

交叉立方体网络的双不交圈覆盖泛圈性

孙 可¹, 丁瞳瞳², 牛瑞超^{1*}

¹中央民族大学理学院, 北京

²郑州轻工业大学数学与信息科学学院, 河南 郑州

收稿日期: 2026年6月15日; 录用日期: 2026年7月9日; 发布日期: 2026年7月16日

摘 要

设 r_1, r_2 为满足 $r_2 \geq r_1 \geq 0$ 的两个整数, 在图 G 中若对任意两个顶点 $u, v \in V(G)$ 以及任意满足 $r_1 \leq l \leq r_2$ 的整数 l , 在图 G 中总存在两个顶点不交的圈 J_1 和 J_2 满足 $|V(J_1)| = l$, $|V(J_2)| = |V(G)| - l$, 且 $u \in V(J_1)$, $v \in V(J_2)$, 则图 G 被称为是 $[r_1, r_2]$ -双不交圈覆盖泛圈图。本文研究 n 维交叉立方体网络的双不交圈覆盖泛圈性, 并证明 $n \geq 3$ 时, 任意 n 维交叉立方体网络都是 $[4, 2^{n-1}]$ -双不交圈覆盖泛圈图, 且结果达到最优。

关键词

交叉立方体网络, 点不交圈覆盖, 双不交圈泛圈性

Two-Disjoint-Cycle-Cover Pancyclicity of Crossed Cube

Ke Sun¹, Tongtong Ding², Ruichao Niu^{1*}

¹School of Science, Minzu University of China, Beijing

²College of Mathematics and Information Science, Zhengzhou University of Light Industry, Zhengzhou Henan

Received: June 15, 2026; accepted: July 9, 2026; published: July 16, 2026

Abstract

Let r_1, r_2 be two integers with $r_2 \geq r_1 \geq 0$. A graph G is called two-disjoint-cycle-cover (2-DCC for short) $[r_1, r_2]$ -pancyclic if for any two vertices $u, v \in V(G)$ and any integer l satisfying $r_1 \leq l \leq r_2$, there exist two vertex-disjoint cycles J_1 and J_2 in G such that $|V(J_1)| = l$, $|V(J_2)| = |V(G)| - l$,

*通讯作者。

文章引用: 孙可, 丁瞳瞳, 牛瑞超. 交叉立方体网络的双不交圈覆盖泛圈性[J]. 应用数学进展, 2026, 15(7): 93-102.
DOI: 10.12677/aam.2026.157305

$u \in V(J_1), v \in V(J_2)$. In this paper, we study the 2-DCC pancyclicity of the n -dimensional crossed cube and prove that for $n \geq 3$, every n -dimensional crossed cube network is $[4, 2^{n-1}]$ -two-disjoint-cycle-cover pancyclic, and the result is optimal.

Keywords

Crossed Cube, Vertex-Disjoint Cycles Cover, Two-Disjoint-Cycle-Cover Pancyclicity

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

作为超级计算机的关键组成部分，互连网络的拓扑结构与性能特性是高性能计算研究的核心课题。在网络设计与选型中，Hamilton 性、泛圈性、连通度、直径等指标是评估性能的重要依据。面对日益提升的系统性能需求，处理器核间的互连架构需同时满足低延迟、高吞吐率与高可扩展性，传统架构已难以适配，片上互连网络因此成为研究热点。分析时，通常将互连网络抽象为无向图：顶点对应处理器，边对应通信链路。

圈是图论和互连网络中的基础结构，指除起点和终点外其余顶点互不相同的闭合路径，可支撑广播通信、容错路由、任务分配等多种关键应用。如果一个网络包含所有不同长度的圈，则称该网络具有泛圈性。泛圈性是衡量网络灵活性的重要指标，具有泛圈性的网络可根据任务需求灵活选择合适长度的通信路径。在泛圈性研究的基础上，圈覆盖问题进一步要求用多个圈覆盖所有顶点，其中双不交圈覆盖指用两个顶点互不相交的圈覆盖全网顶点，既支持并行任务执行、提升计算效率，又能通过冗余结构增强容错能力，在任务迁移、负载均衡、网络诊断等场景中具有重要价值。学者们已关于 (n, k) 星图[1]，飞龙网络[2]，冒泡排序星图[3]， (n, k) 冒泡排序网络[4]，增广立方体网络[5]，分裂星网络[6]等网络均证明了其双不交圈覆盖泛圈性。

超立方体凭借结构对称、路由简单等优势，成为经典互连网络拓扑，但其直径随维数线性增长的缺陷，在大规模系统中易引发通信延迟瓶颈。交叉立方体网络由 Efe 于 1992 年首次提出[7]，是一种重要的超立方体变种，在保持顶点数与度不变的前提下，通过调整边连接规则将直径减半，平均距离显著缩短，且具备更优的容错性与泛圈性，是性能突出、兼具理论研究与应用价值的互连网络，也是本文的核心研究对象。

