

线性抛物方程的无网格法数值分析

张 涛

重庆科技大学数理科学学院应用数学系, 重庆

收稿日期: 2026年6月28日; 录用日期: 2026年7月22日; 发布日期: 2026年7月28日

摘 要

针对混合边界的线性抛物方程, 本文采用无单元Galerkin法进行空间离散, 采用向后Euler法进行时间离散, 并使用Nitsche法施加Dirichlet边界条件, 获得了半离散误差估计和全离散误差估计, 并通过数值算例验证了理论分析结果。

关键词

线性抛物方程, 无单元Galerkin法, 向后Euler法, Nitsche法, 误差估计

Numerical Analysis of Meshless Methods for Linear Parabolic Equations

Tao Zhang

Department of Applied Mathematics, College of Mathematics and Physics, Chongqing University of Science and Technology, Chongqing

Received: June 28, 2026; accepted: July 22, 2026; published: July 28, 2026

Abstract

In this paper, for linear parabolic equations with mixed boundary conditions, the element-free Galerkin method is employed for spatial discretization, the backward Euler method is used for temporal discretization, and Nitsche's method is applied to impose the Dirichlet boundary conditions. The semi-discrete and fully discrete error estimates are obtained, and numerical examples are provided to validate the theoretical analysis results.

Keywords

Linear Parabolic Equation, Element-Free Galerkin Method, Backward Euler Method, Nitsche's Method, Error Estimates



1. 引言

抛物型偏微分方程在物理学与工程学的各类问题中具有广泛应用, 包括热传导、质量输运及反应-扩散过程等[1]。针对该类方程的数值求解, 有限元法和有限差分法等传统方法已得到充分发展[2] [3]。目前, 已有多种无网格方法[4]-[6]被提出用于求解抛物型方程, 例如: 基于径向基函数的配点法用于抛物型方程[7]和广义有限差分法用于三维抛物型方程[8]等。

无单元伽辽金(Element-free Galerkin method, EFG)方法[9]作为一种广泛应用的基于伽辽金的无网格方法, 采用移动最小二乘(Moving Least Squares, 简称 MLS)近似[9] [10]构造试验函数与检验函数。然而, MLS 近似所构造的形函数不满足插值性质, 因此在施加 Dirichlet 边界条件时存在一定困难。为恢复插值性质, 学者们提出了多种插值 MLS 方法[5] [11] [12]。

除此以外, 一些强制性方法[4]-[6]也被使用, 如拉格朗日乘子法、罚方法及 Nitsche 方法。这类方法的核心思想在于通过修改相应的弱形式引入非插值形函数。拉格朗日乘子法通过引入额外的未知变量来施加边界条件, 但会导致系统矩阵出现鞍点结构, 且增加了问题规模[4] [5]。罚方法因其实现简便而得到广泛应用, 然而该方法需要选取较大的罚因子以保证边界条件的精确满足, 这可能导致系统矩阵病态, 影响数值稳定性[13]。Nitsche 方法最初由 Nitsche 于 1971 年为有限元方法提出[14], 与拉格朗日乘子法相比, Nitsche 方法不增加未知变量数量; 与罚方法相比, 该方法所需的稳定化参数较小, 通过适当选取参数, 可保证离散系统的对称性与正定性[15] [16]。

尽管 Nitsche 方法在椭圆形问题中已得到较为充分的研究, 其在抛物型问题中的应用仍相对有限。近年来, Nitsche 方法已被成功应用于时空有限元格式处理抛物问题[17], 以及虚拟元方法求解半线性抛物型积分微分方程[18], 这些工作为 Nitsche 方法在无网格伽辽金方法中处理时间相关问题提供了有益借鉴。

本文旨在采用 Nitsche 方法施加本质边界条件, 建立求解线性抛物型方程的无单元 Galerkin 格式。首先给出问题描述及 Nitsche 变分形式的推导; 其次, 对半离散格式进行稳定性分析; 然后, 结合向后 Euler 时间离散方案, 构造全离散格式并推导相应的误差估计; 最后, 通过数值算例验证理论分析的正确性与方法的有效性。本文结构如下: 第 2 节简要回顾移动最小二乘近似; 第 3 节建立线性抛物问题的基于 Nitsche 方法的无网格变分形式; 第 4 节给出半离散误差分析; 第 5 节给出全离散格式; 第 6 节提供数值算例; 第 7 节为结论。

2. 移动最小二乘(MLS)近似

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 为非空有界 Lipschitz 区域, 其边界为 Γ , 其中 $d = 2$ 或者 3 , 表示问题区域的维数。 $\mathbb{R}^d$ 中的一般点表示为 $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$ 或 $y = (y_1, y_2, \dots, y_d)^T$ 。设 $\{x_i\}_{i=1}^N$ 为 $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ 中的节点集, 其中 N 为节点总数。节点间距定义为 $h = \max_{1 \leq i \leq N} \min_{1 \leq j \leq N, j \neq i} |x_i - x_j|$ 。此外, $x \in \bar{\Omega}$ 的支撑域记为 $\mathfrak{R}(x) = \{y \in \mathbb{R}^d : |y - x| \leq r(x)\}$, 其半径为 $r(x)$ 。

对于给定函数 $u(x)$, 其 MLS 近似为

$$u(x) \approx \mathcal{M}u(x) = \sum_{i \in \wedge(x)} \Phi_i(x) u_i = \sum_{i=1}^N \Phi_i(x) u_i, \quad (1)$$

其中 $\mathcal{M}$ 表示 MLS 近似算子, u_i 为节点值, $\wedge(x) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_x}\}$ 表示其支撑域覆盖点 x 的节点的全局序

号, MLS 形函数 $\Phi_i(\mathbf{x})$ 定义为[6] [10]

$$\Phi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) [A^{-1}(\mathbf{x}) B(\mathbf{x})]_{ji}, & i = \lambda_i \in \wedge(\mathbf{x}), \\ 0, & i \notin \wedge(\mathbf{x}), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

