) \Delta u_3 \\ &\quad + \beta_1 \left(1 - \frac{u_1^*}{u_1}\right) [\varphi(u_1) - a_1 u_1 u_3] + \beta_2 \left(1 - \frac{u_2^*}{u_2}\right) [\varphi(u_2) - a_2 u_2 u_3] \\ &\quad + \left(1 - \frac{u_3^*}{u_3}\right) (\beta_1 a_1 u_1 u_3 + \beta_2 a_2 u_2 u_3 - a u_3) \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \omega_2(x, t) = \beta_1 d_1 \left(1 - \frac{u_1^*}{u_1}\right) \Delta u_1 + \beta_2 d_2 \left(1 - \frac{u_2^*}{u_2}\right) \Delta u_2 + d_3 \left(1 - \frac{u_3^*}{u_3}\right) \Delta u_3$$

$$\begin{aligned} \omega_3(x, t) &= \beta_1 \left(1 - \frac{u_1^*}{u_1}\right) [\varphi(u_1) - a_1 u_1 u_3] + \beta_2 \left(1 - \frac{u_2^*}{u_2}\right) [\varphi(u_2) - a_2 u_2 u_3] \\ &\quad + \left(1 - \frac{u_3^*}{u_3}\right) (\beta_1 a_1 u_1 u_3 + \beta_2 a_2 u_2 u_3 - a u_3) \end{aligned}$$

注意到, 在平衡点 E^* 处满足 $\varphi(u_1^*) = a_1 u_1^* u_3^*$, $\varphi(u_2^*) = a_2 u_2^* u_3^*$, $\beta_1 a_1 u_1^* + \beta_2 a_2 u_2^* = a$,

$$\text{故 } \omega_3(x, t) = \beta_1 \left(1 - \frac{u_1^*}{u_1}\right) [\varphi(u_1) - \varphi(u_1^*) - a_1 u_1 u_3 + a_1 u_1^* u_3^*] + \beta_2 \left(1 - \frac{u_2^*}{u_2}\right) [\varphi(u_2) - \varphi(u_2^*) - a_2 u_2 u_3 + a_2 u_2^* u_3^*]$$

$$\begin{aligned} &+ \left(1 - \frac{u_3^*}{u_3}\right) (\beta_1 a_1 u_1 u_3 - \beta_1 a_1 u_1^* u_3^* + \beta_2 a_2 u_2 u_3 - \beta_2 a_2 u_2^* u_3^*) \\ &= \frac{\beta_1}{u_1} (u_1 - u_1^*) [\varphi(u_1) - \varphi(u_1^*)] - \frac{\beta_1 a_1}{u_1} (u_1 - u_1^*) (u_1 u_3 - u_1^* u_3^*) + \frac{\beta_2}{u_2} (u_2 - u_2^*) [\varphi(u_2) - \varphi(u_2^*)] \\ &\quad - \frac{\beta_2 a_2}{u_2} (u_2 - u_2^*) (u_2 u_3 - u_2^* u_3^*) + \beta_1 a_1 (u_1 - u_1^*) (u_3 - u_3^*) + \beta_2 a_2 (u_2 - u_2^*) (u_3 - u_3^*) \\ &= \frac{\beta_1}{u_1} (u_1 - u_1^*) [\varphi(u_1) - \varphi(u_1^*)] + \frac{\beta_2}{u_2} (u_2 - u_2^*) [\varphi(u_2) - \varphi(u_2^*)] \\ &\quad + \beta_1 a_1 u_1^* u_3^* \left(2 - \frac{u_1}{u_1^*} - \frac{u_1^*}{u_1}\right) + \beta_2 a_2 u_2^* u_3^* \left(2 - \frac{u_2}{u_2^*} - \frac{u_2^*}{u_2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\beta_1}{u_1}(u_1 - u_1^*)[\varphi(u_1) - \varphi(u_1^*)] + \frac{\beta_2}{u_2}(u_2 - u_2^*)[\varphi(u_2) - \varphi(u_2^*)] \\
&\quad + \beta_1 a_1 u_1^* u_3^* \left[-\left(\frac{u_1}{u_1^*} - 1 - \ln \frac{u_1}{u_1^*}\right) - \ln \frac{u_1}{u_1^*} - \left(\frac{u_1^*}{u_1} - 1 - \ln \frac{u_1^*}{u_1}\right) - \ln \frac{u_1^*}{u_1} \right] \\
&\quad + \beta_2 a_2 u_2^* u_3^* \left[-\left(\frac{u_2}{u_2^*} - 1 - \ln \frac{u_2}{u_2^*}\right) - \ln \frac{u_2}{u_2^*} - \left(\frac{u_2^*}{u_2} - 1 - \ln \frac{u_2^*}{u_2}\right) - \ln \frac{u_2^*}{u_2} \right] \\
&= \frac{\beta_1}{u_1}(u_1 - u_1^*)[\varphi(u_1) - \varphi(u_1^*)] + \frac{\beta_2}{u_2}(u_2 - u_2^*)[\varphi(u_2) - \varphi(u_2^*)] \\
&\quad - \beta_1 a_1 u_1^* u_3^* \left[g\left(\frac{u_1}{u_1^*}\right) + g\left(\frac{u_1^*}{u_1}\right) \right] - \beta_2 a_2 u_2^* u_3^* \left[g\left(\frac{u_2}{u_2^*}\right) + g\left(\frac{u_2^*}{u_2}\right) \right]
\end{aligned}$$

