

对称性简化积分计算的方法及应用

于 爽

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2026年6月29日; 录用日期: 2026年7月23日; 发布日期: 2026年7月30日

摘 要

积分计算是高等数学的核心内容之一, 在自然科学、工程技术等领域具有广泛应用。针对传统积分计算中运算量大、步骤繁琐的问题, 本文系统研究了对称性在各类积分计算中的简化方法及应用。首先明确对称性的关键分类及判定准则, 包括奇偶对称性和轮换对称性。随后, 分别推导了定积分、重积分、曲线积分和曲面积分中对称性应用定理, 揭示了积分区域对称性与被积函数奇偶性、循环对称性之间的内在联系。通过典型例题验证所提方法的可行性, 进一步展示了对称性在简化积分运算中的显著优势。研究结果表明, 合理运用对称性能够将复杂的积分问题化繁为简, 为积分计算提供高效的解决方案。

关键词

对称性, 积分, 计算, 简化

The Method and Application of Symmetry in Simplifying Integral Calculation

Shuang Yu

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: June 29, 2026; accepted: July 23, 2026; published: July 30, 2026

Abstract

Integral evaluation represents a foundational topic in advanced mathematics and plays a pivotal role across a wide array of disciplines, including natural sciences and engineering technologies. In light of the cumbersome computational effort and labor-intensive procedures associated with conventional integral techniques, this paper conducts a systematic investigation into the use of symmetry as a simplifying strategy for various types of integrals. Initially, the study delineates the principal classifications and diagnostic criteria of symmetry, specifically odd-even symmetry and cyclic symmetry. Building upon this framework, the paper derives a series of symmetry-based theorems applicable to definite integrals, multiple integrals, line integrals, and surface integrals, thereby elucidating the intrinsic connections between symmetry of the integration domain, parity of the integrand,

文章引用: 于爽. 对称性简化积分计算的方法及应用[J]. 应用数学进展, 2026, 15(7): 345-356.

DOI: 10.12677/aam.2026.157327

and cyclic symmetry of the integrand itself. The efficacy of the proposed methods is then demonstrated through representative case studies, which also reveal the marked advantages of symmetry in simplifying integral operations. The results confirm that judicious exploitation of symmetry can transform intricate integral problems into more tractable forms, offering an efficient pathway for integral evaluation.

Keywords

Symmetry, Integral, Calculation, Simplify

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

积分学是高等数学的核心内容与基础工具，其理论体系与计算方法广泛应用于自然科学、工程技术、金融经济等领域，成为描述连续变化过程、求解累积效应问题的关键手段[1]。然而，在传统积分计算中，积分区往往复杂、被积函数形式繁琐、运算步骤冗长，给学习者及科研工作者带来诸多挑战。对称性作为数学领域普遍存在的基本属性，被证明是简化积分计算的重要手段。当积分区域具备对称特征且被积函数满足对应的奇偶性或周期性时，可利用对称性原理大幅简化计算流程，显著提高解题效率与准确性。

对称性在积分计算中的应用价值已受到学术界的广泛关注与深入探索。黄东卫与王雪歌[2]系统讨论了对称性在定积分、重积分及曲面积分中的灵活运用，为后续研究奠定了基础；尹松庭[3]对传统文献进行系统化梳理，提出了对称性在积分计算中的统一形式与共同特征，从而简化了定理的判断与应用流程。在特定积分类型的研究中，金世国[4]聚焦定积分与重积分，通过实例详细阐述了对称区域与被积函数奇偶性的配合应用；刘红梅[5]针对二重积分的复杂计算问题，结合性质推导与案例验证，证实了对称性在简化求解过程中的显著优势。朱玉[6]进一步阐明了奇偶函数在对称区域内的积分技巧，并深度探讨了轮换对称性的应用场景。在更广泛的积分体系中，马志辉[7]将对称性应用延伸至曲线积分与曲面积分，构建了多元函数积分下的对称性性质框架。王晓东与李义强[8]从重积分换元法的本质出发，揭示了对称性所体现的数学原理，强调积分区域对称性是简化计算的核心本源。郑芳[9]专门针对轮换对称性，提出了多元函数积分统一应用定理，为同类问题提供了标准化解法；赵莉莉[10]则系统梳理了曲线积分与曲面积分的对称性判定准则，通过具体实例展示了对称性在简化复杂曲面积分计算中的关键作用。