其中 $p_j(\mathbf{x})$ ($j = 1, 2, \dots, m$) 是多项式函数空间 $\mathbb{P}_m^d$ 的基函数经平移和缩放后形成的基函数, $\hat{m}$ 是基函数的最高次数, 平移和缩放技巧可以提高原始 MLS 近似的稳定性。此外, $A(\mathbf{x}) = P^T W(\mathbf{x}) P$, $B(\mathbf{x}) = P^T W(\mathbf{x})$,

其中 $P = [p(x_{\lambda_1}), p(x_{\lambda_2}), \dots, p(x_{\lambda_{n_x}})]^T$, $p(x_i) = [p_1(x_i), p_2(x_i), \dots, p_m(x_i)]^T$, 且

$$W(\mathbf{x}) = \text{diag}(w_{\lambda_1}(\mathbf{x}), w_{\lambda_2}(\mathbf{x}), \dots, w_{\lambda_{n_x}}(\mathbf{x})).$$

一般地, 假设权函数 $w_i(\mathbf{x})$ 在 $\mathfrak{R}(x_i)$ 中具有紧支集且 γ 次连续可微, 即 $w_i(\mathbf{x}) \in C_0^\gamma(\mathfrak{R}(x_i))$, 其中 γ 为非负整数, 则 MLS 近似具有如下再生性和误差估计。

引理 2.1. [6] [10] 若 $u \in H^{\hat{m}+1}(\Omega)$, 则

$$\|u - \mathcal{M}u\|_{H^k(\Omega)} \leq Ch^{\hat{m}+1-k} \|u\|_{H^{\hat{m}+1}(\Omega)}, 0 \leq k \leq \min\{\hat{m}+1, \gamma\}. \quad (2)$$

3. 问题模型

考虑如下线性抛物问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (A \nabla u) + bu = f, & (x, t) \in \Omega \times (0, T], \\ u = g_1, & (x, t) \in \Gamma_1 \times (0, T], \\ A \nabla u \cdot n + \sigma u = g_2, & (x, t) \in \Gamma_2 \times (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (3)$$

其中边界 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, Γ_1 是 Dirichlet 边界条件, Γ_2 是 Robin 边界条件, $u = u(x, t)$,

$g_1 = g_1(x, t) \in L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma_1))$ 为已知的边界函数, $g_2 = g_2(x, t) \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2))$,

$f = f(x, t) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ 为已知的源项, $n = (n_1, n_2, \dots, n_d)^T$ 是 Γ 的单位外法向量, $b = b(x) \in L^\infty(\Omega)$ 是给定的非负函数且其下确界为 b_* 。此外, $\sigma = \sigma(x) \in L^\infty(\Gamma_2)$ 是给定的非负函数且其下界为 σ_* , $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ 是对称正定的实矩阵, 即存在常数 $\alpha_* > 0$ 使得

$$\xi^T A \xi \geq \alpha_* \|\xi\|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \text{ a.e. } x \in \Omega.$$

此外, 初值 $u_0 = u(x, 0)$ 满足相容性条件, 即 $u_0 = g_1$ 在 Γ_1 上, 且 $A \nabla u_0 \cdot n + \sigma u_0 = g_2$ 在 Γ_2 上。

由于 MLS 近似的形函数 $\Phi_i(\mathbf{x})$ 不具有插值性质, 因此采用 Nitsche 方法来强制施加 Dirichlet 边界条件。设 β 为 Nitsche 参数。因此, 定义函数空间 $V = H^1(\Omega)$ 对任意 $v \in V$, 基于 Nitsche 方法, 方程(3)对应的变分形式为:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v dx + \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} b u v dx + \int_{\Gamma_2} \sigma u v ds \\ & - \int_{\Gamma_1} (A \nabla u \cdot n) v ds - \int_{\Gamma_1} (A \nabla v \cdot n) (u - g_1) ds + \frac{\beta}{h} \int_{\Gamma_1} (u - g_1) v ds \\ & = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_2} g_2 v ds, \end{aligned}$$

其中 h 是网格尺寸。定义双线性形式 $a(\cdot, \cdot)$ 和线性形式 $L(\cdot)$ 如下:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \mathbf{A} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} b u v dx + \int_{\Gamma_2} \sigma u v ds - \int_{\Gamma_1} (\mathbf{A} \nabla u \cdot \mathbf{n}) v ds - \int_{\Gamma_1} (\mathbf{A} \nabla v \cdot \mathbf{n}) u ds + \frac{\beta}{h} \int_{\Gamma_1} u v ds, \quad (4)$$

$$F(v) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_2} g_2 v ds - \int_{\Gamma_1} (\mathbf{A} \nabla v \cdot \mathbf{n}) g_1 ds + \frac{\beta}{h} \int_{\Gamma_1} g_1 v ds. \quad (5)$$

则基于 Nitsche 方法, 方程(3)的变分形式可简写为:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + a(u, v) = F(v), \forall v \in V. \quad (6)$$

假设 3.1. [16] 存在一个与 h 无关的常数 C , 使得如下逆不等式成立,

$$h \|\mathbf{A} \nabla v \cdot \mathbf{n}\|_{0, \Gamma^D}^2 \leq C \int_{\Omega} \mathbf{A} \nabla v \cdot \nabla v dx, \forall v \in H^1(\Omega).$$

定义范数 $\|\cdot\|_{\beta}$ 为

$$\|v\|_{\beta}^2 = \|v\|_{1, \Omega}^2 + h^{-1} \|v\|_{0, \Gamma_1}^2 + \sigma_* \|v\|_{0, \Gamma_2}^2, \forall v \in H^1(\Omega). \quad (7)$$

当 $g_1 = 0$ 时, 通过在方程(6)式中选取 $v = u$, 可导出如下能量估计:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|u(\cdot, t)\|_{\beta}^2 dt \leq C \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \|g_2\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_2))}^2 \right).$$

引理 3.1. [16] 若 $\beta > C$, 则在假设 3.1. 下, 对任意 $w, v \in H^1(\Omega)$, 有

$$a(w, v) \leq C(\beta) \|w\|_{\beta} \|v\|_{\beta}, a(v, v) \geq C \|v\|_{\beta}^2.$$

采用同文献[13]相似的方法, 有如下结论。

定理 3.1. 在 $g_1 = 0$ 的条件下, 方程(4)存在唯一弱解, 且如下稳定性估计:

