

非齐次边界空间分数阶扩散方程的数值方法

耿 彬

长沙理工大学数学与统计学院, 湖南 长沙

收稿日期: 2026年6月21日; 录用日期: 2026年7月15日; 发布日期: 2026年7月21日

摘 要

针对带非齐次Dirichlet边界条件的一维变系数非线性双侧空间分数阶扩散方程, 本文运用并分析了一种高效稳定的数值求解方法。首先, 通过引入适当的变量变换, 将原问题转化为齐次边界形式; 在此基础上, 时间方向采用具有二阶精度的半隐式中心差分格式, 空间方向利用加权移位公式对双侧分数阶导数进行离散, 从而建立了一种全离散有限差分格式。随后, 在满足非线性项局部Lipschitz条件的假设下, 严格证明了该数值格式的无条件稳定性和二阶收敛性。在数值实现过程中, 由于空间分数阶算子的非局部特性, 时间推进的每一时间层均需反复求解非对称稠密线性代数方程组。为提高整体计算效率, 本文采用了带Jacobi预处理的Bi-CGSTAB方法对线性系统进行求解, 并与传统的Bi-CGSTAB方法进行了对比。数值实验结果表明, 在相同精度要求下, 该方法显著降低了平均迭代次数, 整体求解格式呈现出网格无关收敛性, 并在长时间模拟中表现出明显的CPU时间优势。综上, 本文采用的预处理Bi-CGSTAB方法在精度、稳定性和计算效率方面均具有良好表现, 为一类非线性空间分数阶扩散方程的高效数值求解提供了可行方案。

关键词

WSGD格式, 预处理Bi-CGSTAB方法, 网格无关收敛性

Numerical Methods for Fractional Diffusion Equations in Non-Homogeneous Boundary Spaces

Bin Geng

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: June 21, 2026; accepted: July 15, 2026; published: July 21, 2026

Abstract

For the 1D variable-coefficient nonlinear bilateral space fractional diffusion equation with non-

homogeneous Dirichlet boundary conditions, this paper applies and analyzes an efficient and stable numerical method. Firstly, by introducing an appropriate variable transformation, the original problem is transformed into a homogeneous boundary form. Based on this, a second-order semi-implicit central difference scheme is adopted in time, and a weighted shifted formula is used to discretize the bilateral fractional derivatives in space, thereby establishing a fully discrete finite difference scheme. Subsequently, assuming the nonlinear term satisfies a local Lipschitz condition, the unconditional stability and second-order convergence of the numerical scheme are rigorously proven. In the numerical implementation, due to the non-local nature of the spatial fractional operator, each time step requires repeatedly solving asymmetric dense linear algebraic systems. To improve overall computational efficiency, this paper employs the Jacobi-preconditioned Bi-CGSTAB method to solve the linear system, comparing it with the traditional Bi-CGSTAB method. Numerical results show that, under the same accuracy requirements, this method significantly reduces the average number of iterations. The overall scheme exhibits grid-independent convergence and demonstrates obvious CPU time advantages in long-time simulations. In summary, the adopted preconditioned Bi-CGSTAB method performs well in accuracy, stability, and computational efficiency, providing a feasible approach for the efficient numerical solution of a class of nonlinear spatial fractional diffusion equations.

Keywords

WSGD Scheme, Preconditioned Bi-CGSTAB Method, Mesh-Independent Convergence

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

作为现代数学、化学、物理学和生物学的常用模型,经典的扩散方程是在1808年由 Joseph Fourier 首次提出的[1]。自20世纪以来,扩散方程的研究从经典线性模型向非线性化、随机化、非局部化方向拓展[2],其数学理论与应用场景不断丰富。由于分数阶扩散方程可以更精准描述复杂介质中的反常扩散行为,其数值方法的构建与误差分析成为近年来的研究重点。目前学者们针对方程系数、导数类型及边界条件的差异,提出了多种数值格式,但仍存在精度、适用场景的局限性。

根据连续性假设和达西定律,一维不可压缩单相渗流的常规微分方程具有以下形式:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial p}{\partial x} \right) + h(x, t) = \frac{1}{v} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1)$$

其中 p 表示压力, k_x 为沿 x 方向的渗流系数, v 为速度, $h(x, t)$ 是源项。当采用修正达西定律或分数阶达西定律时,可推导出如下具有可变扩散系数的分数阶扩散方程:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial^\alpha p}{\partial x^\alpha} \right) + h(x, t) = \frac{1}{v} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2)$$

然而,在非均质多孔材料或湍流环境等复杂介质中,粒子的反常扩散往往伴随着强烈的方向不对称性以及复杂的非线性化学反应。为了更精确地刻画这一动力学过程,上述经典的物理模型需要在数学上被进一步抽象与推广:一方面,引入双侧分数阶导数以描述空间上的非对称特征;另一方面,加入非线性反应源项以反映系统内部的动力学机制。Zhao [3]研究了求解单侧变系数时间分数阶亚扩散方程的紧致差分格式,该格式同时适用于狄利克雷边界条件与诺伊曼边界条件。Chen 等[4]推导了求解一类一维变系

数非线性双侧空间分数阶扩散方程的有效差分法, 该方法具有一阶精度。Feng 等[5]提出一种基于节点基函数的有限体积法求解不带非线性项的双侧空间分数阶扩散方程, 并给出了相应理论结果, Feng 和 Zhuang [6]提出求解变系数线性空间分数阶扩散方程的二阶有限差分法, 借助 Crank-Nicolson 格式与双共轭梯度稳定算法, 在保证稳定性的同时将精度提升至二阶, 然而其研究对象仍未涉及非齐次边界条件。本文将模型推广到非齐次 Dirichlet 边界问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(C(x) \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} - D(x) \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial (-x)^\alpha} \right) + g(x,t,u) \\ 0 < \alpha < 1, (x,t) \in (0, L_x) \times [0, T], \\ u(0,t) = g_0(t), u(L_x, t) = g_L(t), \forall t \in [0, T], \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (3)$$

其中 $C(x), D(x) > 0$, g 为满足局部 Lipschitz 条件的连续映射: 对于任意给定的 $M > 0$, 存在依赖于 M 的常数 $L > 0$, 使得对于所有的 $(x,t) \in (0, L_x) \times [0, T]$, 当满足 $|u_1(x,t)| \leq M$, $|\bar{u}_1(x,t)| \leq M$ 时, 有

$$|g(x,t,u_1) - g(x,t,\bar{u}_1)| \leq L |u_1 - \bar{u}_1| \quad (4)$$

此外, 由黎曼-刘维尔分数阶导数的定义可知:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x (x-\tau)^{-\alpha} u(\tau,t) d\tau \quad (5)$$

