

Hermite插值数值积分的构造

熊祥龙

江西师范大学科学技术学院理工学院, 江西 九江

收稿日期: 2026年6月15日; 录用日期: 2026年7月9日; 发布日期: 2026年7月17日

摘 要

利用积分区间上的两个结点处的函数值及其它的一阶导数值来构造Hermite插值数值积分公式, 并对公式进行复化, 然后推广到二重积分情形, 最后给出若干个数值算例验证我们算法的准确性和有效性。

关键词

数值积分公式, Hermite插值多项式, 复化公式, 重积分

The Construction of Hermite Interpolation Numerical Integration

Xianglong Xiong

College of Science and Engineering, Jiangxi Normal University Science and Technology College, Jiujiang Jiangxi

Received: June 15, 2026; accepted: July 9, 2026; published: July 17, 2026

Abstract

The values of the function at the two nodes on the integration interval and its first-order derivative values are used to construct the Hermite interpolated numerical integration formula, which is complexified and, again, generalized to the case of double integration, and finally, several numerical examples are given to verify the accuracy and validity of our algorithm.

Keywords

Numerical Integration Formula, Hermite Interpolation Polynomial, Complex Formula, Multiple Integration



1. 引言

对于定积分 $I = \int_a^b f(x)dx$ 的计算, 运用 Newton-Leibniz 公式 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, 求其精确值, 其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 但是在实际的计算过程中, 用此方法很难求其精确值, 这是因为被积函数 $f(x)$ 可能会出现以下的情况: (1) 它的原函数 $F(x)$ 不能用初等函数表示; (2) 当被积函数过于复杂时, 也不宜套用积分公式计算积分等等。因此, 计算这类积分只能求其数值积分。故发展高效的数值积分算法是非常有必要的且是有意义的。

对于定积分和重积分, 已有一些计算效果不错的数值求积公式, 例如 Newton-Cotes 公式、Simpson 公式、梯形公式等等[4]。但是对于重积分的有效数值积分算法方面的科研工作还较少。本研究的意义在于系统性地构建并验证了一种高精度的数值积分格式。Hermite 插值由于同时利用了函数值和导数值信息, 通常能以较少的节点获得较高的插值精度, 将其应用于数值积分是数值分析领域的经典思路之一[1]。现有研究围绕高精度积分公式、校正求积格式开展了大量推导与误差分析工作, 可为本文构造 Hermite 型积分格式提供理论参考[2] [3] [5]。本文完整地推导了从一维基本公式到二维复化公式的整个过程, 并用数值实验验证了其理论收敛阶, 为需要高精度积分计算的场景(尤其是在导数信息容易获取时)提供了一个具体、可行的算法方案。

本文结构如下: 通过 Hermite 插值函数来逼近被积函数 $f(x)$, 从而构造出了一个新的具有三次代数精度的数值求积公式, 给出了其复化公式, 并对其进行了误差分析; 然后将其推广到二重积分, 最后, 通过数值实验验证我们理论的正确性和算法的有效性。

2. Hermite 插值型数值积分的构造

2.1. 公式的构造

根据文献[1], 用三次哈密顿插值多项式 $H_3(x)$ 去逼近被积函数 $f(x)$ 即满足如下关系:

$f(x) = H_3(x) + R(x)$, 其中

$$H_3(x) = \left(1 - 2 \frac{x-x_0}{x_0-x_1}\right) \left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 f(x_0) + \left(1 - 2 \frac{x-x_1}{x_1-x_0}\right) \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 f(x_1) \\ + (x-x_0) \left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 f'(x_0) + (x-x_1) \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 f'(x_1),$$

$\{x_i, i=0,1\}$ 为其插值节点, $R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x-x_0)^2 (x-x_1)^2, a \leq \xi \leq b$ 。以 $\int_a^b H_3(x)dx$ 近似 $\int_a^b f(x)dx$, 用积分区间 $[a,b]$ 上的两个节点来构造求积公式, 考虑构造如下形式的求积公式:

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=0}^1 \alpha_i f_i + h^2 \sum_{i=0}^1 \beta_i f'_i + E[f] \quad (1.1)$$

其中 $h = b - a, x_i = a + ih, f_i = f(x_i), f'_i = f'(x_i), i = 0, 1$ 。而 $E[f]$ 为求积公式(1.1)的余项。

现需确定公式(1.1)的系数 $\alpha_i, \beta_i (i = 0, 1)$, 接下来验证公式(1.1)的代数精度。可令 $E[x^k] = 0, k = 0, 1, 2, 3$ 。不难验算其具有三次代数精度。计算可得

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{2}, \beta_0 = \frac{1}{12}, \beta_1 = -\frac{1}{12}$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h^2}{12}(f'_0 - f'_1) \quad (1.2)$$

由 $f(x) = H_3(x) + R(x)$ 和均值定理, 得余项为:

$$E[f] = \int_a^b R(x) dx$$

$$= \frac{f^{(4)}(\eta)}{24} \int_a^b (x-a)^2 (x-b)^2 dx \quad (1.3)$$

$$= \frac{h^5}{720} f^{(4)}(\eta), \quad a < \eta < b.$$

2.2. 复化公式

如果积分区间 $[a, b]$ 的长度 $b-a$ 较大, 则(1.3)式可知公式(1.2)的求积精度较差, 依据高精度复化求积的处理思路[4], 此时须考虑公式(1.2)的复化公式及其加速公式。将积分区间 $[a, b]$ 分成 n 等分, 记

$h_1 = \frac{b-a}{n}$, 分点为 $x_i = a + i \cdot h_1, i = 0, 1, \dots, n$, 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上应用公式(1.2)复化可得:

$$I \approx I_n$$

$$= \frac{h_1}{2} \sum_{i=1}^n (f_{i-1} + f_i) + \frac{h_1^2}{12} \sum_{i=1}^n (f'_{i-1} - f'_i) \quad (1.4)$$

$$= \frac{b-a}{2n} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i \right] + \frac{(b-a)^2}{12n^2} (f'_0 - f'_n)$$

记 $J = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n-1} f_i$, 则它是相应于积分区间 $[a, b]$ 的分割 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ 的一个黎曼和。由定积分的定义可知, 当 $n \rightarrow \infty$, $\frac{b-a}{2n} [f(a) + f(b)] \rightarrow 0$, $\frac{(b-a)^2}{12n^2} [f'(a) - f'(b)] \rightarrow 0$ 。故 J 收敛于积分

$\int_a^b f(x) dx$, 于是(1.4)式右端项 I_n 收敛于 $\int_a^b f(x) dx$ 。即复化公式(1.4)收敛。

假定 $f^{(4)}(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则复化求积公式(1.4)的余项为:

$$E_n[f] = \frac{1}{720} \left(\frac{b-a}{n} \right)^5 \cdot n \cdot f^{(4)}(\eta_1) = \frac{(b-a)^5}{720n^4} f^{(4)}(\eta_1) \quad \text{其中 } a \leq \eta_1 \leq b.$$

定理 1 设函数 $f(x) \in C^4[a, b]$, $h_1 = \frac{b-a}{n}$, $M = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|$, 则公式(1.4)有余项估计式:

$$|E[f]| = |I - I_n| \leq \frac{b-a}{720} M h_1^4$$

即说明该数值格式收敛阶至少有 4 阶。

下面我们进一步地把该公式推广到二重积分。

3. Hermite 插值型二重数值积分的构造

3.1. 公式的建立

考虑二重积分

$$II = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy \quad (1.5)$$

其中积分区域 Ω 为矩形区域。即 $\Omega = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ 。假设 $f(x, y)$ 在 Ω 上足够光滑, 且连续可微。其中, $h_x = \frac{b-a}{n}$, $h_y = \frac{d-c}{m}$, n 表示把区间 $[a, b]$ 均分成 n 等分, m 表示把区间 $[c, d]$ 均分成 m 等分。