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} + \left(\int_0^T \|u(\cdot, t)\|_{\beta}^2 dt \right)^{1/2} \leq C \left(\|u_0\|_{\beta} + \|f\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} + \|g_2\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_2))} \right).$$

首先在空间上对方程(6)进行离散化。对于任意固定的 t , 解 u 由有限维空间 V_h 中的函数 u_h 逼近。通常, u_h 被称为空间离散解或半离散解。设

$$V_h = \text{span} \{ \Phi_i, 1 \leq i \leq N \},$$

其中 Φ_i 是由式(1)给出的 MLS 形函数。因此, 针对方程(4)构造如下近似问题: 求 $u_h \in V_h$, 使

$$(u_{ht}, v) + a(u_h, v) = F(v), \forall v \in V_h, t > 0, u_h(\cdot, 0) = u_{h0}, \quad (8)$$

其中 $u_{ht} = \partial u_h / \partial t$, u_{h0} 是 u_0 在 V_h 中的逼近。于是, 半离散问题可以表示为求

$$u_h(x, t) = \sum_{i=1}^N u_i(t) \Phi_i(x)$$

其中, 系数 $u_i(t)$, 使

$$\sum_{i=1}^N u_i'(t) (\Phi_i, \Phi_j) + \sum_{i=1}^N u_i(t) a(\Phi_i, \Phi_j) = F(\Phi_j), j = 1, 2, \dots, N,$$

且 $u_i(0) = u_{i0}$ 表示 u_{h0} 的系数。上述等式可以用矩阵形式表示,

$$\mathbf{B} u'(t) + \mathbf{A} u(t) = \mathbf{F}(t), \quad (9)$$

其中 $\mathbf{B}=(b_{ij})$ 是质量矩阵, 其元素为 $b_{ij}=(\Phi_j, \Phi_i)$, 而 $\mathbf{A}=(a_{ij})$ 是刚度矩阵, 其元素为 $a_{ij}=a(\Phi_j, \Phi_i)$, $\mathbf{F}(t)=(F_j)$ 是已知向量, 其元素为 $F_j=F(\Phi_j)$, $\mathbf{u}(t)=(z_i(t))$ 是未知向量. 由于 $a(\cdot, \cdot)$ 的强制性, 刚度矩阵 $\mathbf{A}$ 是对称正定的, 质量矩阵 $\mathbf{B}$ 满足

$$\sum_{i,j=1}^N \xi_i \xi_j (\Phi_i, \Phi_j) = \left\| \sum_{i=1}^N \xi_i \Phi_i \right\|^2 \geq 0,$$

仅当向量 ξ 为零向量时上式等号成立. 因此, 质量矩阵 $\mathbf{B}$ 也是对称正定的, 因此常微分方程组(9)对 $t > 0$ 存在唯一解.

引理 3.2. [16] 对于任意 $v \in V_h(\Omega)$, 存在与 h 无关的常数 C , 使得

$$h \|\mathbf{A} \nabla v \cdot \mathbf{n}\|_{0,\Gamma^D}^2 \leq C \int_{\Omega} \mathbf{A} \nabla v \cdot \nabla v dx.$$

引理 3.3. [16] 假设 $\beta > C$, 则在引理 2.2. 下, 对于任意 w 和 $v \in V_h$, 有

$$a(w, v) \leq C(\beta) \|w\|_{\beta} \|v\|_{\beta}, a(v, v) \geq C \|v\|_{\beta}^2.$$

4. 半离散误差分析

定义正交投影 $R_h: H^1(\Omega) \rightarrow V_h$, 满足

$$a(R_h u, v) = a(u, v), \forall v \in V_h. \quad (10)$$

由于 $R_h u$ 是 u 在 V_h 中关于范数 $\|\cdot\|_{\beta}$ 的最佳逼近, 因此有

$$\|u - R_h u\|_{\beta} \leq \|u - \mathcal{M}u\|_{\beta}, \quad (11)$$

其中 $\mathcal{M}u$ 是 u 的 MLS 逼近. 进一步考虑辅助问题

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mathbf{A} \nabla \psi(\mathbf{x})) + b(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) = u - R_h u, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \psi(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\ \mathbf{A} \nabla \psi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_2, \end{cases}$$

其变分形式为

$$a(\psi, v) = (u - R_h u, v), \forall v \in H^1(\Omega).$$

根据 Lax-Milgram 定理, 上述问题存在唯一弱解, 并且有如下估计

$$\|\psi\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|u - R_h u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (12)$$

因此, 利用 R_h 的正交性

$$\begin{aligned} \|u - R_h u\|_{L^2(\Omega)}^2 &= (u - R_h u, u - R_h u) = a(\psi, u - R_h u) \\ &= a(\psi - \mathcal{M}\psi + \mathcal{M}\psi, u - R_h u) \\ &= a(\psi - \mathcal{M}\psi, u - R_h u) \\ &\leq C \|\psi - \mathcal{M}\psi\|_{\beta} \|u - R_h u\|_{\beta}, \end{aligned}$$

和迹不等式

$$\begin{aligned} \|u - \mathcal{M}u\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 &\leq C \|u - \mathcal{M}u\|_{L^2(\Omega)} \|u - \mathcal{M}u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 h^{2\bar{m}+1} \|u\|_{H^{\bar{m}+1}(\Omega)}^2, \\ \|u - \mathcal{M}u\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 &\leq C \|u - \mathcal{M}u\|_{L^2(\Omega)} \|u - \mathcal{M}u\|_{H^1(\Omega)} \leq C h^{2\bar{m}+1} \|u\|_{H^{\bar{m}+1}(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|u - \mathcal{M}u\|_{\beta}^2 &= \|u - \mathcal{M}u\|_{H^1(\Omega)}^2 + h^{-1} \|u - \mathcal{M}u\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + \sigma_* \|u - \mathcal{M}u\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 \\ &\leq Ch^{2\bar{m}} \|u\|_{H^{\bar{m}+1}(\Omega)}^2,\end{aligned}$$