2. 基本概念

2.1. 基本定义

一个图 G 是指一个有序二元对 $(V(G), E(G))$ ，其中 $V(G)$ 是顶点集，而边集 $E(G)$ 是由顶点集与一个关联函数确定的，这个关联函数使得边集中的每一条边与两个顶点相关联。若 e 是由顶点 u, v 确定的一条边，则记边 $e = (u, v)$ ，其中 u, v 被称为边 e 的端点。并且称一条边的两个端点是与该边关联的，反之亦然。而与同一条边关联的两个顶点被称为是相邻的，且与同一顶点关联的边也称为是相邻的。记图 G 中顶点 u 的邻点集为 $N_G(u)$ ，并定义顶点 u 在图 G 中的点度为 $\deg_G(u) = |N_G(u)|$ 。对于 G 中两个顶点集 A, B ，记 $E(A, B) = \{(x, y) \in E(G) \mid x \in A, y \in B\}$ 。

对于正整数 k 以及互不相同的顶点 $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, 如果 v_1 只与 v_2 相邻, v_k 只与 v_{k-1} 相邻, 而当 $1 < i < k$ 时, v_i 只与 v_{i-1} 和 v_{i+1} 相邻, 那么这个图被称为是一条 v_1, v_k -路, 我们用 $P = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ 来表示它。进一步地, 若在路 P 的基础上添加一条连接顶点 v_1 与 v_k 的边, 则称这个图为圈, 类似地, 我们用 $C = \langle v_1, v_2, \dots, v_k, v_1 \rangle$ 来表示它。而路(或圈)中边的数量称为这条路(或圈)的长度。其中图 G 中最短的圈的长度被称为图 G 的围长, 记为 $g(G)$ 。对于连通图 G 中任意两顶点 x, y , 它们之间的距离 $d_G(x, y)$ 是指图 G 中连接这两顶点的最短路的长度。

定义 2.1.1 [8] 包含图 G 的每个顶点的路称为 Hamilton 路; 类似地, 图 G 的 Hamilton 圈是指包含图 G 的每个顶点的圈。若一个图包含 Hamilton 圈, 则称这个图是 Hamilton 图。

定义 2.1.2 [8] 若图 G 中存在两个点不交圈经过图中每个点, 则这两个点不交圈称为图 G 的双不交圈覆盖。

定义 2.1.3 [8] 对于图 G 以及整数 r_1, r_2 , 如果图中存在双不交圈覆盖 J_1, J_2 其长度分别为 l 和 $|V(G)| - l$, 其中 l 是满足条件 $r_1 \leq l \leq r_2$ 的任意整数, 那么称图 G 是 $[r_1, r_2]$ -双不交圈覆盖泛圈的。

根据定义 2.1.3 中的对称性可知, r_1 不小于图的围长(最小圈长度), r_2 不超过图总点数的一半。

2.2. 交叉立方体网络

在给出交叉立方体网络的定义之前, 我们先给出以下相关对的定义。

定义 2.2.1 [9] 两个二元序列 $x = x_1 x_2, y = y_1 y_2$ 称为相关对, 并记为 $x \sim y$, 当且仅当 $(x, y) \in \{(00, 00), (10, 10), (01, 11), (11, 01)\}$ 。

下面我们用递归方式定义 n 维交叉立方体 CQ_n , 规定 n 维交叉立方体 CQ_n 的顶点用长为 n 的二进制字符串表示, 如 $u = u_{n-1} u_{n-2} \dots u_0$, 其中 $u_i \in \{0, 1\} (0 \leq i \leq n-1)$ 。

定义 2.2.2 [9] 维数为 1 的交叉立方体 CQ_1 是顶点标号分别为 0 和 1 的完全图。 n 维交叉立方体 CQ_n 包含两个 $n-1$ 维子交叉立方体 CQ_n^0, CQ_n^1 , 其中 CQ_n^0, CQ_n^1 顶点的第一位分别是 0 和 1, $u = 0u_{n-2}u_{n-3} \dots u_0$, $v = 1v_{n-2}v_{n-3} \dots v_0$ 则 u 和 v 在 CQ_n 中相邻当且仅当以下两条均成立:

- (1) n 是偶数, 那么 $u_{n-2} = v_{n-2}$ 。
- (2) 当 $0 \leq i < \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ 时, $u_{2i+1} u_{2i} \sim v_{2i+1} v_{2i}$ 。