尽管现有研究已涵盖对称性在各类积分中的应用，但仍存在明显的提升空间。大部分研究聚焦单一积分类型或特定情境，缺乏对定积分、重积分、曲线积分及曲面积分中对称性应用的系统整合，从而难以形成统一的方法体系。基于此，本文在系统梳理上述研究成果的基础上，构建了一套涵盖各类积分的对称性简化方法体系。首先明确奇偶对称性与轮换对称性等核心概念的统一判定准则；其次系统推导定积分、重积分、曲线积分及曲面积分中对称性的应用定理，揭示积分区域与被积函数的内在关联；最后通过典型例题验证方法的有效性，为积分计算提供一套逻辑连贯、可交叉应用的高效解决方案，以期的高等数学教学实践与工程技术领域的积分计算提供参考。

2. 对称性的核心分类及判定

2.1. 奇偶对称性

奇偶对称性是指：当积分区域关于原点或坐标轴或坐标面具有对称性并且被积函数具有奇偶性时，

我们可以将两种性质结合, 进而简化积分的计算。例如, 对于定积分, 当积分区间关于原点对称时, 若被积函数是奇函数, 则定积分等于零; 若被积函数是偶函数, 则定积分可以转化为被积函数在单侧区间上的定积分的 2 倍。对于重积分、曲线积分和曲面积分, 也有类似的性质。

2.2. 轮换对称性

轮换对称性是指在对积分区域以及被积函数进行任意变量排列后, 区域形状和函数值保持不变或满足预先规定的关系。

定义 1 设积分区域 Ω 满足对任意 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ 以及对指标 $1, 2, \dots, n$ 的对任意排列 $(i_1, i_2, \dots, i_n)$, 点 $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$ 仍属于 Ω , 则称 Ω 具有轮换对称性。几何意义为区域内任意一点的各坐标分量作轮换置换后, 得到的新点仍属于该区域。

定义 2 设函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 满足对任意排列 $(i_1, i_2, \dots, i_n)$, 有 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$, 则称 f 具有轮换对称性。

例如, 在二维平面上关于直线 $y = x$ 对称的区域, 在三维空间中区域关于平面 $x = y$ 、 $y = z$ 或 $z = x$ 对称的区域, 均属于轮换对称性的特殊情形。

注: 轮换变换本质是正交线性坐标变换, 轮换对称的核心是积分域内各变量几何地位完全等价。对于无向积分, 轮换变换的雅可比行列式绝对值 $|J| = 1$, 因此面积元 $d\sigma$ 、体积元 dv 、弧长元 ds 、曲面面积元 dS 的数值完全不变; 又因积分域轮换对称, 变换后区域与自身重合, 仅改变点的坐标命名, 几何范围、测度均无变化, 故积分值相等。对于有向积分, 轮换置换同步交换坐标平面, 带方向的投影微分 $dx dy$, $dy dz$, $dz dx$ 同步轮换, 曲面外侧、曲线正向的定向不会翻转, 只要被积函数与微分同步替换, 积分等式保持成立。

3. 对称性在各类积分中的应用定理

3.1. 定积分中的对称性定理

在对称区间 $[-a, a]$ 上, 奇函数在正负对称位置的函数图像与 x 轴围成的面积大小相等、符号相反, 积分过程中相互抵消; 偶函数在正负对称位置的面积完全重合、符号一致, 积分可等价转化为单侧区间积分的两倍, 这也是对称简化公式成立的直观依据。

定理 1 设函数 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续, 则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & f(-x) = f(x), \\ 0, & f(-x) = -f(x), \\ \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx, & \text{一般情况.} \end{cases}$$