同理 $\|\psi - \mathcal{M}\psi\|_{\beta}^2 \leq Ch^{2\bar{m}} \|\psi\|_{H^{\bar{m}+1}(\Omega)}^2$, 因此

$$\|u - R_h u\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|u - R_h u\|_{\beta} \leq Ch^{\bar{m}+1} \|u\|_{H^{\bar{m}+1}(\Omega)}. \quad (13)$$

定理 4.1. 设 u 和 u_h 分别为(6)和(8)的解, 若初始条件误差估计为

$$\|u_{h0} - u_0\|_{L^2(\Omega)} + h \|u_{h0} - u_0\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{\bar{m}+1} \|u_0\|_{H^{\bar{m}+1}(\Omega)}. \quad (14)$$

对于 $t \geq 0$, 有

$$\|u_h - u\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{\bar{m}+1} \left(\|u_0\|_{H^{\bar{m}+1}(\Omega)} + \|u\|_{H^{\bar{m}+1}(\Omega)} + \int_0^t \|u_t(s)\|_{H^{\bar{m}+1}(\Omega)} ds \right), \quad (15)$$

$$\|u_h - u\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{\bar{m}} \left(\|u_0\|_{H^{\bar{m}+1}(\Omega)} + \|u(t)\|_{H^{\bar{m}+1}(\Omega)} + \left(\int_0^t \|u_t(s)\|_{H^{\bar{m}}(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2} \right). \quad (16)$$

证明 将误差分解为两部分:

$$u - u_h = \rho + \theta, \quad (17)$$

其中 $\rho = u - R_h u$, $\theta = R_h u - u_h$ 。根据 R_h 的定义和方程(11) (13),

$$\|\rho\|_{L^2(\Omega)} + h \|\rho\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{\bar{m}+1} \|u\|_{H^{\bar{m}+1}(\Omega)}. \quad (18)$$

利用(8)和(17),

$$\begin{aligned}(\theta_t, v) + a(\theta, v) &= (R_h u_t, v) + a(R_h u, v) - (u_{ht}, v) - a(u_h, v) \\ &= (R_h u_t, v) + a(u, v) - F(v) \\ &= (R_h u_t - u_t, v) = -(\rho_t, v),\end{aligned} \quad (19)$$

选取 $v = \theta$, 得到

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(\theta, \theta) = -(\rho_t, \theta),$$

由 Cauchy 不等式,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\rho_t\|_{L^2(\Omega)} \|\theta\|_{L^2(\Omega)},$$

积分后, 得到

$$\|\theta\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\theta(0)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|\rho_t(s)\|_{L^2(\Omega)} ds, \quad (20)$$

而

$$\|\rho_t(s)\|_{L^2(\Omega)} = \|u_t(s) - R_h u_t(s)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{\bar{m}+1} \|u_t(s)\|_{H^{\bar{m}+1}(\Omega)}, \quad (21)$$

其中 $\theta(0) = (u_{h0} - u_0) + (u_0 - R_h u_0)$ 。一般地, u_{h0} 取为 $\mathcal{M}u_0$, 因此

$$\|\theta(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{\bar{m}+1} \|u_0\|_{H^{\bar{m}+1}(\Omega)}. \quad (22)$$

联系方程(17)~(22), 即得估计式(15)。为了证明方程(16), 选取 $v = -\rho_t$, 得到

$$\|\theta_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(\theta, \theta) = -(\rho_t, \theta_t) \leq \frac{1}{4} \|\rho_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\theta_t\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

因此

$$\frac{d}{dt} a(\theta, \theta) \leq \frac{1}{2} \|\rho_t\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

积分得

$$a(\theta, \theta) \leq a(\theta(0), \theta(0)) + \frac{1}{2} \int_0^t \|\rho_s\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

因此

$$\|\theta\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\theta(0)\|_{H^1(\Omega)} + C \left(\int_0^t \|\rho_s\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2}, \quad (23)$$

于是, 由方程(13)和(21)

$$\|\rho_t\|_{L^2(\Omega)} = \|u_t - R_h u_t\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{\bar{m}} \|u_t\|_{H^{\bar{m}}(\Omega)}, \|\theta(0)\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{\bar{m}} \|u_0\|_{H^{\bar{m}+1}(\Omega)}. \quad (24)$$

结合方程(17)和方程(23) (24), 即得估计式(16), 定理证毕。

5. 全离散误差分析

在这部分, 本文采用向后欧拉方法对时间方向进行离散。设 Δt 为时间步长, U_h^n 表示 u_h 在 $t_n = n\Delta t$ 时刻的值, 其中 $n = 0, 1, 2, \dots, M = T/\Delta t$ 。因此, 时间导数项 u_{ht} 近似为 $(U_h^n - U_h^{n-1})/\Delta t$, 则方程(8)的全离散形式为

$$\left(\frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t}, v \right) + a(U_h^n, v) = F^n(v), \quad \forall v \in V_h, n \geq 1, U_h^0 = u_{h0}. \quad (25)$$

因此, 在已知 U_h^{n-1} 的情况下, U_h^n 由下式隐式方程确定:

$$(U_h^n, v) + \Delta t a(U_h^n, v) = \Delta t F^n(v) + (U_h^{n-1}, v), \quad \forall v \in V_h, n = 1, 2, \dots, M,$$

上述方程的矩阵形式为

$$(B + \Delta t A)z^n = Bz^{n-1} + \Delta t F^n, \quad n = 1, 2, \dots, M, \quad z^0 = z(0),$$

其中 $B + \Delta t A$ 为正定矩阵, $z^n = z(t^n)$, 且 $z(0) = [u_0(x_1), u_0(x_2), \dots, u_0(x_N)]^T$ 。

采用同文献[13]相似的方法, 可以获得定理 4.1, 它说明向后欧拉格式依然是无条件稳定的。

定理 5.1. 若 $g_1 = 0$, 则

$$\begin{aligned} \|U_h^n\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u_{h0}\|_{L^2(\Omega)} + C \left(\sum_{i=1}^n \Delta t \left(\|f^i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g_i^1\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|U_h^n\|_{H^1(\Omega)} &\leq C \|u_{h0}\|_{\beta} + C \left(\sum_{i=1}^n \left(\Delta t \|f^i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g_i^2\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