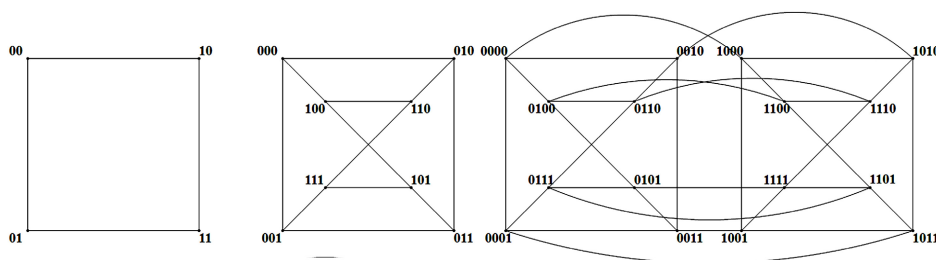


Figure 1. CQ_2, CQ_3, CQ_4

图 1. CQ_2, CQ_3, CQ_4

当 $n = 2, 3, 4$ 时, CQ_2, CQ_3, CQ_4 如图 1 所示。

3. 主要结论的证明

为了更好地证明交叉立方体的双不交圈覆盖性, 我们首先给出一个关于 Hamilton 性的引理。

引理 3.1 [9] 维数为 3 的交叉立方体网络 CQ_3 中任意选取两点存在以这两点为端点的 Hamilton 路。

此外还需要证明引理 3.2 和引理 3.3, 才能最终完成主定理 3.4 的证明。

引理 3.2 对于 CQ_n ($n \geq 3$) 中任意两点 u, v 存在一条长度为 3 的路径 P 和一个与之不交的圈 C 覆盖 CQ_n 且 $u \in V(C)$, $v \in V(P)$ 。

证明: 当 $n=3$ 时, 不妨设 u 为 000。

对 CQ_3 圈我们给出圈 $\langle 000, 001, 111, 110, 010 \rangle$ 和路径 $\langle 100, 101, 011 \rangle$ 以及圈 $\langle 000, 001, 011, 101, 100, 000 \rangle$ 和路径 $\langle 111, 110, 010 \rangle$ 以及圈 $\langle 000, 010, 011, 101, 100, 000 \rangle$ 和路径 $\langle 001, 111, 110 \rangle$ 即为所求, 由于这三条路径包括了 CQ_3 中所有的点, 所以对 CQ_3 中任意的 v 存在满足条件的圈与路径, 如图 2 所示。