注意到, 系统(2)满足 Neumann 边界条件, 由 Cuden 公式得

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \omega_2(x, t) dx &= \beta_1 d_1 \int_{\Omega} \Delta u_1 dx - \beta_1 d_1 u_1^* \int_{\Omega} \frac{\Delta u_1}{u_1} dx + \beta_2 d_2 \int_{\Omega} \Delta u_2 dx \\
&\quad - \beta_2 d_2 u_2^* \int_{\Omega} \frac{\Delta u_2}{u_2} dx + d_3 \int_{\Omega} \Delta u_3 dx - d_3 u_3^* \int_{\Omega} \frac{\Delta u_3}{u_3} dx \\
&= -\beta_1 d_1 u_1^* \int_{\Omega} \frac{\|\nabla u_1\|^2}{u_1^2} dx - \beta_2 d_2 u_2^* \int_{\Omega} \frac{\|\nabla u_2\|^2}{u_2^2} dx - d_3 u_3^* \int_{\Omega} \frac{\|\nabla u_3\|^2}{u_3^2} dx
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega_1(x, t)}{\partial t} &= \int_{\Omega} \omega_2(x, t) dx + \int_{\Omega} \omega_3(x, t) dx \\
&= -\beta_1 d_1 u_1^* \int_{\Omega} \frac{\|\nabla u_1\|^2}{u_1^2} dx - \beta_2 d_2 u_2^* \int_{\Omega} \frac{\|\nabla u_2\|^2}{u_2^2} dx - d_3 u_3^* \int_{\Omega} \frac{\|\nabla u_3\|^2}{u_3^2} dx \\
&\quad + \beta_1 \int_{\Omega} \frac{(u_1 - u_1^*)[\varphi(u_1) - \varphi(u_1^*)]}{u_1} dx + \beta_2 \int_{\Omega} \frac{(u_2 - u_2^*)[\varphi(u_2) - \varphi(u_2^*)]}{u_2} dx \\
&\quad - \beta_1 a_1 u_1^* u_3^* \int_{\Omega} g\left(\frac{u_1}{u_1^*}\right) + g\left(\frac{u_1^*}{u_1}\right) dx - \beta_2 a_2 u_2^* u_3^* \int_{\Omega} g\left(\frac{u_2}{u_2^*}\right) + g\left(\frac{u_2^*}{u_2}\right) dx \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

此外, $\frac{\partial \omega_1(x, t)}{\partial t} = 0$ 当且仅当 $u_1 = u_1^*, u_2 = u_2^*, u_3 = u_3^*$ 。

显然, $\left\{ (u_1, u_2, u_3) : \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial t} = 0 \right\}$ 的最大不变集仅是 E^* , LaSalles 不变性原理[13][14], 当 $d_1 \geq r_1, d_2 \geq r_2$ 时, 系统(2)的平衡点 E^* 是全局渐近稳定的。 ■