定理 5.2. 设 U^n 和 u 分别为(25)和(6)的解, 若初始条件误差为

$$\|u_{h0} - u_0\|_{L^2(\Omega)} + h \|u_{h0} - u_0\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^2 \|u_0\|_{H^2(\Omega)}.$$

则有

$$\|U^n - u(t_n)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \left(\|u_0\|_{H^2(\Omega)} + \int_0^{t_n} \|u_t(s)\|_{H^2(\Omega)} ds \right) + C\Delta t \int_0^{t_n} \|u_{tt}(s)\|_{L^2(\Omega)} ds, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \|U^n - u(t_n)\|_{H^1(\Omega)} &\leq Ch \left(\|u_0\|_{H^2(\Omega)} + \|u(t_n)\|_{H^2(\Omega)} + \left(\int_0^{t_n} \|u_t(s)\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2} \right) \\ &\quad + C\Delta t \left(\int_0^{t_n} \|u_{tt}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2}, \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (27)$$

证明: 相似于半离散误差分析中的误差分解

$$u(t_n) - U^n = (u(t_n) - R_h u(t_n)) + (R_h u(t_n) - U^n) = \rho^n + \theta^n,$$

方程(17)的离散形式为

$$\left(\frac{\theta^n - \theta^{n-1}}{\Delta t}, v \right) + a(\theta^n, v) = (\omega^n, v) \quad \forall v \in V_h, \quad n \geq 1, \quad (28)$$

其中

$$\begin{aligned} \omega^n &= R_h \frac{u(t_n) - u(t_{n-1})}{\Delta t} - u_t(t_n) \\ &= (R_h - I) \frac{u(t_n) - u(t_{n-1})}{\Delta t} + \frac{u(t_n) - u(t_{n-1})}{\Delta t} - u_t(t_n) = \omega_1^n + \omega_2^n. \end{aligned} \quad (29)$$

进一步

$$\begin{aligned} \Delta t \omega_1^j &= (R_h - I) \int_{t_{j-1}}^{t_j} u_t ds = \int_{t_{j-1}}^{t_j} (R_h - I) u_t(s) ds, \\ \Delta t \omega_2^j &= u(t_j) - u(t_{j-1}) - \Delta t u_t(t_j) = - \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) u_{tt}(s) ds, \end{aligned}$$

利用方程(11) (13), 得到

$$\Delta t \|\omega_1^j\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|u_t(s)\|_{H^2(\Omega)} ds, \quad (30)$$

$$\Delta t \|\omega_1^j\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|u_t(s)\|_{H^1(\Omega)} ds, \quad (31)$$

$$\Delta t \|\omega_2^j\|_{L^2(\Omega)} \leq C\Delta t \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|u_{tt}(s)\|_{L^2(\Omega)} ds. \quad (32)$$

在方程(28)中令 $v = \theta^n$, 则有

$$\|\theta^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\theta^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} \|\theta^n\|_{L^2(\Omega)} + \Delta t \|\omega^n\|_{L^2(\Omega)} \|\theta^n\|_{L^2(\Omega)},$$

于是

$$\|\theta^n\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\theta^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} + \Delta t \|\omega^n\|_{L^2(\Omega)},$$

对上式的 n 求和

$$\|\theta^n\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\theta^0\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^n \Delta t \|\omega^j\|_{L^2(\Omega)}, \quad (33)$$

利用方程(14)和(30) (32) (33), 即得方程(26)。在方程(28), 再取 $v = \frac{\theta^n - \theta^{n-1}}{\Delta t}$

$$\left(\frac{\theta^n - \theta^{n-1}}{\Delta t}, \frac{\theta^n - \theta^{n-1}}{\Delta t} \right) + a \left(\theta^n, \frac{\theta^n - \theta^{n-1}}{\Delta t} \right) = \left(\omega^n, \frac{\theta^n - \theta^{n-1}}{\Delta t} \right) \leq \frac{1}{4} \|\omega^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\theta^n - \theta^{n-1}}{\Delta t} \right\|_{L^2(\theta^n)}^2,$$

得到

$$C\|\theta^n\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq a(\theta^n, \theta^n) \leq a(\theta^{n-1}, \theta^{n-1}) + \frac{\Delta t}{2} \|\omega^n\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

上式对 n 求和

$$\|\theta^n\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\theta^0\|_{H^1(\Omega)} + C\left(\sum_{j=1}^n \Delta t \|\omega^j\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2}. \quad (34)$$

结合方程(31) (33) (34), 得到(27)。

6. 数值实验

6.1. 算例 1 纯 Dirichlet 边界条件的线性抛物问题

在本例中, 考虑在 $\Omega = (0,1)^2 \times (0,T)$ 上具有 Dirichlet 边界条件的线性抛物问题, 其中方程(3)中的参数设为 $A = \text{diag}(1,1)$, $b=1$, $T=1$ 以及 $\Gamma_2 = \emptyset$ 。精确解为[13]

$$u = \exp(-2t) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2).$$

为计算方便, 时间步长取为 $\Delta t = h$ 。图 1 给出了使用线性基函数($\bar{m}=1$), 21×21 等距节点分和 Nitsche 参数 $\beta = 50$ 时, 精确解 u , 数值解 u_h 和误差 $|u - u_h|$, 显然, 向后 Euler 无单元 Galerkin 数值格式拥有较高的数值精度。图 2 展示了误差 $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ 和 $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ 随节点间距 h 变化的对数 - 对数图, 基于不同的 Nitsche 参数 $\beta = 5$, $\beta = 50$, $\beta = 150$ 和 $\beta = 300$, 以及四种等距节点分布 11×11 , 21×21 , 41×41 和 81×81 。容易看出, 不同的 Nitsche 参数并不影响数值解的收敛, 同时在 $\Delta t = h$ 时, 误差 $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ 和 $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ 均保持了线性收敛, 这些数值结果与理论误差估计一致。根据表 1, 当 $\Delta t = h$ 时, L^2 和 H^1 误差的收敛阶分别约为 0.96 和 1.00, 表明时间步长与空间网格尺寸同阶时误差呈线性收敛, 这与理论分析结果一致。从表 2 可以看出, 当采用 $\Delta t = h^2/4$, L^2 误差收敛阶提升至约 2.00, 而 H^1 误差仍保持约 1 阶收敛, 这依然与理论分析结果保持一致。