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial (-x)^\alpha} = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \int_x^L (\tau-x)^{-\alpha} u(\tau,t) d\tau \quad (6)$$

本文后续内容安排如下: 第 2 节针对非齐次 Dirichlet 边界构建变系数非线性双侧空间分数阶扩散方程的离散格式; 第 3 节讨论该方法的稳定性和收敛性; 第 4 节引入带 Jacobi 预处理的 Bi-CGSTAB 算法以有效克服分数阶稠密矩阵条件数恶化问题, 提升求解效率; 最后在第 5 节通过数值实验验证所提方法的理论结果。

2. 数值离散过程

定义 $\tau = \frac{T}{N}, t_n = n\tau$ 其中 $n = 0, 1, \dots, N$ 。令 $h_x = \frac{L_x}{M_x}$, 则对于 $i = 0, 1, \dots, M_x$ 有 $x_i = ih_x$ 。此外定义 u_i^n 为

$u(x_i, t_n)$ 的数值近似。为了在空间方向上对分数阶导数进行高精度离散, 本文采用二阶加权移位算子。为确保后续推导差分格式以及稳定性分析的正确性, 我们首先引入该算子的定义及其核心代数性质如下:

引理 2.1. [7] 设 $0 < \gamma < 2$, 函数 $v(x) \in C^5[0, L]$ 且满足 $v(x) = 0 (\forall x \in (-\infty, 0] \cup [L, +\infty))$, 则有

$${}_0D_x^\gamma v(x_i) = \frac{1}{h^\gamma} \sum_{k=0}^{i+1} \omega_\gamma^{(k)} v(x_{i-k+1}) + O(h^2) \quad (7)$$

$${}_xD_L^\gamma v(x_i) = \frac{1}{h^\gamma} \sum_{k=0}^{M_x-i+1} \omega_\gamma^{(k)} v(x_{i+k-1}) + O(h^2) \quad (8)$$

其中系数定义为

$$\omega_\gamma^{(0)} = \frac{\gamma}{2} g_0^{(\gamma)}, \omega_\gamma^{(k)} = \frac{\gamma}{2} g_k^{(\gamma)} + \frac{2-\gamma}{2} g_{k-1}^{(\gamma)},$$

$$g_0^{(\gamma)} = 1, g_k^{(\gamma)} = \left(1 - \frac{\gamma+1}{k}\right) g_{k-1}^{(\gamma)}, k = 1, 2, \dots$$

引理 2.2. [8] 假设 $0 < \gamma < 1$, 则系数序列 $\{g_k^{(\gamma)}\}$ 满足:

$$\begin{cases} g_0^{(\gamma)} = 1, g_1^{(\gamma)} = -\gamma, g_2^{(\gamma)} = \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} < 0, \\ g_2^{(\gamma)} < g_3^{(\gamma)} < \dots < 0, \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(\gamma)} = 0, \sum_{k=0}^m g_k^{(\gamma)} > 0 (m \geq 1), \end{cases} \quad (9)$$

且系数序列 $\{\omega_\gamma^{(k)}\}$ 满足:

$$\begin{cases} \omega_\gamma^{(0)} = \frac{\gamma}{2}, \omega_\gamma^{(1)} = \frac{2-\gamma-\gamma^2}{2} > 0, \omega_\gamma^{(2)} = \frac{\gamma(\gamma^2+\gamma-4)}{4}, \\ \omega_\gamma^{(2)} < \omega_\gamma^{(3)} < \dots < 0, \sum_{k=0}^{\infty} \omega_\gamma^{(k)} = 0, \sum_{k=0}^m \omega_\gamma^{(k)} > 0 (m \geq 1), \end{cases} \quad (10)$$

引理 2.3. [8] 假设 $1 < \gamma < 2$, 则系数序列 $\{g_k^{(\gamma)}\}$ 满足:

$$\begin{cases} g_0^{(\gamma)} = 1, g_1^{(\gamma)} = -\gamma, g_2^{(\gamma)} = \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} > 0, \\ 1 > g_2^{(\gamma)} > g_3^{(\gamma)} > \dots > 0, \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(\gamma)} = 0, \sum_{k=0}^m g_k^{(\gamma)} < 0 (m \geq 1). \end{cases} \quad (11)$$

且系数序列 $\{\omega_\gamma^{(k)}\}$ 满足:

$$\begin{cases} \omega_\gamma^{(0)} = \frac{\gamma}{2}, \omega_\gamma^{(1)} = \frac{2-\gamma-\gamma^2}{2} < 0, \omega_\gamma^{(2)} = \frac{\gamma(\gamma^2+\gamma-4)}{4}, \\ 1 > \omega_\gamma^{(2)} > \omega_\gamma^{(3)} > \dots > 0, \sum_{k=0}^{\infty} \omega_\gamma^{(k)} = 0, \sum_{k=0}^m \omega_\gamma^{(k)} < 0 (m \geq 2). \end{cases} \quad (12)$$

在处理非齐次 Dirichlet 边界条件时, 一般采用简单的线性插值函数进行齐次化变量代换。

$$\phi(x, t) = g_0(t) + \frac{x}{L_x}(g_L(t) - g_0(t)) \quad (13)$$

然而, 对于本文所涉及的阶数为 $1 < \gamma < 2$ 的黎曼-刘维尔空间分数阶导数而言, 线性函数中包含的一次项 x 在求导后会产生与 $x^{1-\gamma}$ 成正比的项。由于 $1-\gamma < 0$, 该项在逼近边界 $x \rightarrow 0$ 时导数趋于无穷大, 会引发严重的弱奇异性, 导致高阶数值格式发生严重的精度降阶现象。为消除这一分数阶算子固有的边界奇异性, 本文采用最低次幂为二次的 Hermite 插值基函数来构造辅助函数。它不仅能在空间两端完美匹配给定的非齐次边界值, 且其在边界处的一阶导数为零, 从而保证了求分数阶导数后产生的是受控的 $x^{2-\gamma}$ 项。