证明 将定积分拆分成区间 $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$ 。

对第一项积分作变量代换, 令 $x = -t$, 则 $dx = -dt$, 上下限由 $x: -a \rightarrow 0$ 变为 $t: a \rightarrow 0$, 代入得

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) = \int_0^a f(-t) dt = \int_0^a f(-x) dx。$$

因此原积分可统一写为

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx。$$

此为一般情形公式。

若 $f(x)$ 为偶函数, 则满足 $f(-x) = f(x)$, 代入得

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(x)] dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

若 $f(x)$ 为奇函数, 则满足 $f(-x) = -f(x)$, 代入得

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) - f(x)] dx = 0.$$

推论 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 若积分区间 $[a, b]$ 关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx.$$

3.2. 重积分中的对称性定理

积分区域 D 关于 x 轴对称, 意味着区域内任意一点均可找到关于 x 轴的对称点。若函数为关于 y 的奇函数, 对称两点处的函数值正负相反, 对应平面面积微元相互抵消; 若为关于 y 的偶函数, 对称两点处函数值完全相等, 积分区域可等价收缩为半区域翻倍计算, 显著简化二重积分的计算。三重积分类似。

3.2.1. 二重积分

定理 2 (奇偶对称性) 设二元函数 $f(x, y)$ 在有界闭域 D 上连续,

(1) 若 D 关于 x 轴对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0, & f(x, -y) = -f(x, y), \\ 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, & f(x, -y) = f(x, y). \end{cases}$$

其中, $D_1 = \{(x, y) \in D \mid y \geq 0\}$ 。

证明 将对称区域 D 拆分为上半区域 $D_1 (y \geq 0)$ 与下半区域 $D_2 (y \leq 0)$, 即 $D = D_1 \cup D_2$, 且 D_1, D_2 除边界外无交集, 因此:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$$

对下半区域 D_2 作变量代换 $y' = -y$, 由于区域 D 关于 x 轴对称, D_2 经变换后与 D_1 完全重合, 且面积微元 $d\sigma = dx dy = dx dy'$, 因此

$$\iint_{D_2} f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, -y') d\sigma = \iint_{D_1} f(x, -y) d\sigma$$

代入原积分公式得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} [f(x, y) + f(x, -y)] d\sigma$$

若 $f(x, y)$ 关于 y 为奇函数, 即 $f(x, -y) = -f(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} [f(x, y) - f(x, y)] d\sigma = 0$$

若 $f(x, y)$ 关于 y 为偶函数, 即 $f(x, -y) = f(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} [f(x, y) + f(x, y)] d\sigma = 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma$$

(2) 若 D 关于 y 轴对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0, & f(-x, y) = -f(x, y), \\ 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, & f(-x, y) = f(x, y). \end{cases}$$

其中, $D_1 = \{(x, y) \in D \mid x \geq 0\}$ 。

(3) 若 D 关于原点对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0, & f(-x, -y) = -f(x, y), \\ 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, & f(-x, -y) = f(x, y). \end{cases}$$

其中, $D_1 = \{(x, y) \in D \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ 。

定理 3 (轮换对称性) 设二元函数 $f(x, y)$ 在有界闭域 D 上连续且 D 关于直线 $y = x$ 对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(y, x) d\sigma = \frac{1}{2} \iint_D [f(x, y) + f(y, x)] d\sigma.$$

推论 若积分区域 D 关于直线 $y = x$ 对称, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(y, x) d\sigma$, 进一步可推得

$$\iint_D x^2 d\sigma = \iint_D y^2 d\sigma = \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma, \text{ 再结合极坐标可以简化计算。}$$

3.2.2. 三重积分

定理 4 (奇偶对称性) 设三元函数 $f(x, y, z)$ 在有界闭域 Ω 上连续, 且 Ω 关于 xy 平面对称, 记 Ω_1 为 Ω 在 xy 平面上方部分, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \begin{cases} 0, & f(x, y, -z) = -f(x, y, z), \\ 2 \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dV, & f(x, y, -z) = f(x, y, z). \end{cases}$$