3.3. 小结

从生态意义上, 定理 4 意味着种群不会扩散, 捕食者没有进入食饵的栖息地。意味着无猎物时, 两食饵是共存的, 随着时间的推移, 两食饵达到动态平衡, 不会灭绝。

定理 5 表明系统(2)的扩散系数大于其出生率时, 共存平衡点是全局渐近稳定的。从生物意义上说, 意味着捕食者进入食饵的栖息地进行捕食。在一定时间内, 不会因为捕食者的存在而使得食饵灭绝, 也就说明随着时间的推移, 食饵之间处于动态平衡中。这些建模的结果对人们保护物种可持续发展具有指导意义。

4. 结语

通过构建一类空间扩散的捕食模型。结合 Neumann 边界条件与 Banach 空间理论, Lipschitz 连续性理论, 获得模型解的适定性, 并分析模型平衡点存在性。进一步地证明系统存在的平衡点是局部渐近稳定的; 最后, 通过利用 Lyapunov 泛函技术证明系统存在的平衡点是全局渐近稳定性。研究的成果为揭示捕食系统的时空演化规律提供了理论支撑, 可为生态调控提供参考。但模型参数偏理论化, 需结合实地监测数据进一步优化。未来将聚焦模型的数值模拟, 深度了解捕食模型的空间传播机理, 更好地为生态可持续发展服务。

参考文献

- [1] 楼元. 空间生态学中的一些反应扩散方程模型[J]. 中国科学: 数学, 2015, 45(10): 1619-1634.
- [2] Tilman, D. and Kareiva, P. (1997) *Spatial Ecology: The Role of Space in Population Dynamics and Interspecific Interactions*. Princeton University Press.
- [3] Giunta, V., Hillen, T., Lewis, M. and Potts, J.R. (2022) Local and Global Existence for Nonlocal Multispecies Advection-Diffusion Models. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **21**, 1686-1708. <https://doi.org/10.1137/21m1425992>
- [4] So, J.W. and Zou, X. (2001) Traveling Waves for the Diffusive Nicholson's Blowflies Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **122**, 385-392. [https://doi.org/10.1016/s0096-3003\(00\)00055-2](https://doi.org/10.1016/s0096-3003(00)00055-2)
- [5] Gourley, S.A. and Ruan, S. (2000) Dynamics of the Diffusive Nicholson's Blowflies Equation with Distributed Delay. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, **130**, 1275-1291. <https://doi.org/10.1017/s0308210500000688>
- [6] Zhang, L. and Liu, B. (2015) Optimal Control Problem for an Ecosystem with Two Competing Preys and One Predator. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **424**, 201-220. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.10.093>
- [7] Arnau, R., Cortés, Á.G. and Pérez, E.A.S. (2026) Integrating Lipschitz Extensions and Probabilistic Modelling for Metric Space Classification. *Mathematics*, **14**, Article No. 544. <https://doi.org/10.3390/math14030544>
- [8] Marsden, J.E., Sirovich, L. and Antman, S.S. (2011) *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Science*. Springer.
- [9] 张晓慧. 带有弱 Allee 效应的时滞反应扩散方程的分支分析[D]: [硕士学位论文]. 哈尔滨: 黑龙江大学, 2025.
- [10] 李蓉. 一类森林植物种群扩散模型的动力学分析[D]: [硕士学位论文]. 扬州: 扬州大学, 2025.
- [11] 孙峥, 李宝成. 有治愈的非线性传染力 SIS 模型渐近性分析[J]. 南京理工大学学报(自然科学版), 2003(S1): 81-83.
- [12] 宋宣宣. 具有交叉扩散病毒动力学模型的稳定性分析[D]: [硕士学位论文]. 新乡: 河南科技学院, 2025.
- [13] 杨雨琴. 三类传染病模型的动力学研究[D]: [硕士学位论文]. 福州: 福建师范大学, 2024.
- [14] 焦战, 靳祯. 空间异质的非局部扩散 SI 传染病模型的动力学[J]. 山东大学学报(理学版), 2022, 57(11): 70-77, 88.