我们构造 $\phi(x, t)$, 使得 $\phi(0, t) = g_0(t), \phi(L_x, t) = g_L(t)$ 假设

$$\phi(x, t) = g_0(t) + \left(3\left(\frac{x}{L_x}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L_x}\right)^3 \right) (g_L(t) - g_0(t)) \quad (14)$$

此时

$$\phi(0, t) = g_0(t)$$

$$\phi(L_x, t) = g_0(t) + (3-2)(g_L - g_0) = g_L(t)$$

进行变量替换, 定义齐次边界新变量 $v(x, t)$ 并令 $u(x, t) = v(x, t) + \phi(x, t)$, 则

$$v(0, t) = u(0, t) - \phi(0, t) = 0, v(L_x, t) = u(L_x, t) - \phi(L_x, t) = 0,$$

整体方程转化为齐次形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(C(x) \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} - D(x) \frac{\partial^\alpha v}{\partial (-x)^\alpha} \right) + G(x, t, v), \\ v(0, t) = 0, v(L_x, t) = 0, 0 < \alpha < 1, \\ v(x, 0) = \phi(x) - \phi(x, 0), \end{cases} \quad (15)$$

其中

$$G(x, t, v) = g(x, t, v + \phi) - \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(C(x) \frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x^\alpha} - D(x) \frac{\partial^\alpha \phi}{\partial (-x)^\alpha} \right),$$

通过对空间变系数项应用复合求导法则, 该齐次方程可改写为如下展开形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = C'(x) \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} + C(x) \frac{\partial^{\alpha+1} v}{\partial x^{\alpha+1}} - D'(x) \frac{\partial^\alpha v}{\partial (-x)^\alpha} + D(x) \frac{\partial^{\alpha+1} v}{\partial (-x)^{\alpha+1}} + G(x, t, v), \\ v(0, t) = 0, v(L_x, t) = 0, 0 < \alpha < 1, \\ v(x, 0) = \phi(x) - \phi(x, 0), \end{cases} \quad (16)$$

对于一阶时间导数, 我们采用具有二阶精度的中心差分进行近似:

$$\left. \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right|_{\left(x_i, t_{n+\frac{1}{2}} \right)} = \frac{v(x_i, t_{n+1}) - v(x_i, t_n)}{\tau} + O(\tau^2) \sim \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} \quad (17)$$

其中 v_i^n 为 $v(x_i, t_n)$ 的数值近似, 定义左右导数:

$$\left. \frac{\partial^\alpha v(x, t)}{\partial x^\alpha} \right|_{\left(x_i, t_{n+\frac{1}{2}} \right)} = \frac{(h_x)^{-\alpha}}{2} \left[\sum_{l=0}^{i+1} \omega_\alpha^{(l)} v(x_{i-l+1}, t_{n+1}) + \sum_{l=0}^{i+1} \omega_\alpha^{(l)} v(x_{i-l+1}, t_n) \right] + O(h_x^2 + \tau^2) \quad (18)$$

$$\left. \frac{\partial^\alpha v(x, t)}{\partial (-x)^\alpha} \right|_{\left(x_i, t_{n+\frac{1}{2}} \right)} = \frac{(h_x)^{-\alpha}}{2} \left[\sum_{l=0}^{M_x-i+1} \omega_\alpha^{(l)} v(x_{i+l-1}, t_{n+1}) + \sum_{l=0}^{M_x-i+1} \omega_\alpha^{(l)} v(x_{i+l-1}, t_n) \right] + O(h_x^2 + \tau^2) \quad (19)$$

利用泰勒展开式处理非线性反应项可得:

$$\begin{aligned} v\left(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}\right) &= \frac{3}{2}v(x_i, t_n) - \frac{1}{2}v(x_i, t_{n-1}) + O(\tau^2) \\ G\left(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}, v\left(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}\right)\right) &= G\left(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}, \frac{3}{2}v(x_i, t_n) - \frac{1}{2}v(x_i, t_{n-1})\right) + O(\tau^2) \\ &\sim G\left(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}, \frac{3}{2}v_i^n - \frac{1}{2}v_i^{n-1}\right) \end{aligned} \quad (20)$$

结合上述对时间和空间方向的离散, 以及非线性项的外推公式, 在节点处对精确解 $v(x, t)$ 展开, 可得如下差分等式:

$$\begin{aligned} \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} &= \frac{(h_x)^{-(\alpha+1)}}{2} \left[C(x_i) \sum_{l=0}^{i+1} \omega_{(\alpha+1)}^{(l)} v_{i-l+1}^{n+1} + D(x_i) \sum_{l=0}^{M_x-i+1} \omega_{(\alpha+1)}^{(l)} v_{i+l-1}^{n+1} \right] \\ &\quad + \frac{(h_x)^{-\alpha}}{2} \left[C'(x_i) \sum_{l=0}^{i+1} \omega_\alpha^{(l)} v_{i-l+1}^{n+1} - D'(x_i) \sum_{l=0}^{M_x-i+1} \omega_\alpha^{(l)} v_{i+l-1}^{n+1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(h_x)^{-(\alpha+1)}}{2} \left[C(x_i) \sum_{l=0}^{i+1} \omega_{(\alpha+1)}^{(l)} v_{i-l+1}^n + D(x_i) \sum_{l=0}^{M_x-i+1} \omega_{(\alpha+1)}^{(l)} v_{i+l-1}^n \right] \\
& + \frac{(h_x)^{-\alpha}}{2} \left[C'(x_i) \sum_{l=0}^{i+1} \omega_{\alpha}^{(l)} v_{i-l+1}^n - D'(x_i) \sum_{l=0}^{M_x-i+1} \omega_{\alpha}^{(l)} v_{i+l-1}^n \right] \\
& + G\left(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}, \frac{3}{2}v_i^n - \frac{1}{2}v_i^{n-1}\right)
\end{aligned} \quad (21)$$

定义以下分数阶偏微分算子:

$$\bar{\delta}_x^{(\alpha+1)} v_i^n = \frac{(h_x)^{-(\alpha+1)}}{2} \left[C(x_i) \sum_{l=0}^{i+1} \omega_{(\alpha+1)}^{(l)} v_{i-l+1}^n + D(x_i) \sum_{l=0}^{M_x-i+1} \omega_{(\alpha+1)}^{(l)} v_{i+l-1}^n \right] \quad (22)$$

$$\delta_x^{\alpha} v_i^n = \frac{(h_x)^{-\alpha}}{2} \left[C'(x_i) \sum_{l=0}^{i+1} \omega_{\alpha}^{(l)} v_{i-l+1}^n - D'(x_i) \sum_{l=0}^{M_x-i+1} \omega_{\alpha}^{(l)} v_{i+l-1}^n \right] \quad (23)$$