注: 当三元函数 $f(x, y, z)$ 在有界闭域 Ω 上连续, Ω 关于 yz 平面(或 xz 平面)对称且被积函数关于 x (或 y) 具有奇偶性时, 也有类似结论。

定理 5 (轮换对称性) 设三元函数 $f(x, y, z)$ 在有界闭域 D 上连续且积分区域 Ω 关于变量 x, y, z 具有轮换对称性, 则

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV &= \iiint_{\Omega} f(y, z, x) dV = \iiint_{\Omega} f(z, x, y) dV \\ &= \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} [f(x, y, z) + f(y, z, x) + f(z, x, y)] dV. \end{aligned}$$

推论 若积分区域 Ω 关于平面 $x=y=z$ 对称, 则

$$\iiint_{\Omega} x^2 dV = \iiint_{\Omega} y^2 dV = \iiint_{\Omega} z^2 dV = \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV, \text{ 再结合球坐标可以简化计算。}$$

3.3. 曲线积分中的对称性定理

曲线积分对称性是低维对称理论在空间曲线几何中的延伸, 分为无向的第一型曲线积分与有向的第二型曲线积分两类对称体系。被积函数的奇偶性刻画了函数值在对称变换下的规律。

3.3.1. 第一型曲线积分

定理 6 (奇偶对称性) 设三元函数 $f(x, y, z)$ 在光滑曲线 Γ 上连续, 且 Γ 关于 xy 平面对称, 记 Γ_1 为 Γ 上半部分, 则

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \begin{cases} 0, & f(x, y, -z) = -f(x, y, z), \\ 2 \int_{\Gamma_1} f(x, y, z) ds, & f(x, y, -z) = f(x, y, z). \end{cases}$$

注: 当三元函数 $f(x, y, z)$ 在光滑曲线 Γ 上连续, Γ 关于 yz 平面(或 xz 平面)对称且被积函数关于 x (或 y) 具有奇偶性时, 也有类似结论。

定理 7 (轮换对称性) 设三元函数 $f(x, y, z)$ 在光滑曲线 Γ 上连续, 且 Γ 对变量 x, y, z 具有轮换对称性, 则

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \frac{1}{3} \int_{\Gamma} [f(x, y, z) + f(y, z, x) + f(z, x, y)] ds.$$

3.3.2. 第二型曲线积分

定理 8 设三元函数 $f(x, y, z)$ 在光滑曲线 Γ 上连续, 且 Γ 关于 xy 平面对称, Γ_1 为 Γ 上半部分, 则

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) dz = \begin{cases} 0, & f(x, y, -z) = -f(x, y, z), \\ 2 \int_{\Gamma_1} f(x, y, z) dz, & f(x, y, -z) = f(x, y, z). \end{cases}$$

注: 当三元函数 $f(x, y, z)$ 在光滑曲线 Γ 上连续, Γ 关于 yz 平面(或 xz 平面)对称且被积函数关于 x (或 y) 具有奇偶性时, 也有类似结论。

3.4. 曲面积分中的对称性定理

曲面积分对称性是对称积分理论在三维曲面几何中的高阶拓展, 同样分为无向面积分与有向投影积分两类情形。被积函数的奇偶性建立了对称点处函数取值的对应关系, 构成积分抵消或叠加的代数基础。

3.4.1. 第一型曲面积分

定理 9 设三元函数 $g(x, y, z)$ 在光滑曲面 Σ 上连续, 且 Σ 关于 xy 平面对称, 记 Σ_1 为 Σ 上半部分, 则

$$\iint_{\Sigma} g(x, y, z) dS = \begin{cases} 0, & g(x, y, -z) = -g(x, y, z) \\ 2 \iint_{\Sigma_1} g(x, y, z) dS, & g(x, y, -z) = g(x, y, z). \end{cases}$$

注: 当三元函数 $f(x, y, z)$ 在光滑曲线 Γ 上连续, Γ 关于 yz 平面(或 xz 平面)对称且被积函数关于 x (或 y) 具有奇偶性时, 也有类似结论。