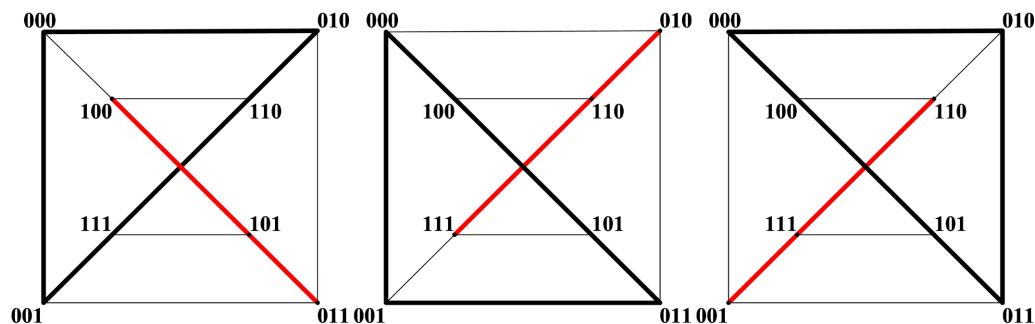


Figure 2. The case when $n=3$ in Lemma 3.2

图 2. 引理 3.2 在 $n=3$ 的情况

假设命题在 CQ_{n-1} 成立, 下面证明引理 3.2 对 CQ_n 成立。

不妨假设 u 在 CQ_n^0 中。

对于 CQ_n 可以根据定义 2.2.2 将 CQ_n 分为两个子图 CQ_n^0 , CQ_n^1 。

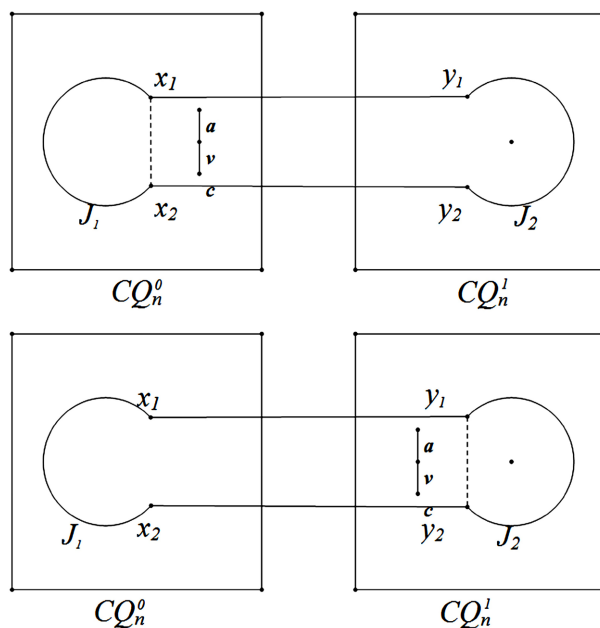


Figure 3. Case 1,2 in Lemma 3.2

图 3. 引理 3.2 情况 1,2

情况 1 $v \in V(CQ_n^0)$

根据假设可知在子图 CQ_n^0 中存在一条长度为 3 的路径 $\langle a, v, c \rangle$ 和一个与之不交的圈 J_1 任取圈 J_1 两相邻点 x_1, x_2 再取 x_1, x_2 在 CQ_n^1 中相邻的点 y_1, y_2 ，由引理 3.1.2 可知，在子图 CQ_n^1 中存在以 y_1 为起点以 y_2 为终点的 Hamilton 路 $\langle y_1, \dots, y_2 \rangle$ 所以 $\langle x_1, y_1, \dots, y_2, x_2, \dots, x_1 \rangle$ 即为一个圈，此圈与路径 $\langle a, v, c \rangle$ 不交且包含 u 并与此路径覆盖 CQ_n 。

情况 2 $v \in V(CQ_n^1)$

在子图 CQ_n^1 中存在一条长度为 3 的路径 $\langle a, v, c \rangle$ 和一个与之不交的圈 J_2 任取圈 J_2 两相邻点 y_1, y_2 再取此两点在 CQ_n^0 中相邻的点 x_1, x_2 ，由引理 3.1 可知，在子图 CQ_n^0 中存在以 x_1 为起点以 x_2 为终点的 Hamilton 路 $\langle x_1, \dots, x_2 \rangle$ 所以 $\langle y_1, x_1, \dots, x_2, y_2, \dots, y_1 \rangle$ 即为一个圈，此圈与路径 $\langle a, v, c \rangle$ 不交且包含 u 并与此路径覆盖 CQ_n 。

综上所述对于 CQ_n 中任意两点存在满足条件的路径和圈，如图 3 所示。

引理 3.3 对于 CQ_n 存在一条长度为 2 的路径 P 和一个与之不交的圈 C ，使得 $V(CQ_n) = V(P) \cup V(C)$ 。

证明：先证明当 $n=3$ 时命题成立。

由于 CQ_3 圈 $\langle 000, 100, 101, 111, 110, 010, 011, 001 \rangle$ 和路径 $\langle 001, 011 \rangle$ 满足条件，如图 4 所示，所以当 $n=3$ 时命题成立。

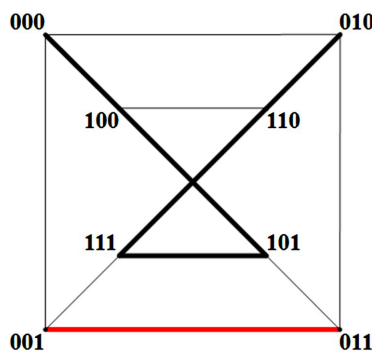


Figure 4. The case when $n=3$ in Lemma 3.3

图 4. 引理 3.3 在 $n=3$ 的情况

假设命题在 CQ_{n-1} 成立，下面证明命题在 CQ_n 成立。

对于 CQ_n 可以根据定义 2.2.2 将 CQ_n 分为两个子图 CQ_n^0 ， CQ_n^1 在子图 CQ_n^0 中存在一条长度为 2 的路径 $\langle a, b \rangle$ 和一个与之不交的圈覆盖 CQ_n^0 任取圈 J_1 两相邻点 x_1, x_2 ，再取此两点在 CQ_n^1 中相邻的点 y_1, y_2 ，由引理 3.1 可知，在子图 CQ_n^1 中存在以 y_1 为起点以 y_2 为终点的 Hamilton 路 $\langle y_1, \dots, y_2 \rangle$ ，所以 $\langle x_1, y_1, \dots, y_2, x_2, \dots, x_1 \rangle$ 即为一个圈，此圈与路径 $\langle a, b \rangle$ 不交并与此路径覆盖 CQ_n ，如图 5 所示。

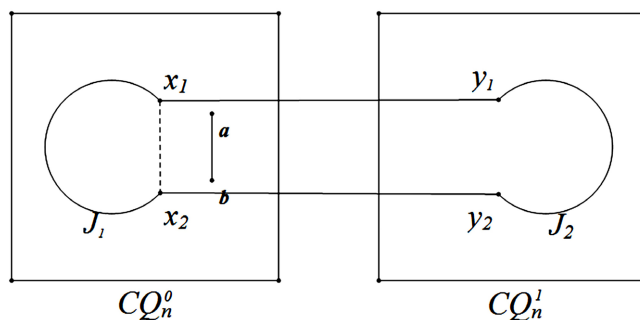


Figure 5. The induction of Lemma 3.3

图 5. 引理 3.3 的归纳证明

综上所述, 引理 3.3 成立。

下面来证明 CQ_n 的双不交圈覆盖性。

定理 3.4 CQ_n ($n \geq 3$) 是 $[4, 2^{n-1}]$ -双不交圈覆盖泛圈的。

证明: 首先证明命题在 $n=3$ 时成立。

对于 CQ_3 存在圈 $\langle 000, 100, 110, 010 \rangle$ 与圈 $\langle 111, 101, 011, 001 \rangle$ 此即为双不交圈覆盖, 所以命题在 $n=3$ 时成立, 如图 6 所示。