将离散算子代入全离散格式, 原方程可化简为

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} = \bar{\delta}_x^{(\alpha+1)} v_i^{n+1} + \delta_x^{\alpha} v_i^{n+1} + \bar{\delta}_x^{(\alpha+1)} v_i^n + \delta_x^{\alpha} v_i^n + G\left(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}, \frac{3}{2}v_i^n - \frac{1}{2}v_i^{n-1}\right) \quad (24)$$

进一步化简后即可得到对于 $1 \leq i \leq M_x - 1$ 有

$$\left(1 - \tau \bar{\delta}_x^{(\alpha+1)} - \tau \delta_x^{\alpha}\right) v_i^{n+1} = \left(1 + \tau \bar{\delta}_x^{(\alpha+1)} + \tau \delta_x^{\alpha}\right) v_i^n + \tau G\left(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}, \frac{3}{2}v_i^n - \frac{1}{2}v_i^{n-1}\right) \quad (25)$$

3. 稳定性、收敛性分析

在上一节中, 我们通过引入变量代换处理非齐次边界, 并结合时间半隐式中心差分与空间加权移位公式, 成功构建了求解变系数非线性双侧空间分数阶扩散方程的全离散有限差分格式。为了从理论层面确保该数值方法的可靠性, 本节将对其核心数学性质展开严格的分析。具体而言, 在非线性反应项满足局部 Lipschitz 条件的假设下, 我们将给出该差分格式的稳定性以及 $O(\tau^2 + h^2)$ 收敛精度的理论证明。

引理 3.1. [9] 假设矩阵 $Q = (q_{i,j})_{N \times N}$ 是严格对角占优的, 且满足主对角线元素 $q_{i,i} > 0, i = 1, 2, \dots, N$ 。那么, 矩阵 $(I+Q)^{-1}(I-Q)$ 的谱半径满足 $\rho((I+Q)^{-1}(I-Q)) < 1$; 且矩阵 $(I+Q)^{-1}$ 的谱半径满足 $\rho((I+Q)^{-1}) < 1$ 。

引理 3.2. [9] 设矩阵 $A = \tau \bar{\delta}_x^{(\alpha+1)} + \tau \delta_x^{\alpha}$ 为全离散格式中空间分数阶差分算子所对应的非对称系数矩阵。在已知扩散系数连续可微且满足 $C(x) > 0, D(x) > 0$ 的条件下矩阵 $-A$ 为严格对角占优矩阵, 且对角线元素严格大于 0。

定理 3.1 (稳定性) 设 $0 < \alpha < 1$, 扩散系数满足 $C(x) > 0, D(x) > 0$, 非线性项 $g(x, t, u)$ 满足 Lipschitz 条件, 则通过变量代换将非齐次方程转化为齐次方程后, 再进行离散得到的离散格式是无条件稳定的。

证明: 设 v_i^n 为变量代换后齐次 Dirichlet 问题的数值解。 V_i^n 为在初始条件存在扰动得到的扰动数值解。定义误差

$$\varepsilon_i^n = V_i^n - v_i^n, 1 \leq i \leq M - 1, 0 \leq n \leq N$$

针对齐次化后的非线性源项 $G(x, t, v)$, 其表达式中除了 $g(x, t, v + \phi)$ 之外, 其余由 ϕ 构造的附加导数项均与未知变量 v 无关, 在差分作差时这些附加项将自动抵消, 由此可得当非线性项 g 满足局部 Lipschitz 条

件时, G 关于变量 v 也同样满足局部 Lipschitz 条件, 且 Lipschitz 常数 L 保持不变。此时变量代换后的差分格式为:

$$(I-A)v^{n+1} = (I+A)v^n + \tau G^n(v) \quad (26)$$

其中 $G^n(v)$ 为在时间层 t_n 的非线性离散值。

与扰动项相减可得

$$(I-A)\varepsilon^{n+1} = (I+A)\varepsilon^n + \tau(G^n(V) - G^n(v)) \quad (27)$$

根据引理 3.2 可知, 矩阵 $-A$ 为严格对角占优矩阵, 且其主对角线元素严格大于 0。在此基础上再应用引理 3.1 的结论可知

$$\rho((I-A)^{-1}(I+A)) < 1, \rho((I-A)^{-1}) < 1 \quad (28)$$

则必然存在向量范数及由其诱导的矩阵范数 $\|a \cdot a\|$, 使得

$$\|(I-A)^{-1}(I+A)\| < 1, \|(I-A)^{-1}\| < 1 \quad (29)$$

在等式两端同乘 $(I-A)^{-1}$, 并在两端取范数

$$\begin{aligned} \|\varepsilon^{n+1}\| &\leq \|(I-A)^{-1}(I+A)\| \|\varepsilon^n\| + \tau \|(I-A)^{-1}\| \|G^n(V) - G^n(v)\| \\ \|\varepsilon^{n+1}\| &\leq \|\varepsilon^n\| + \tau \|G^n(V) - G^n(v)\| \end{aligned} \quad (30)$$

此外由 Lipschitz 条件, $\|G^n(V) - G^n(v)\| \leq L \|\varepsilon^n\|$, 因此

$$\|\varepsilon^{n+1}\| \leq (1 + \tau L) \|\varepsilon^n\| \leq \dots \leq (1 + \tau L)^{n+1} \|\varepsilon^0\| \quad (31)$$

由 Gronwall 不等式且 $t_{n+1} = (n+1)\tau \leq T$, 则

$$\|\varepsilon^{n+1}\| \leq e^{LT} \|\varepsilon^0\| \quad (32)$$

由于 e^{LT} 为一个完全独立于时间步长 τ 和空间步长 h_x 的有界正数常量, 即得该全离散差分格式是无条件稳定的, 证毕。

定理 3.2 (收敛性) 设一维变系数非线性双侧空间分数阶扩散方程的真解 $u(x, t) \in C^4([0, L] \times [0, T])$, 非齐次 Dirichlet 边界函数具有足够的光滑性, 作变量代换 $u(x, t) = v(x, t) + \phi(x, t)$ 将原问题齐次化, 并采用非齐次 Dirichlet 边界适配格式, 则存在与 τ, h_x 无关的常数 $C > 0$ 使得:

$$\max_{0 \leq n \leq N} \max_{0 \leq i \leq M-1} |u(x_i, t_n) - u_i^n| \leq C(\tau^2 + h_x^2)$$