Table 1. Numerical errors of example 1 with Nitsche parameter $\beta = 50$ and $\Delta t = h$

表 1. 算例 1 在 Nitsche 参数 $\beta = 50$ 和 $\Delta t = h$ 的数值误差

h	$\Delta t = h$	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	收敛阶	$\ u - u_h\ _{H^1(\Omega)}$	收敛阶
1/10	1/10	6.3971E-4		1.2672E-2	
1/20	1/20	3.3921E-4	0.92	6.3540E-3	1.00
1/40	1/40	1.7493E-4	0.96	3.1780E-3	1.00
1/80	1/80	8.9912E-5	0.96	1.6014E-3	0.99

Table 2. Numerical errors of example 1 with Nitsche parameter $\beta = 50$ and $\Delta t = h^2/4$

表 2. 算例 1 在 Nitsche 参数 $\beta = 50$ 和 $\Delta t = h^2/4$ 的数值误差

h	$\Delta t = h^2/4$	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	收敛阶	$\ u - u_h\ _{H^1(\Omega)}$	收敛阶
1/10	1/25	2.3673E-4		1.2296E-2	
1/20	1/100	5.9190E-5	2.00	6.1404E-3	1.00
1/40	1/400	1.4855E-5	1.99	3.0942E-3	0.99
1/80	1/1600	3.7375E-6	1.99	1.5687E-3	0.98

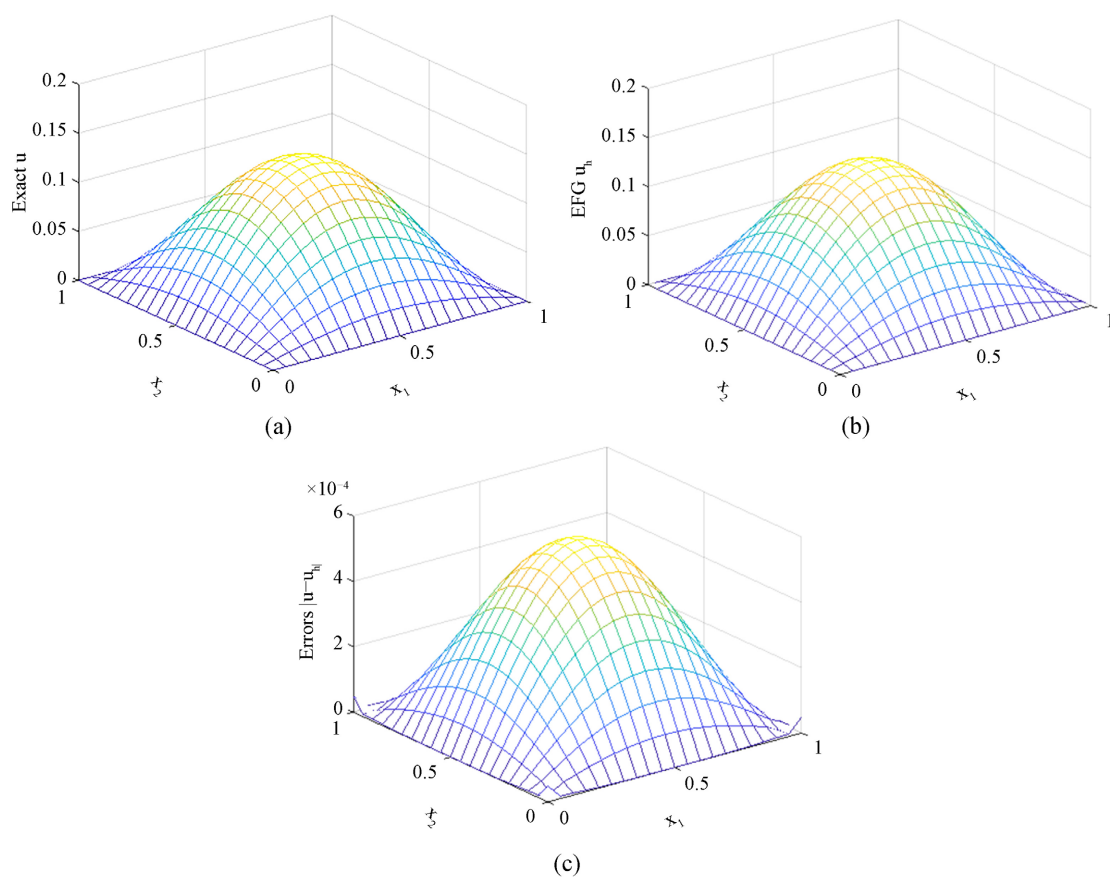


Figure 1. Example 1 at $T=1$: (a) exact solution u , (b) numerical solution u_h , (c) error $|u - u_h|$

图 1. 算例 1 在 $T=1$ 时 (a) 精确解 u , (b) 数值解 u_h , (c) 误差 $|u - u_h|$

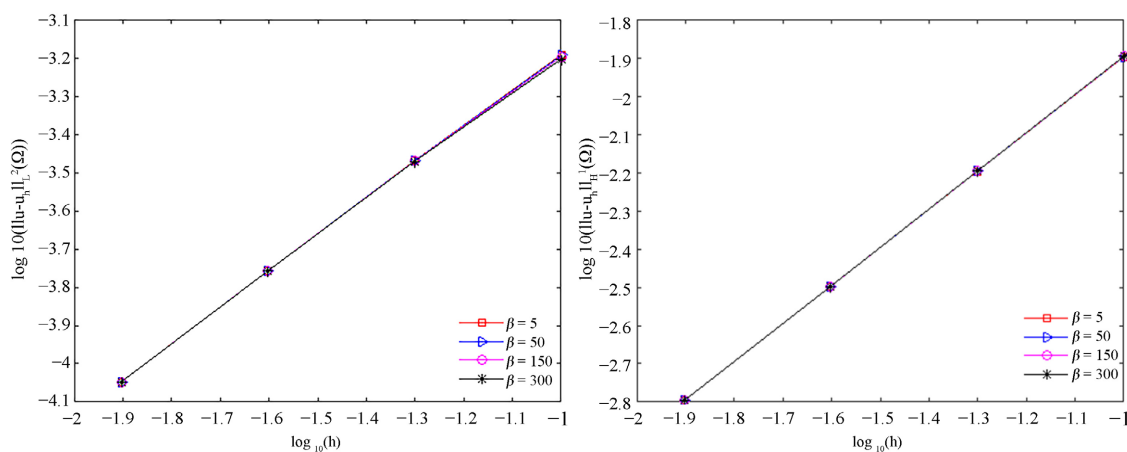


Figure 2. Example 1 errors with different Nitsche parameters: left $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$, right $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$