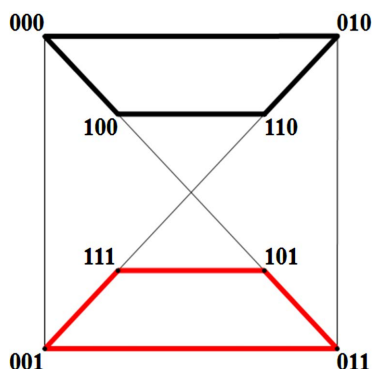


Figure 6. The case when $n=3$ in Theorem 3.4

图 6. 定理 3.4 在 $n=3$ 的情况

假设 CQ_{n-1} 是 $[4, 2^{n-1}]$ -双不交圈覆盖泛圈的。

根据定义 1.2.3 只需证明 CQ_n 中对任意满足 $4 \leq l \leq 2^{n-1}$ 的整数 l 存在长度为 l 和 $|V(G)| - l$ 的双不交圈覆盖即可。

情况 1 $4 \leq l \leq 2^{n-1} - 4$

由假设 CQ_{n-1} 是 $[4, 2^{n-1}]$ -双不交圈覆盖泛圈的, 则 CQ_n^0 中存在长为 4 到 $2^{n-1} - 4$ 的圈 J_1 与另一个与之不交的圈 J_2 覆盖 CQ_n^0 。

任取圈 J_1 中两个相邻点 x_1, x_2 与 x_1, x_2 在 CQ_n^1 中的相邻点 y_1, y_2 由引理 3.1 可知 y_1, y_2 之间存在 CQ_n^1 的 Hamilton 路 $\langle y_2, \dots, y_1 \rangle$, 于是 $\langle x_1, \dots, x_2, y_2, \dots, y_1, x_1 \rangle$ 即为新圈 J'_1 , 与圈 J_2 形成新的双不交圈覆盖, 如图 7 所示。

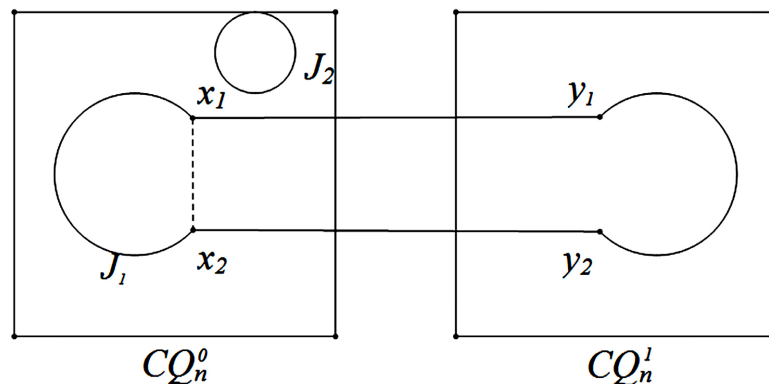


Figure 7. Case 1 in Theorem 3.4

图 7. 定理 3.4 情况 1

情况 2.1 $l = 2^{n-1} - 3$

由引理 3.2 可知存在一条长度为 3 的路径 $\langle a, b, c \rangle$ 和一个与之不交的、长度为 $2^{n-1} - 3$ 的圈 J_1 覆盖 CQ_n^0 。

设 a, c 在 CQ_n^1 中的相邻点分别为 z_1, z_2 ，由引理 3.1 可知在子图 CQ_n^1 中存在 Hamilton 路 $\langle z_1, \dots, z_2 \rangle$ ，于是 $\langle z_1, \dots, z_2, c, b, a, z_1 \rangle$ 即为长度为 $2^{n-1} + 3$ 的圈 J_2 ， J_1, J_2 不交并覆盖 CQ_n ，如图 8 所示。