证明: 由于辅助函数 $\phi(x, t)$ 是精确给定的, 因此只需分析齐次化变量 v 的收敛性即可。定义误差向量 $e_i^n = v(x_i, t_n) - v_i^n$ 。将精确解代入全离散格式, 可得到局部截断误差 R^n 。根据离散精度, 存在常数 $C_1 > 0$, 满足 $\|R^n\| \leq C_1 \tau(\tau^2 + h^2)$ 。将精确解方程与数值解格式相减, 可得收敛误差方程:

$$(I-A)e^{n+1} = (I+A)e^n + \tau(G^n(v(x, t)) - G^n(v^n)) + R^n \quad (33)$$

根据引理 3.1 与引理 3.2, 必然存在某一种矩阵范数 $\|a \cdot a\|$, 使得 $\|(I-A)^{-1}(I+A)\| < 1, \|(I-A)^{-1}\| < 1$ 。在误差方程两端同乘 $(I-A)^{-1}$, 并在两端取该诱导范数, 利用三角不等式可得:

$$\|e^{n+1}\| \leq \|e^n\| + \tau \|G^n(v(x, t)) - G^n(v^n)\| + \|R^n\| \quad (34)$$

由非线性项的局部 Lipschitz 条件, 存在常数 $\bar{L} > 0$, 使得 $\|G^n(v(x, t)) - G^n(v^n)\| \leq \bar{L} \|e^n\|$ 。代入上式得:

$$\|e^{n+1}\| \leq (1 + \tau \bar{L}) \|e^n\| + \|R^n\| \quad (35)$$

由于初始条件是精确给定的, 即 $v(x, 0) = v^0$, 故初始误差 $e^0 = 0$ 。对上式进行递推展开, 可得:

$$\|e^n\| \leq (1 + \tau \bar{L}) \|e^{n-1}\| + \|R^{n-1}\| \leq \dots \leq \sum_{k=0}^{n-1} (1 + \tau \bar{L})^{n-1-k} \|R^k\| \quad (36)$$

提取求和式中的公共部分:

$$\|e^n\| \leq C_1 \tau (\tau^2 + h_x^2) \sum_{k=0}^{n-1} (1 + \tau \bar{L})^k = C_1 \tau (\tau^2 + h_x^2) \frac{(1 + \tau \bar{L})^n - 1}{\tau \bar{L}} \leq \frac{C_1 (e^{\bar{L}T} - 1)}{\bar{L}} (\tau^2 + h_x^2) \quad (37)$$

最后, 应用有限维空间中范数的等价性定理可得:

$$\|e^n\|_{\infty} \leq \frac{C_1 C_2 (e^{\bar{L}T} - 1)}{\bar{L}} (\tau^2 + h_x^2) \quad (38)$$

令常数 $C = \frac{C_1 C_2 (e^{\bar{L}T} - 1)}{\bar{L}}$, 即有 $\max_{0 \leq i \leq M_x - 1} |u(x_i, t_n) - u_i^n| \leq C (\tau^2 + h_x^2)$ 对任意 $0 \leq n \leq N$ 恒成立。即证明了该数值格式在全时空域内具有 $O(\tau^2 + h_x^2)$ 的收敛精度。证毕。

4. 预处理 Bi-CGSTAB 算法

在变系数非线性双侧空间分数阶扩散方程的数值求解过程中, 每一个时间步都需要求解结构复杂的非对称线性方程组。由于分数阶算子的非局部特性, 通过离散得到的系统矩阵是稠密的, 而且随着空间网格的不断加密, 矩阵的条件数会急剧恶化。传统的 Bi-CGSTAB 方法[10]因其对非对称线性系统的良好适应性而被广泛采用, 但当面对条件数恶化的稠密矩阵时, 标准 Bi-CGSTAB 算法的搜索效率会显著降低, 导致算法的平均迭代次数随网格维度的增加而不断攀升, 极大地拖慢了求解速度。

本文在数值实现中采用了带预处理的 Bi-CGSTAB 算法。预处理的核心思想是在系统方程两端施加一个预条件算子, 从而改善原系数矩阵的谱性质。考虑到本文在时间离散后, 生成的系数矩阵具有类似 $I - \tau S$ 的形式, 其中单位阵占绝对主导, 且由于分数阶算子特有的全局依赖性, 使得空间中不同位置的网格点在系统矩阵中所占的权重极其不平衡。一方面, 结合前文引理 3.2 的结论, 该系数矩阵为严格对角占优矩阵, 主对角线元素承载了每行的主导量级, Jacobi 预条件通过对角元归一化可直接压缩矩阵谱半径, 与这类矩阵的代数结构天然适配; 另一方面, 对于分数阶离散得到的稠密矩阵, ILU 等复杂预条件的构造与调用开销会大幅抵消迭代提速的收益, 而 Jacobi 预条件仅需 $O(N)$ 计算量, 额外成本几乎可忽略, 是稠密场景下性价比最优的选择。因此, 本文选用结构最为简单且极其高效的 Jacobi 预条件子, 该策略相当于对不同空间节点上的局部尺度进行了一次强力的归一化操作, 能够在几乎不增加额外计算开销的前提下理顺矩阵特征值分布。

需要指出的是, 引入 Jacobi 预处理会在单步迭代中增加了两次计算复杂度为 $O(M)$ 的除法。与稠密矩阵和向量相乘所需的 $O(M^2)$ 复杂度相比, 其额外计算开销很小。该策略的核心优势并非来源于单步运算的物理加速, 而是来源于预处理对病态系统谱性质的改善。随着空间网格的不断加密, 标准 Bi-CGSTAB 方法受制于分数阶离散算子带来的条件数恶化, 其平均迭代步数不可避免地会呈现明显的递增趋势。然而, 通过施加 Jacobi 预处理对各空间节点的局部尺度进行归一化, 能够极大地压缩矩阵的谱半径, 使得整体求解的平均迭代步数不仅大幅缩减, 且在面临不同网格尺度时均能稳定保持在极低的水平。由于时间推进过程中需要重复求解线性方程组, 这种单次求解中迭代步数的降低会在长时间模拟中被不断累积, 最终转化总 CPU 耗时节省, 为本文变系数分数阶模型的高效数值模拟提供了重要支撑。