3.4.2. 第二型曲面积分

定理 10 设三元函数 $g(x, y, z)$ 在光滑曲面 Σ 上连续, 且 Σ 关于 xy 平面对称, 记 Σ_1 为 Σ 上半部分, 则

$$\iint_{\Sigma} g(x, y, z) dS = \begin{cases} 2 \iint_{\Sigma_1} g(x, y, z) dS, & g(x, y, -z) = -g(x, y, z) \\ 0, & g(x, y, -z) = g(x, y, z). \end{cases}$$

注 1: 这里奇偶条件与第一型曲面积分相反, 符合第二型曲面积分对方向的对称性。当 Σ 关于 xz 平面或 yz 平面对称时, 只需把 z 换成相应的坐标即可。

注 2: 有向积分在使用轮换变换必须同步替换被积函数与投影微元, 以闭合外侧曲面 Σ 为例。若 f 在光滑曲面 Σ 上连续且积分区域 Σ 关于变量 x, y, z 具有轮换对称性, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dx dy = \iint_{\Sigma} f(y, z, x) dy dz = \iint_{\Sigma} f(z, x, y) dz dx$$

不可仅替换变量、保留原有微分, 否则等式不成立。

4. 典型例题解析

4.1. 定积分例题

例 1 计算定积分 $\int_{-1}^1 \frac{x \sin^2 x}{1+x^2} dx$ 。

解 积分区间 $[-1, 1]$ 关于原点对称, 被积函数 $f(x) = \frac{x \sin^2 x}{1+x^2}$ 满足

$f(-x) = \frac{(-x) \sin^2(-x)}{1+(-x)^2} = -\frac{x \sin^2 x}{1+x^2} = -f(x)$, 因此 $f(x)$ 为奇函数。根据定理 1, 奇函数在关于原点对称的区间上的积分为 0, 故

$$\int_{-1}^1 \frac{x \sin^2 x}{1+x^2} dx = 0。$$

例 2 计算定积分 $I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$ 。

解 记 $f(x) = \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}$ 。由于积分区间 $[0, \pi]$ 关于 $\frac{\pi}{2}$ 对称, 可得

$$\int_0^\pi f(x) dx = \int_0^\pi f(\pi-x) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi [f(x) + f(\pi-x)] dx。$$

而

$$f(x) + f(\pi-x) = \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} + \frac{(\pi-x) \sin(\pi-x)}{1+\cos^2 x} = \frac{(x+\pi-x) \sin x}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi \sin x}{1+\cos^2 x}。$$

$$\int_0^\pi f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi [f(x) + f(\pi-x)] dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx。$$

对右端积分, 取 $u = \cos x$ 。则 $du = -\sin x dx$ 。

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx = \int_0^\pi \frac{-1}{1+\cos^2 t} d(\cos t) = \int_1^{-1} \frac{-1}{1+u^2} du = [\arctan u]_{-1}^1 = \arctan 1 - \arctan(-1) = \frac{\pi}{2}。$$

于是

$$I = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}。$$

4.2. 二重积分例题

例 3 计算二重积分 $\iint_D (x-y) dx dy$, 其中被积区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 。

解 积分区域 D 关于直线 $y = x$ 对称, 被积函数 $f(x, y) = x - y$ 满足

$f(y, x) = y - x = -(x - y) = -f(x, y)$ 。根据定理 3, 若被积函数在关于直线 $y = x$ 对称的区域上满足 $f(y, x) = -f(x, y)$, 则其二重积分为 0, 因此

$$\iint_D (x-y) dx dy = 0。$$

例 4 计算二重积分 $\iint_D (|x| + |y|) dx dy$, 其中被积区域 $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$ 。