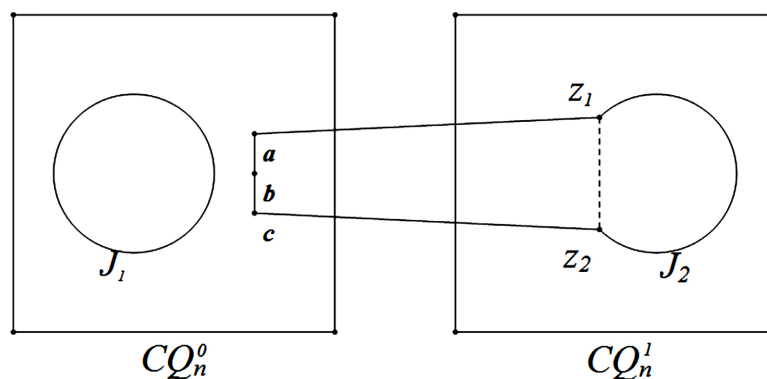


Figure 8. Case 2.1 in Theorem 3.4

图 8. 定理 3.4 情况 2.1

情况 2.2 $l = 2^{n-1} - 2$

由引理 3.3 可知存在一条长度为 2 的路径和一个与之不交的、长度为 $2^{n-1} - 2$ 的圈 J_1 覆盖子图 CQ_n^0 ， a, b 在 CQ_n^1 中的相邻点分别为 z_1, z_2 ，由引理 3.1.2 可知在子图 CQ_n^1 中存在 Hamilton 路 $\langle z_1, \dots, z_2 \rangle$ ，于是 $\langle z_1, \dots, z_2, b, a, z_1 \rangle$ 即为长度为 $2^{n-1} + 2$ 的圈 J_2 ， J_1, J_2 不交并覆盖 CQ_n ，如图 9 所示。

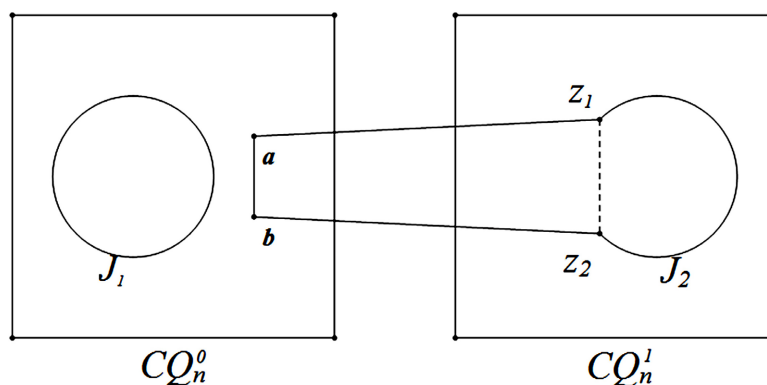


Figure 9. Case 2.2 in Theorem 3.4

图 9. 定理 3.4 情况 2.2

情况 2.3 $l = 2^{n-1} - 1$

首先证明命题在 CQ_4 成立。

对于 CQ_4 存在圈 $\langle 0000, 1000, 1010, 0010, 0110, 0111, 0001, 0000 \rangle$ 和圈 $\langle 0100, 1100, 1110, 1111, 1101, 1011, 1001, 0011, 0101, 0100 \rangle$

满足条件，如图 10 所示。

所以对于 $n = 4$ 的情况命题成立。

假设命题对 CQ_{n-1} 成立。下面证明 CQ_n 中存在长分别为 $2^{n-1} - 1$ 和 $2^{n-1} + 1$ 的两个不交圈。

将 CQ_n 分解为 CQ_n^0, CQ_n^1 ，再分别分解为 $CQ_n^{00}, CQ_n^{01}, CQ_n^{10}, CQ_n^{11}$ (CQ_n^{ij} 为 CQ_n 中首两位为 ij 的点构成的子图，其中 $i, j \in \{0, 1\}$)。我们首先在这里提出两个断言。

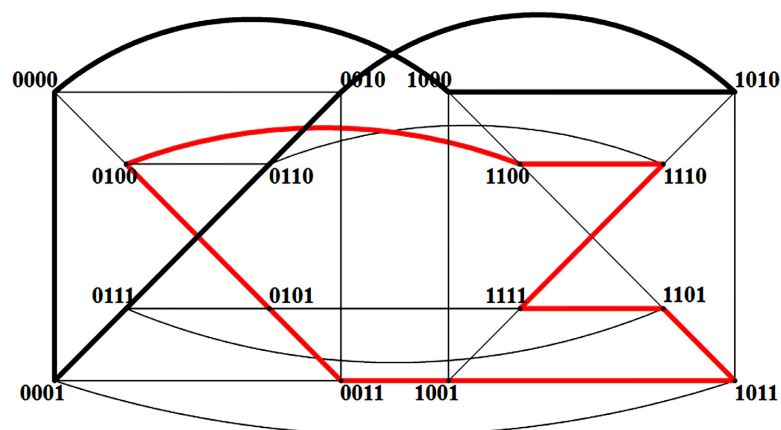


Figure 10. Case 2.3 ($n = 4$) in Theorem 3.4

图 10. 定理 3.4 情况 2.3 ($n = 4$)

断言 1: CQ_n^0 中长度分别为 $2^{n-2}-1, 2^{n-2}+1$ 的两个不交圈 J_1, J_2 分别都有 CQ_n^{00}, CQ_n^{01} 中的边。其中 $n \geq 5$ 。