5. 数值算例

在本节中, 我们通过一个具体的算例来验证所提方法的有效性和合理性, 并对比 Bi-CGSTAB 算法和带 Jacobi 预处理的 Bi-CGSTAB 算法处理该问题所消耗的 CPU 时间。考虑一维非齐次 Dirichlet 边界问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(C(x) \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} - D(x) \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial (-x)^\alpha} \right) + G, \\ 0 < \alpha \leq 1, (x,t) \in (0, L_x) \times [0, T], \\ u(0,t) = g_0(t), u(L_x, t) = g_L(t), \forall t \in [0, T], \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (39)$$

这里选取 $C(x) = \frac{1-x^2}{2}$, $D(x) = \frac{1+x^2}{2}$, 边界项分别为 $g_0(t) = t^2$, $g_L(t) = t^2 + t$, $\varphi(x) = x^2(1-x)^2$ 。

这里我们不妨假设精确解为 $u(x,t) = e^{-t}x^2(1-x)^2 + t^2 + (3x^2 - 2x^3)t$, 由此得到非线性项取值为:

$$\begin{aligned} G = & x \left[e^{-t} \left(\frac{2}{\Gamma(3-\alpha)} x^{2-\alpha} - \frac{12}{\Gamma(4-\alpha)} x^{3-\alpha} + \frac{24}{\Gamma(5-\alpha)} x^{4-\alpha} \right) + \frac{6}{\Gamma(3-\alpha)} x^{2-\alpha} - \frac{12}{\Gamma(4-\alpha)} x^{3-\alpha} \right] \\ & - \frac{1-x^2}{2} \left[e^{-t} \left(\frac{2}{\Gamma(2-\alpha)} x^{1-\alpha} - \frac{12}{\Gamma(3-\alpha)} x^{2-\alpha} + \frac{24}{\Gamma(4-\alpha)} x^{3-\alpha} \right) + \frac{6}{\Gamma(2-\alpha)} x^{1-\alpha} - \frac{12}{\Gamma(3-\alpha)} x^{2-\alpha} \right] \\ & + x \left[e^{-t} \left(\frac{2}{\Gamma(3-\alpha)} (1-x)^{2-\alpha} - \frac{12}{\Gamma(4-\alpha)} (1-x)^{3-\alpha} + \frac{24}{\Gamma(5-\alpha)} (1-x)^{4-\alpha} \right) + \frac{6}{\Gamma(3-\alpha)} (1-x)^{2-\alpha} \right. \\ & \left. - \frac{12}{\Gamma(4-\alpha)} (1-x)^{3-\alpha} \right] + \frac{1+x^2}{2} \left[e^{-t} \left(\frac{2}{\Gamma(2-\alpha)} (1-x)^{1-\alpha} - \frac{12}{\Gamma(3-\alpha)} (1-x)^{2-\alpha} + \frac{24}{\Gamma(4-\alpha)} (1-x)^{3-\alpha} \right) \right. \\ & \left. + \frac{6}{\Gamma(2-\alpha)} (1-x)^{1-\alpha} - \frac{12}{\Gamma(3-\alpha)} (1-x)^{2-\alpha} \right] + 2t + 3x^2 - 2x^3 + t^2 + (3x^2 - 2x^3)t - u \end{aligned} \quad (40)$$

运用之前讲到的变换的方法, 将其转化为齐次方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(C(x) \frac{\partial^\alpha v(x,t)}{\partial x^\alpha} - D(x) \frac{\partial^\alpha v(x,t)}{\partial (-x)^\alpha} \right) + g \\ 0 \leq \alpha \leq 1, (x,t) \in (0, L_x) \times [0, T], \\ v(0,t) = 0, v(L_x, t) = 0, \forall t \in [0, T], \\ v(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (41)$$

此时只有精确解和非线性项发生了改变:

$$v(x,t) = e^{-t}x^2(1-x)^2 \quad (42)$$

$$\begin{aligned} g = & e^{-t} \left[x \left(\frac{2}{\Gamma(3-\alpha)} x^{2-\alpha} - \frac{12}{\Gamma(4-\alpha)} x^{3-\alpha} + \frac{24}{\Gamma(5-\alpha)} x^{4-\alpha} \right) \right. \\ & - \frac{1-x^2}{2} \left(\frac{2}{\Gamma(2-\alpha)} x^{1-\alpha} - \frac{12}{\Gamma(3-\alpha)} x^{2-\alpha} + \frac{24}{\Gamma(4-\alpha)} x^{3-\alpha} \right) \\ & \left. + x \left(\frac{2}{\Gamma(3-\alpha)} (1-x)^{2-\alpha} - \frac{12}{\Gamma(4-\alpha)} (1-x)^{3-\alpha} + \frac{24}{\Gamma(5-\alpha)} (1-x)^{4-\alpha} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1+x^2}{2} \left(\frac{2}{\Gamma(2-\alpha)} (1-x)^{1-\alpha} - \frac{12}{\Gamma(3-\alpha)} (1-x)^{2-\alpha} + \frac{24}{\Gamma(4-\alpha)} (1-x)^{3-\alpha} \right) \Bigg] \\
& + e^{-2t} x^4 (1-x^2)^2 - v(1+v)
\end{aligned} \quad (43)$$

这里我们给出误差和收敛阶的定义:

$$\begin{aligned}
E_{\infty}(h_x, \tau) &= \max_{\substack{1 \leq i \leq M_x \\ 1 \leq n \leq N}} |u_i^n - u(x_i, t_n)|, \\
E_2(h_x, \tau) &= h_x \tau \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{n=1}^N \left(|u_i^n - u(x_i, t_n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\
order_{\infty} &= \log_2 \left(\frac{E_{\infty}(2h_x, 2\tau)}{E_{\infty}(h_x, \tau)} \right), order_2 = \log_2 \left(\frac{E_2(2h_x, 2\tau)}{E_2(h_x, \tau)} \right).
\end{aligned}$$