图 2. 算例 1 在不同 Nitsche 参数误差情况, 左边 $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$, 右边 $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$

6.2. 算例 2 混合边界条件的线性抛物问题

其次, 考虑在 $(0,1)^2 \times (0,T)$ 上的混合边界线性抛物问题, 其精确解为[13]

$$u = \exp(-t) \left(x_1^2 x_2 + \sin(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2) + 2 \right),$$

参数取值为 $A = \text{diag}(1, 1)$, $T = 1$, $b = x_1^2 + x_2^2 + 2$, $\sigma = x_1$ 。在 $(0, x_2) \times (0, T)$ 和 $(x_1, 0) \times (0, T)$ 上给定 Dirichlet 边界条件, 在 $(1, x_2) \times (0, T)$ 和 $(x_1, 1) \times (0, T)$ 上给定 Robin 边界条件。图 3 展示了在线性基函数 ($\bar{m} = 1$), 21×21 等距节点分布、Nitsche 参数 $\beta = 50$ 和 $T = 1$ 时的 EFG 解 u_h 以及绝对误差 $|u - u_h|$ 。这些数值结果是基于时间步长 $\Delta t = h$, Nitsche 参数 $\beta = 50$, 均匀分布的 21×21 个节点和线性基函数, 显然, 数值解拥有很好的精度。表 3 和表 4 分别给出了在 $T = 1$ 时 $\Delta t = h$ 和 $\Delta t = h^2/4$ 的数值误差, 前者的 L^2 误差和 H^1 误差的收敛阶均约为 1, 而后者的 L^2 误差收敛阶为 2 阶, H^1 误差收敛阶为 1, 这些数值结果仍然与理论分析结果保持一致。

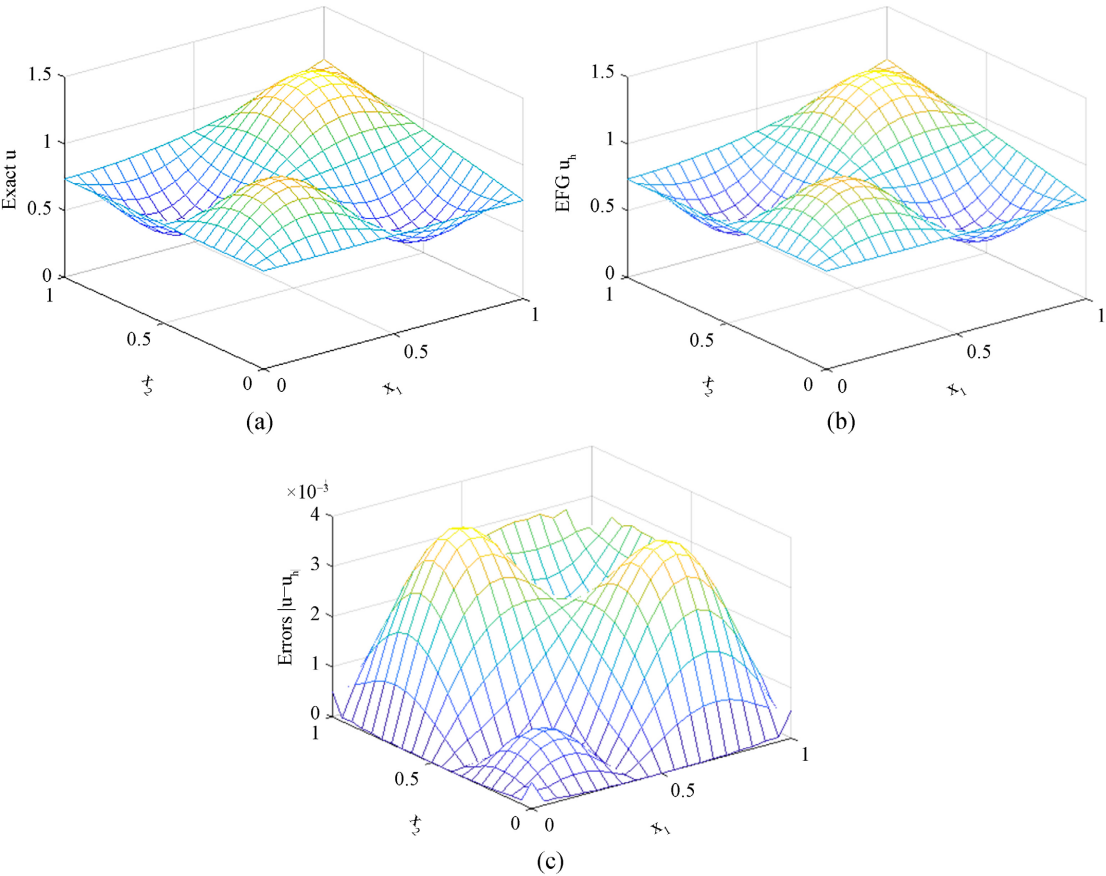


Figure 3. Example 2 at $T = 1$: (a) exact solution u , (b) numerical solution u_h , (c) error $|u - u_h|$

图 3. 算例 2 在 $T = 1$ 时 (a) 精确解 u , (b) 数值解 u_h , (c) 误差 $|u - u_h|$

Table 3. Numerical errors of example 3 with Nitsche parameter $\beta = 50$ and $\Delta t = h$