解 被积区域 D 关于 x 轴、 y 轴均对称, 被积函数 $|x| + |y|$ 关于 x 和 y 均为偶函数。根据定理 2, 设 D_1 为区域 D 在第一象限的部分, 则有

$$\iint_D (|x| + |y|) dx dy = 4 \iint_{D_1} (x+y) dx dy。$$

又由于区域 D_1 关于 $y = x$ 对称, 故 $\iint_{D_1} x dx dy = \iint_{D_1} y dx dy$, 由此可得:

$$4 \iint_{D_1} (x+y) dx dy = 8 \iint_{D_1} x dx dy。$$

接下来, 计算积分 $\iint_{D_1} x dx dy$ 。

$$\iint_{D_1} x dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} x dy dx = \int_0^1 x(1-x) dx = \int_0^1 (x-x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}。$$

$$\iint_D (|x|+|y|) dx dy = 8 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{3}。$$

4.3. 三重积分例题

例 5 计算单位球内的三重积分 $\iiint_{\Omega} xyz dV$, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ 。

解 单位球 Ω 关于坐标平面 xy 面、 yz 面和 zx 面均对称。被积函数 $f(x, y, z) = xyz$, 且 f 是关于 x 、 y 、 z 的奇函数。应用定理 4, 若被积函数在关于三条坐标平面均对称的空间区域内为奇函数, 则其三重积分为零。得

$$\iiint_{\Omega} xyz dV = 0。$$

例 6 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dV$, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ 。

解 先将被积函数展开

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)。$$

由于积分区域 Ω 关于坐标面 $x=0$ 、 $y=0$ 、 $z=0$ 均对称, 交叉项 xy 、 yz 、 zx 在每个坐标面的取正负方向时能够相互抵消, 因而

$$\iiint_{\Omega} xy dV = \iiint_{\Omega} yz dV = \iiint_{\Omega} zx dV = 0。$$

对于平方项, 由定理 5 的轮换对称性知,

$$\iiint_{\Omega} x^2 dV = \iiint_{\Omega} y^2 dV = \iiint_{\Omega} z^2 dV。$$

故

$$\iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dV = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV = 3 \iiint_{\Omega} x^2 dV。$$

在球坐标下计算 $\iiint_{\Omega} x^2 dV$ 。

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x^2 dV &= \int_0^a \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (r^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta) r^2 \sin \phi d\theta d\phi dr \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right) \left(\int_0^{\pi} \sin^3 \phi d\phi \right) \left(\int_0^a r^4 dr \right) \\ &= \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{a^5}{5} \\ &= \frac{4\pi a^5}{15}。 \end{aligned}$$

综上所述,

$$\iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dV = 3 \iiint_{\Omega} x^2 dV = 3 \cdot \frac{4\pi a^5}{15} = \frac{4\pi a^5}{5}。$$

例 7 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} (xy^2z + x^3z + 2y^2z^3) dv$ 。积分区域 Ω 是由椭圆柱面 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 和平面

$z = -x$ 、 $z = x$ 围成的闭空间区域。

解 对于积分区域, 若 $(x, y, z) \in \Omega$, 则 $(-x, y, -z) \in \Omega$, 且边界 $z = \pm x$ 关于 yz 平面对称。

令 $f_1 = xy^2z$, $f_1(-x, y, -z) = (-x)y^2(-z) = xy^2z = f_1(x, y, z)$ 且 $f_1(-x, y, z) = -xy^2z = -f_1$ 。区域 Ω 关于 yz 面对称, 故该项积分值为 0。

第二项同理, $f_2 = x^3z$ 关于 x 是奇函数, 区域 Ω 关于 yz 面对称, 因此积分 $\iiint_{\Omega} x^3z dv = 0$ 。

$f_3 = 2y^2z^3$ 满足 $f_3(x, y, -z) = 2y^2(-z)^3 = -2y^2z^3 = -f_3$, 故 f_3 关于 z 是奇函数, 区域 Ω 关于 xy 面对称, 积分值为 0。三项积分均为 0, 最终总体积分值 $I = 0$ 。