在本算例中, 分别取分数阶阶数 $\alpha = 0.2$ 和 $\alpha = 0.5$, 用于检验所提出数值方法在不同分数阶情形下的数值表现。图 1 给出了在固定时间 $t = 0.3, 0.5, 0.7$ 处数值解与精确解的对比结果。可以观察到, 在不同时间层上, 数值解与精确解几乎完全重合, 说明所采用的时间离散与空间近似能够准确捕捉解在空间方向上的变化特征。图 2 展示了精确解与数值解在整个时空区域 $(x, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ 内的演化过程, 进一步表明所构造的数值格式能够较好地逼近问题的真实解以及该格式在长时间推进过程中的全局稳定性。图 3 给出了对应的误差曲面图, 用以刻画数值解与精确解之间的绝对误差在时空方向上的分布情况。结果表明, 误差在整个计算区域内均保持在较小水平, 且未出现明显的数值振荡或误差集中现象, 从数值角度验证了所提方法的有效性与收敛性。

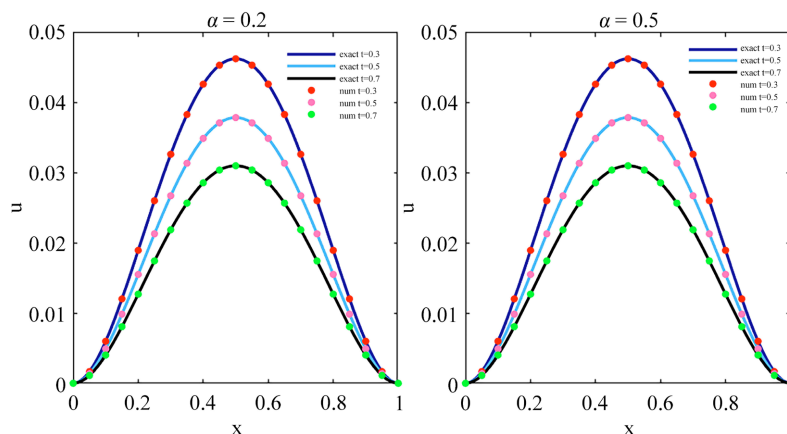
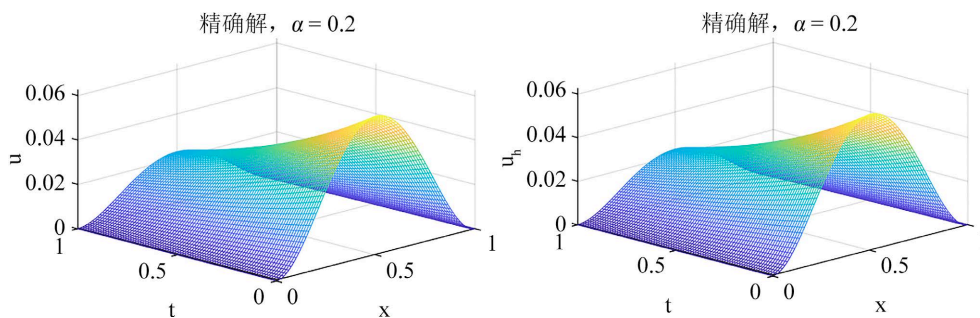


Figure 1. Comparison of exact solutions and numerical solutions at different times
图 1. 不同时间精确解和数值解的对比



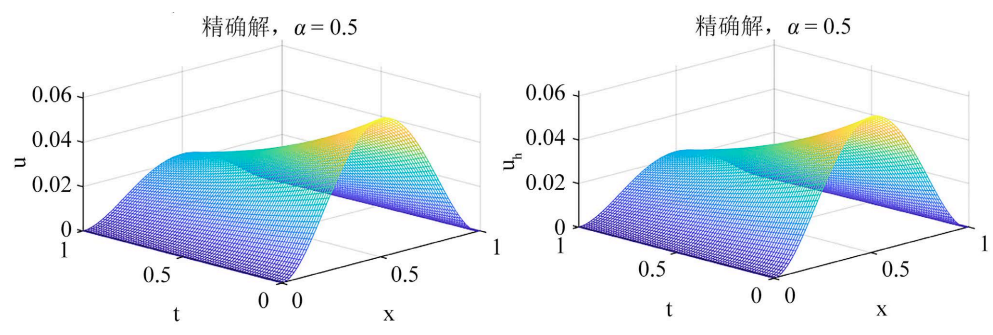


Figure 2. Comparison between exact solution (left) and numerical solution (right)
图 2. 精确解(左)和数值解的比较(右)

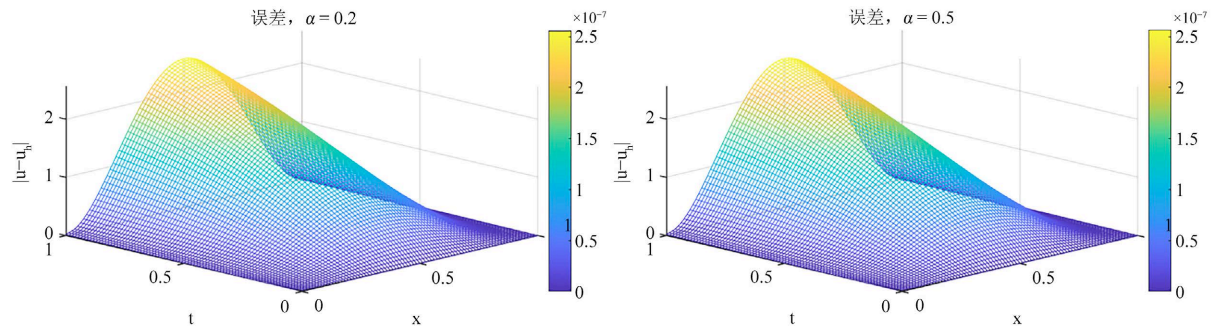


Figure 3. Relative error between exact solution and numerical solution
图 3. 精确解和数值解的相对误差

为了验证数值格式的收敛精度，表 1 给出了在分数阶阶数 $\alpha = 0.5$ 情形下，数值解的绝对误差及相应的收敛阶。在测试过程中，我们采取时空步长同步缩放 $\tau = h_x$ 的策略。数值结果清晰地表明，所构造的全离散有限差分格式在不同 α 取值下，均达到了理论预期的二阶收敛速率。进一步地，表 2 针对时空步长同步缩放的长时间模拟任务，详细比较了标准 Bi-CGSTAB 方法与带 Jacobi 预处理的 Bi-CGSTAB 方法在求解稠密线性系统时的 CPU 耗时与平均迭代步数。设置最大迭代次数为 500，数据结果表明随着空间网格的不断加密，未加预处理的标准 Bi-CGSTAB 方法受制于分数阶稠密矩阵条件数的持续恶化，其平均迭代步数由 17.1 步不断提升到 29.4 步，呈现出明显的递增趋势。然而，在引入 Jacobi 预处理后，该方法的平均迭代步数不仅大幅下降，且在面临 6400 维的网格尺度时，仍然能保持在 10 到 13 步左右。这一结果有力地证明了 Jacobi 归一化策略有效改善了病态稠密矩阵的谱性质，使得整体求解格式呈现出网格无关收敛性。