首先, 若圈 $J_i, i \in \{1, 2\}$ 在子图 $CQ_n^{0j} (j \in \{0, 1\})$ 中有一点 x , 因此在圈 J_i 中 x 有两个相邻点 a_0, a_1 。根据定义 2.1.1, 若 $a_k \in V(CQ_n^{0(1-j)})$, $k \in \{0, 1\}$, 则 $a_{1-k} \notin V(CQ_n^{0(1-j)})$, 即 $a_{1-k} \in V(CQ_n^{0j})$ 。因此, $(x, a_{1-k}) \in E(CQ_n^{0j})$, 即圈 J_i 在子图 CQ_n^{0j} 中必有一边。

对于长度分别为 $2^{n-2}-1, 2^{n-2}+1$ 的不交圈 J_1, J_2 , 如果长度为 $2^{n-2}-1$ 的圈 J_1 所有点都在子图 $CQ_n^{0j}, j \in \{0, 1\}$ 中, 则圈 J_2 在这个子图中只有一个点但无边, 所以这种情况不可能存在, 因此 J_1, J_2 一定均包含两个子图 CQ_n^{00}, CQ_n^{01} 中的点, 进一步, 由上述证明可知, J_1, J_2 一定均包含两个子图 CQ_n^{00}, CQ_n^{01} 中的边。至此, 断言 1 成立。

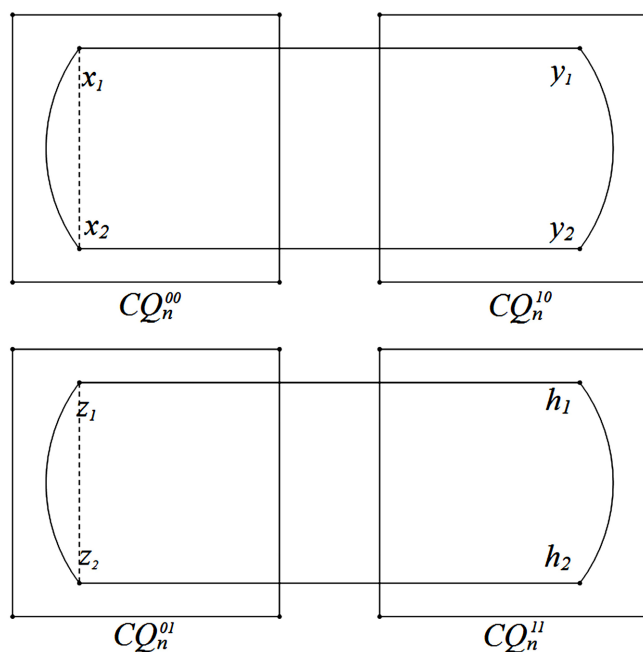


Figure 11. Case 2.3 in Theorem 3.4

图 11. 定理 3.4 情况 2.3

断言 2: CQ_n^{00} 在 CQ_n^1 中的邻点属于 $V(CQ_n^{10})$, CQ_n^{01} 在 CQ_n^1 中的邻点属于 $V(CQ_n^{11})$ 。

设 $a \in V(CQ_n^{00})$, 记 $a = 00a_{n-3}a_{n-4} \cdots a_1a_0$, 令 $b = 01a_{n-3}a_{n-4} \cdots a_1a_0$, 则根据定义 2.2.2 可知 $(a, b) \in E(CQ_n)$ 且 $b \in V(CQ_n^{10})$ 。结合定义 2.1.1, CQ_n^{00} 在 CQ_n^1 中的邻点属于 $V(CQ_n^{10})$ 。同理可证 CQ_n^{01} 在 CQ_n^1 中的邻点属于 $V(CQ_n^{11})$ 。至此断言 2 成立。

由断言 1 可知 CQ_n^0 中的圈 $J_1 \langle x_1, \cdots, x_2, x_1 \rangle$ 中必然有一条 CQ_n^{00} 的边 $\langle x_1, x_2 \rangle$, 取 x_1, x_2 在 CQ_n^{10} 的相邻点 y_1, y_2 , 由引理 3.1.2 可知 CQ_n^{10} 中存在一条 Hamilton 路 $\langle y_2, \cdots, y_1 \rangle$ 。所以 $\langle x_1, \cdots, x_2, y_2, \cdots, y_1, x_1 \rangle$ 即为长为 $2^{n-1}-1$ 的圈, 同理 CQ_n^0 中的圈 $J_2 \langle z_1, \cdots, z_2, z_1 \rangle$ 必然有一条 CQ_n^{01} 的边, 由断言 2 可知, 可以取边上两点 z_1, z_2 在 CQ_n^{11} 的相邻点 h_1, h_2 , 由引理 3.1 可知 CQ_n^{11} 中存在一条 Hamilton 路 $\langle h_2, \cdots, h_1 \rangle$ 所以 $\langle z_1, \cdots, z_2, h_2, \cdots, h_1, z_1 \rangle$ 即为长为 $2^{n-1}+1$ 的圈, 所以 $\langle x_1, \cdots, x_2, y_2, \cdots, y_1, x_1 \rangle, \langle z_1, \cdots, z_2, h_2, \cdots, h_1, z_1 \rangle$ 即为符合条件的双不交圈覆盖。如图 11 所示。