记

$$g(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

从而, 二重积分(1.5)可以化作累次积分

$$II = \int_a^b g(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \text{ 对于 } II = \int_a^b g(x) dx \text{ 运用公式(1.2)可得:}$$

$$II = \int_a^b g(x) dx = \frac{h_x}{2} (g_0 + g_1) + \frac{h_x^2}{12} (g'_0 - g'_1) + E[g] \quad (1.6)$$

其中

$$h_x = b - a, x_i = a + ih_x, g_i = g(x_i), i = 0, 1, E[g] = \frac{h_x^5}{720} g^{(4)}(\eta)$$

接下来, 将 $g(x_i) = \int_c^d f(x_i, y) dy$ 在 $[c, d]$ 上应用公式(1.2)得:

$$\begin{aligned} g(x_i) &= \int_c^d f(x_i, y) dy \\ &= \frac{h_y}{2} [f(x_i, y_0) + f(x_i, y_1)] + \frac{h_y^2}{12} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_1) \right] + E[f(x_i, \xi)] \end{aligned}$$

其中,

$$h_y = d - c, y_j = c + jh_y, j = 0, 1, E[f(x_i, \xi)] = \frac{h_y^5}{720} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x_i, \xi)$$

此外,

$$\begin{aligned} g'(x_i) &= \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y) dy \\ &= \frac{h_y}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_1) \right] + \frac{h_y^2}{12} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_i, y_0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_i, y_1) \right] + E \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, \tilde{\xi}) \right] \end{aligned}$$

分别将上述公式计算 $g(x_i)$ 和 $g'(x_i)$, ($i = 0, 1$) 代入(1.6)式中即可得到求积公式:

$$\begin{aligned} II &= \frac{h_x h_y}{4} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_0) + f(x_0, y_1) + f(x_1, y_1)] \\ &\quad + \frac{h_x h_y^2}{24} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1) \right] \\ &\quad + \frac{h_y h_x^2}{24} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_0) \right] \\ &\quad + \frac{h_x^2 h_y^2}{144} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_1) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_1) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_0) \right] + E[f], \end{aligned} \quad (1.7)$$

其截断误差为

$$E[f] = E[g] + \frac{h_x}{2} \{E[f(x_0, \xi)] + [f(x_1, \xi)]\} + \frac{h_x^2}{12} \left\{ E\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \xi)\right] - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, \xi)\right] \right\}.$$

于是, 得到如下结论:

定理 2 设函数 $f(x, y)$ 在矩形区域 $\Omega = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ 上足够光滑, $h = \max\{h_x, h_y\}$

$M = \max_{(x, y) \in \Omega} \left\{ \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}, \frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^4} \right\}$, 则公式(1.7)有余项估计式

$$|E[f]| \leq \left(\frac{h^6}{360} + \frac{h^7}{4320} \right) M.$$

3.2. 复化公式

用公式(1.4)计算 $\int_c^d f(x, y) dy$, 计算中将 x 当作常数, 有

$$\int_c^d f(x, y) dy \approx \frac{h_y}{2} \left[f(x, c) + f(x, d) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x, y_j) \right] + \frac{h_y^2}{12} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, c) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, d) \right] \quad (1.8)$$