Table 1. Convergence order result data when $\alpha = 0.5$
表 1. $\alpha = 0.5$ 时收敛阶结果数据

$\alpha = 0.5$				
$\tau = h_x$	$E_\infty(h_x, \tau)$	$order_\infty$	$E_2(h_x, \tau)$	$order_2$
$\frac{1}{20}$	2.3426E-04		1.4018E-04	
$\frac{1}{40}$	7.1124E-05	1.7197	3.4397E-05	2.0331
$\frac{1}{80}$	1.9491E-05	1.8676	8.4189E-06	2.0306

续表

$\frac{1}{160}$	5.1031E-06	1.9333	2.0705E-06	2.0236
$\frac{1}{320}$	1.3069E-06	1.9653	5.1173E-07	2.0165

Table 2. Speed comparison data between the two algorithms when $\alpha = 0.5$

表 2. $\alpha = 0.5$ 时两算法速度对比数据

$\alpha = 0.5$				
$\tau = h_x$	Bi-CGSTAB	平均迭代步数	preprocessing Bi-CGSTAB	平均迭代步数
$\frac{1}{200}$	0.09 s	17.1	0.03 s	10.9
$\frac{1}{400}$	0.32 s	18.2	0.07 s	10.1
$\frac{1}{800}$	1.48 s	24.0	0.43 s	10.6
$\frac{1}{1600}$	12.90 s	26.1	5.60 s	10.5
$\frac{1}{3200}$	562.95 s	27.1	222.84 s	11.2
$\frac{1}{6400}$	4571.44 s	29.4	1830.45 s	13.0

为了更直观地从矩阵代数层面揭示这一加速机制，图 4 给出了全离散系统矩阵在预处理前后的条件数随空间网格数的变化趋势。由图 4 可以清晰地看出，未经预处理的原始系数矩阵条件数随网格加密呈现出剧烈的单调递增趋势，这正是传统标准迭代法在细网格下收敛变慢的底层诱因。而施加 Jacobi 预处理后，矩阵条件数被强力压制在极低水平，这也解释了表 2 中预处理后平均迭代步数不随网格规模增长的网格无关特性。

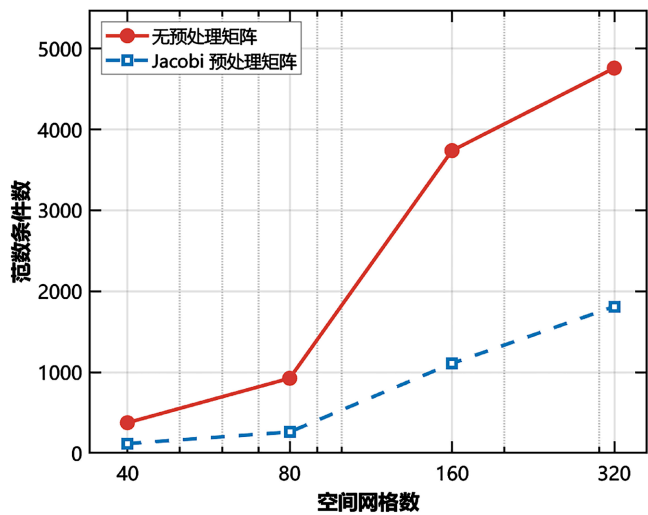


Figure 4. Comparison of matrix condition numbers
图 4. 矩阵条件数对比图

参考文献

- [1] Fourier, J.B.J. (1808) *Mémoire sur la Propagation de la Chaleur dans les Corps Solides*. Cambridge University Press.
- [2] Nikolaï Vladimirovich, K. (2024) *Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev Spaces*. Vol. 96. American Mathematical Society.
- [3] Zhao, X. and Xu, Q.W. (2014) Efficient Numerical Schemes for Fractional Sub-Diffusion Equation with the Spatially Variable Coefficient. *Applied Mathematical Modelling*, **38**, 3848-3859. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.10.037>
- [4] Chen, S.Z., Liu, F., Jiang, X., Turner, I. and Anh, V. (2015) A Fast Semi-Implicit Difference Method for a Nonlinear Two-Sided Space-Fractional Diffusion Equation with Variable Diffusivity Coefficients. *Applied Mathematics and Computation*, **257**, 591-601. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.08.031>
- [5] Feng, L.B., Zhuang, P., Liu, F. and Turner, I. (2015) Stability and Convergence of a New Finite Volume Method for a Two-Sided Space-Fractional Diffusion Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **257**, 52-65. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.12.060>
- [6] Feng, L.B., Zhuang, P., Liu, F., Turner, I., Anh, V. and Li, J. (2017) A Fast Second-Order Accurate Method for a Two-Sided Space-Fractional Diffusion Equation with Variable Coefficients. *Computers & Mathematics with Applications*, **73**, 1155-1171. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.06.007>
- [7] Tian, W.Y., Zhou, H. and Deng, W.H. (2015) A Class of Second Order Difference Approximations for Solving Space Fractional Diffusion Equations. *Mathematics of Computation*, **84**, 1703-1727. <https://doi.org/10.1090/s0025-5718-2015-02917-2>
- [8] Liu, F.W., Zhuang, P.H. and Liu, Q.F. (2015) Numerical Methods of Fractional Partial Differential Equations and Applications.
- [9] Yang, S.P., Liu, F., Feng, L. and Turner, I.W. (2020) Efficient Numerical Methods for the Nonlinear Two-Sided Space-Fractional Diffusion Equation with Variable Coefficients. *Applied Numerical Mathematics*, **157**, 55-68. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.05.016>.
- [10] van der Vorst, H.A. (1992) Bi-CGSTAB: A Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the Solution of Non-symmetric Linear Systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **13**, 631-644. <https://doi.org/10.1137/0913035>.