情况 2.4 $l = 2^{n-1}$

在子图 CQ_n^0 取两相邻点 x_1, x_2 , 在子图 CQ_n^1 取两相邻点 y_1, y_2 , 由引理 3.1.2 在子图 CQ_n^0, CQ_n^1 中分别存在 Hamilton 路 $\langle x_1, \cdots, x_2 \rangle, \langle y_2, \cdots, y_1 \rangle$, 而 $\langle x_1, \cdots, x_2, x_1 \rangle, \langle y_2, \cdots, y_1, y_2 \rangle$ 即为 CQ_n^0, CQ_n^1 中的 Hamilton 圈, 于是 $\langle x_1, \cdots, x_2, x_1 \rangle, \langle y_2, \cdots, y_1, y_2 \rangle$ 即为 CQ_n 的长为 2^{n-1} 和 2^{n-1} 的双不交圈覆盖, 如图 12。

至此, 定理 3.4 证明完成。

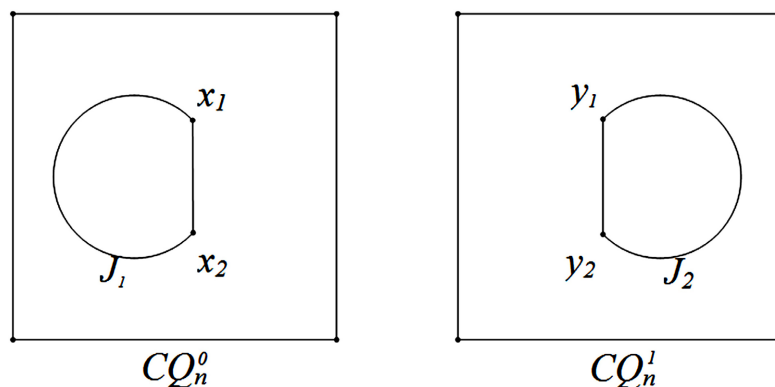


Figure 12. Case 2.4 in Theorem 3.4

图 12. 定理 3.4 情况 2.4

4. 结语

在本文中, 我们研究 n 维交叉立方体网络的双不交圈覆盖泛圈性, 并利用归纳法与子图的拼接证明了 $n \geq 3$ 时, 任意 n 维交叉立方体网络都是 $[4, 2^{n-1}]$ -双不交圈覆盖泛圈图, 且由于 n 维交叉立方体网络的围长为 4, 总点数为 2^n , 根据定义 2.1.3 可知此结果具有最优性。

基金项目

河南省自然科学基金青年项目(No. 252300420931)。

参考文献

- [1] Guo, J., Lu, M. and Cheng, D.Q. (2026) Two-Disjoint-Cycle-Cover Pancyclicity of (n, k) -Star Graph. *Journal of the Operations Research Society of China*. <https://doi.org/10.1007/s40305-025-00667-z>
- [2] Tian, Z. and He, G. (2025) Two-Disjoint-Cycle-Cover Pancyclicity of Dragonfly Networks. *Mathematics*, **13**, Article 3736. <https://doi.org/10.3390/math13233736>

-
- [3] Dai, H., Feng, Y.Q., Kwon, Y.S. and Yang, D.W. (2026) Two-Disjoint-Cycle-Cover Vertex Bipancyclicity of Bubble-Sort Star Graphs. *Applied Mathematics and Computation*, **512**, Article ID: 129787. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2025.129787>
 - [4] Guo, J. and Han, H. (2025) Two-Disjoint-Cycle-Cover Pancyclicity of (n, k) -Bubble-Sort Network. *Journal of the Operations Research Society of China*. <https://doi.org/10.1007/s40305-025-00625-9>
 - [5] Cheng, D.Q. (2025) Two-Disjoint-Cycle-Cover Pancyclicity of Augmented Cubes. *Discrete Applied Mathematics*, **371**, 240-246. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2025.04.033>
 - [6] Li, H., Chen, L. and Lu, M. (2025) Two-Disjoint-Cycle-Cover Pancyclicity of Split-Star Networks. *Applied Mathematics and Computation*, **487**, Article ID: 129085. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2024.129085>
 - [7] Efe, K. (1992) The Crossed Cube Architecture for Parallel Computation. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **3**, 513-524. <https://doi.org/10.1109/71.159036>
 - [8] Niu, R., Xu, M. and Lai, H. (2021) Two-Disjoint-Cycle-Cover Vertex Bipancyclicity of the Bipartite Generalized Hypercube. *Applied Mathematics and Computation*, **400**, Article ID: 126090. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126090>
 - [9] Wang, D.J. (2008) On Embedding Hamiltonian Cycles in Crossed Cubes. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **19**, 334-346. <https://doi.org/10.1109/tpds.2007.70729>