表 3. 算例 2 在 Nitsche 参数 $\beta = 50$ 和 $\Delta t = h$ 的数值误差

h	$\Delta t = h$	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	收敛阶	$\ u - u_h\ _{H^1(\Omega)}$	收敛阶
1/10	1/10	4.2580E-3		1.3021E-1	
1/20	1/20	1.9577E-3	1.12	6.6519E-2	0.97
1/40	1/40	9.5273E-4	1.04	3.3431E-2	0.99
1/80	1/80	4.7369E-4	1.01	1.7391E-2	0.94

Table 4. Numerical errors of example 2 with Nitsche parameter $\beta = 50$ and $\Delta t = h^2/4$

表 4. 算例 2 在 Nitsche 参数 $\beta = 50$ 和 $\Delta t = h^2/4$ 的数值误差

h	$\Delta t = h^2/4$	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	收敛阶	$\ u - u_h\ _{H^1(\Omega)}$	收敛阶
1/10	1/25	2.6202E-3		1.2986E-1	
1/20	1/100	6.6196E-4	1.98	6.6335E-2	0.97
1/40	1/400	1.6593E-4	1.99	3.3338E-2	0.99
1/80	1/1600	4.1825E-5	1.99	1.6905E-2	0.98

7. 结论

针对带有混合边界条件的线性抛物方程, 本文提出并分析了一种基于无单元 Galerkin (EFG)法进行空间离散、向后 Euler 格式进行时间推进的无网格数值求解。由于 EFG 方法不需要显式网格划分, 能够灵活处理复杂区域与边界, 但在本质边界条件的精确施加上存在固有困难, 因此引入 Nitsche 方法以实现 Dirichlet 边界条件的弱施加, 从而避免了传统拉格朗日乘子法带来的系统规模扩大或条件数恶化问题。在时间离散方面, 采用向后 Euler 格式构造全离散格式, 该格式具有良好的数值稳定性。在此基础上, 本文分别推导了半离散(仅空间离散)和全离散(时空联合离散)格式下的误差估计, 获得了关于空间步长与时间步长的显式收敛阶, 理论结果显示了该方法在 H^1 与 L^2 范数下的最优收敛性。最后, 通过 2 个典型数值算例, 验证了理论分析中给出的收敛速度及方法的有效性, 表明所提出的 EFG-向后 Euler 组合格式与 Nitsche 边界处理方式能够准确、稳定地求解混合边界线性抛物问题。

基金项目

重庆市教育委员会科学技术研究项目(KJQN202301521)资助。

参考文献

- [1] Taylor, M.E. (2024) Partial Differential Equations I: Basic Theory. 3rd Edition, Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-33859-5>
- [2] Thomée, V. (1997) Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-03359-3>
- [3] Düring, B. and Heuer, C. (2015) High-Order Compact Schemes for Parabolic Problems with Mixed Derivatives in Multiple Space Dimensions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **53**, 2113-2134. <https://doi.org/10.1137/140974833>
- [4] Liu, G.R. (2009) Meshfree Methods: Moving beyond the Finite Element Method. 2nd Edition, CRC Press.
- [5] 程玉民. 无网格方法[M]. 北京: 科学出版社, 2015.
- [6] 李小林. 无网格微分方程数值解法[M]. 北京: 科学出版社, 2025.
- [7] Li, J.C., Hon, Y.C. and Chen, C.S. (2002) Numerical Comparisons of Two Meshless Methods Using Radial Basis Functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **26**, 205-225. [https://doi.org/10.1016/s0955-7997\(01\)00101-1](https://doi.org/10.1016/s0955-7997(01)00101-1)
- [8] Gavete, L., Benito, J.J. and Ureña, F. (2016) Generalized Finite Differences for Solving 3D Elliptic and Parabolic Equations. *Applied Mathematical Modelling*, **40**, 955-965. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.07.003>
- [9] Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L. (1994) Element-Free Galerkin Methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**, 229-256. <https://doi.org/10.1002/nme.1620370205>
- [10] Li, X.L. (2016) Error Estimates for the Moving Least-Square Approximation and the Element-Free Galerkin Method in N-Dimensional Spaces. *Applied Numerical Mathematics*, **99**, 77-97. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2015.07.006>
- [11] Zhang, T. and Li, X. (2019) Variational Multiscale Interpolating Element-Free Galerkin Method for the Nonlinear Darcy-Forchheimer Model. *Computers & Mathematics with Applications*, **79**, 363-377. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.07.003>
- [12] Shen, Q., Ding, R. and Zhu, Z. (2020) Convergence Analysis and Error Estimates of the Interpolating Element-Free

-
- Galerkin Method for the Evolutionary Variational Inequality of the Second-Order in Time. *Computational and Applied Mathematics*, **39**, Article No. 130. <https://doi.org/10.1007/s40314-020-01154-2>
- [13] Zhang, T., Li, X.L. and Xu, L.W. (2022) Error Analysis of an Implicit Galerkin Meshfree Scheme for General Second-Order Parabolic Problems. *Applied Numerical Mathematics*, **177**, 58-78. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2022.03.005>
 - [14] Nitsche, J. (1971) Über Ein Variationsprinzip Zur Lösung Von Dirichlet-Problemen Bei Verwendung Von Teilräumen, Die Keinen Randbedingungen Unterworfen Sind. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, **36**, 9-15. <https://doi.org/10.1007/bf02995904>
 - [15] Zhang, Q.H. (2014) Quadrature for Meshless Nitsche's Method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **30**, 265-288. <https://doi.org/10.1002/num.21808>
 - [16] Li, X.L. and Li, S.L. (2023) Effect of an Efficient Numerical Integration Technique on the Element-Free Galerkin Method. *Applied Numerical Mathematics*, **193**, 204-225. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2023.07.026>
 - [17] Lehrenfeld, C. (2015) The Nitsche XFEM-DG Space-Time Method and Its Implementation in Three Space Dimensions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **37**, A245-A270. <https://doi.org/10.1137/130943534>
 - [18] Xu, Y., Zhou, Z.G. and Zhao, J.J. (2025) Error Estimates of a Class of Serendipity Virtual Element Methods for Semilinear Parabolic Integro-Differential Equations on Curved Domains. *Journal of Computational Mathematics*, **44**, 479-520.