4.4. 曲线积分例题

例 8 计算第一型曲线积分

$$I = \oint_{\Gamma} (x^2y + z^3) ds,$$

其中 Γ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 与平面 $z = 0$ 的交线。

解 曲线 Γ 是 xy 面上的半径为 2 的圆周, 关于 x 轴、 y 轴和 xy 平面均对称。将被积函数拆分为

$$f(x, y, z) = x^2y, \quad g(x, y, z) = z^3。$$

因 Γ 上有 $z = 0$, 于是 $g(x, y, z) = 0$, 积分后得 $\oint_{\Gamma} z^3 ds = 0$ 。由于 $f(x, y, z)$ 是关于 y 的奇函数, 且 Γ 关于 $y = 0$ 这条直线对称。应用定理 6, 可得

$$\oint_{\Gamma} x^2y ds = 0。$$

综上得 $I = 0 + 0 = 0$ 。

例 9 计算第一型曲线积分

$$I = \oint_{\Gamma} (x^2 + y^2 + 2z^2) ds,$$

其中 Γ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线。

解 令 $I_1 = \oint_{\Gamma} x^2 ds$, $I_2 = \oint_{\Gamma} y^2 ds$, $I_3 = \oint_{\Gamma} z^2 ds$, 由于曲线 Γ 关于 x, y, z 具有轮换对称性。由定理 7 知 $I_1 = I_2 = I_3$ 。又 Γ 上的点均满足 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 原积分可以改写为

$$I = \oint_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds + \oint_{\Gamma} z^2 ds = \oint_{\Gamma} a^2 ds + I_3。$$

计算 $\oint_{\Gamma} a^2 ds$, 交线 Γ 是半径为 a 的圆, 弧长为 $L = 2\pi a$ 。于是

$$\oint_{\Gamma} a^2 ds = a^2 \cdot 2\pi a = 2\pi a^3。$$

$I_1 + I_2 + I_3 = \oint_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds = 2\pi a^3$, 又 $I_1 = I_2 = I_3$, 故 $I_3 = \frac{2\pi a^3}{3}$ 。综上, 积分曲线的值为

$$I = 2\pi a^2 + \frac{2\pi a^3}{3} = \frac{8\pi a^2}{3}。$$

例 10 计算第二型曲线积分

$$I = \int_{\Gamma} (x^2z) dy + (yz^2) dz,$$

其中 Γ 是圆柱面 $x^2 + y^2 = 4$ 与平面 $z = -1$ 、 $z = 1$ 的交线, 从点 $(2, 0, -1)$ 沿 Γ 到点 $(2, 0, 1)$ 从 z 轴正方向看顺时针方向的半圆周。

解 Γ 关于 xy 平面对称。将积分拆分为两部分

$$I = I_1 + I_2 = \int_{\Gamma} x^2 z dy + \int_{\Gamma} yz^2 dz .$$

对于 $I_1 = \int_{\Gamma} x^2 z dy$, Γ 关于 z 对称, 被积函数 $x^2 z$ 是关于 z 的奇函数, 根据定理 8 知,

$$I_1 = \int_{\Gamma} x^2 z dy = 0 .$$

对于 $I_2 = \int_{\Gamma} yz^2 dz$, 被积函数为 yz^2 , 是关于 z 的偶函数。令

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z) \in \Gamma \mid z \geq 0\}, \quad \Gamma_2 = \{(x, y, z) \in \Gamma \mid z \leq 0\} .$$

由定理 8 知,

$$\int_{\Gamma} yz^2 dz = 2 \int_{\Gamma_1} yz^2 dz .$$

代入 Γ_1 的参数方程 $x=2, y=0, z=t$ ($t \in [0, 1]$), 在 Γ_1 上满足 $y=0$ 。因此

$$I_2 = \int_{\Gamma} (yz^2) dz = 0 .$$

由 $I_1 = 0$, $I_2 = 0$, 得 $I = 0$ 。

$$\int_{\Gamma} (x^2 z) dy + (yz^2) dz = 0 .$$

4.5. 曲面积分例题

例 11 计算第一型曲面积分

$$\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS ,$$

其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 被平面 $z = h$ ($0 < h < 1$) 所截的顶部。