再将 y 当作常数, 在 x 方向上计算(1.8)中每一项的积分, 有

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x, c) dx &\approx \frac{h_x}{2} \left[f(a, c) + f(b, c) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i, c) \right] + \frac{h_x^2}{12} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a, c) - \frac{\partial f}{\partial x}(b, c) \right] \\ \int_a^b f(x, d) dx &\approx \frac{h_x}{2} \left[f(a, d) + f(b, d) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i, d) \right] + \frac{h_x^2}{12} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a, d) - \frac{\partial f}{\partial x}(b, d) \right] \\ \int_a^b 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x, y_j) dx &\approx h_x \sum_{j=1}^{m-1} \left[f(a, y_j) + f(b, y_j) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i, y_j) \right] + \frac{h_x^2}{6} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a, y_j) - \frac{\partial f}{\partial x}(b, y_j) \right] \\ \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, c) dx &\approx \frac{h_x}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(a, c) + \frac{\partial f}{\partial y}(b, c) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, c) \right] + \frac{h_x^2}{12} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, c) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(b, c) \right] \\ \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, d) dx &\approx \frac{h_x}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(a, d) + \frac{\partial f}{\partial y}(b, d) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, d) \right] + \frac{h_x^2}{12} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, d) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(b, d) \right] \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} II &\approx \frac{h_x h_y}{4} [f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)] + \frac{h_x h_y}{2} \sum_{i=1}^{n-1} [f(x_i, c) + f(x_i, d)] \\ &\quad + \frac{h_x^2 h_y}{24} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a, c) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, d) - \frac{\partial f}{\partial x}(b, c) - \frac{\partial f}{\partial x}(b, d) \right] + \frac{h_x h_y}{2} \sum_{j=1}^{m-1} [f(a, y_j) + f(b, y_j)] \\ &\quad + h_x h_y \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i, y_j) + \frac{h_x^2 h_y}{12} \sum_{j=1}^{m-1} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a, y_j) - \frac{\partial f}{\partial x}(b, y_j) \right] \\ &\quad + \frac{h_x h_y^2}{24} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(a, c) + \frac{\partial f}{\partial y}(b, c) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, d) - \frac{\partial f}{\partial y}(b, d) \right] + \frac{h_x h_y^2}{12} \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, c) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, d) \right] \\ &\quad + \frac{h_x^2 h_y^2}{144} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, c) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(b, d) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(b, c) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, d) \right]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

4. 数值实验

为了验证本文所得数值积分的有效性和理论结果的正确性，下面将给出若干个数值算例。记计算误差为数值解和精确解的差的绝对值。其中收敛阶如下定义：

$$\text{收敛阶} \approx \log_2 \left(\frac{\text{error}(2h_1)}{\text{error}(h_1)} \right).$$

算例 1 计算 $I = \int_0^1 e^x dx$ ，计算结果见表 1。

Table 1. Errors and convergence orders of definite integral under different partition numbers

表 1. 定积分下不同划分数误差及收敛阶

划分数	公式(1.2)	公式(1.4)	收敛阶
$n = 1$	2.3311e-03		
$n = 4$		9.3084e-06	
$n = 8$		5.8243e-07	3.998
$n = 16$		3.6412e-08	3.999
$n = 32$		2.2759e-09	3.999
$n = 64$ 精确值	1.718281828459045	1.4225e-10	4.000

算例 2 计算 $I = \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{x+y} dx dy$ ，计算结果如表 2。为了简便，我们使用拟一致网格，即 $h = h_x = h_y$ 。

Table 2. Errors and convergence orders of double integral under different partition numbers

表 2. 二重积分下不同划分数误差及收敛阶

划分数	公式(1.7)	公式(1.9)	收敛阶
$n = 1$	3.3209e-04		
$n = 4$		1.4349e-06	
$n = 8$		9.0120e-08	3.99
$n = 16$		5.6393e-09	3.99
$n = 32$		3.5256e-10	3.99
$n = 64$ 精确值	0.3397980735907949	2.2035e-11	4.00

5. 结论

上述数值实验的结果表明：在计算定积分的近似值时，Hermite 插值数值积分具有 4 阶精度，理论和数值结果相吻合。

基金项目

江西省教育厅科技项目(GJJ2404104)。

参考文献

- [1] 张韵华, 王新茂, 等. 数值计算方法与算法[M]. 北京: 科学出版社, 2022: 113-129.

- [2] 徐伟, 郑华盛, 李曦. 一类新的高精度数值积分公式的构造[J]. 数学的实践与认识, 2012, 42(18): 207-215.
- [3] 郑华盛, 徐伟. 柯特斯校正公式及其误差估计[J]. 数学的实践与认识, 2011, 41(17): 183-188.
- [4] 李庆扬, 王能超, 等. 数值分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001: 123-126.
- [5] 赵庆华. 数值积分校正公式[J]. 数学的实践与认识, 2007, 37(9): 207-208.