解 Σ 关于 xz 平面和 yz 平面对称, 由定理 9 可得

$$\iint_{\Sigma} x dS = \iint_{\Sigma} y dS = 0 .$$

因此

$$\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS = \iint_{\Sigma} z dS .$$

Σ 在 xy 平面投影 $D_{xy} = \{(x, y, z) \in \Sigma \mid x^2 + y^2 \leq 1 - h^2\}$, $dS = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy$, 故

$$\iint_{\Sigma} z dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy = \pi(1 - h^2) .$$

例 12 计算第二型曲面积分

$$I = \int_{\Sigma} (x^2 z) dx dy + (yz^2) dy dz .$$

其中 Σ 是旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 1$ 围成的闭曲面的外侧。

解 Σ 关于 xz 平面对称, 令

$$I = I_1 + I_2 = \int_{\Sigma} x^2 z dx dy + \int_{\Sigma} yz^2 dy dz .$$

对于 $I_1 = \int_{\Sigma} x^2 z dx dy$, 被积函数 $x^2 z$ 是关于 y 的偶函数, 根据定理 10 知,

$$I_1 = \int_{\Sigma} x^2 z dx dy = 0 .$$

对于 $I_2 = \int_{\Sigma} yz^2 dydz$ ，被积函数为 yz^2 ，是关于 y 的奇函数。记 $\Sigma_+ = \{(x, y, z) \in \Sigma \mid y \geq 0\}$ ，由定理 11 知，

$$\int_{\Sigma} yz^2 dydz = 2 \int_{\Sigma_+} yz^2 dydz。$$

记 Σ_{1+} 是抛物面 $z = x^2 + y^2$ 在 $y \geq 0$ 部分的外侧， Σ_{2+} 是平面 $z=1$ 的上侧， Σ_+ 由 Σ_{1+} 和 Σ_{2+} 组成。关于 Σ_{2+} ，平面 $z=1$ 垂直于 yz 平面，故 $dydz = 0$ ， $\int_{\Sigma_{2+}} yz^2 dydz = 0$ ；关于 Σ_{1+} ，抛物面方程可表示为 $x = \pm\sqrt{z-y^2}$ ($y \geq 0, 0 \leq z \leq 1$)，外侧对应 x 正方向与负方向的投影抵消，且被积函数 yz^2 与 x 无关，积分在 x 方向互相抵消，故 $\int_{\Sigma_{1+}} yz^2 dydz = 0$ 。因此 $I_2 = 2 \times 0 = 0$ 。 $I = I_1 + I_2 = 0$ 。即

$$I = \int_{\Sigma} (x^2 z) dx dy + (yz^2) dy dz = 0。$$

例 13 空间静电场强度 $\vec{E}(x, y, z) = (x^2 y, y^2 z, z^2 x)$ ，取半径为 a 的金属球面 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ，球面外侧为正向，求穿过闭合球面的电场总通量。

$$\Phi = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} x^2 y dx dy + y^2 z dy dz + z^2 x dz dx。$$

分析 若直接采用投影法拆分三个曲面积分分别计算，需分别对三个坐标平面投影，处理上下、左右、前后曲面符号，三重累次积分运算量大、极易出现投影符号计算错误；而利用奇偶对称性、轮换对称性可大幅消去零积分项，简化整体求解流程，是电磁场仿真、静电屏蔽工程中的常用简化手段。

解 $I_1 = \iint_{\Sigma} x^2 y dx dy$ ，曲面 Σ 关于 xy 平面对称，被积函数 $f_1 = x^2 y$ 关于 y 为奇函数，依据第二型曲面积分奇偶对称定理(定理 10)知积分值 $I_1 = 0$ 。

$I_3 = \iint_{\Sigma} z^2 x dz dx$ ，曲面 Σ 关于 yz 平面对称，被积函数 $f_3 = z^2 x$ 关于 x 为奇函数，同理可得积分值 $I_3 = 0$ 。

$I_2 = \iint_{\Sigma} y^2 z dy dz$ ，曲面 Σ 关于 xy 平面对称，被积函数 $f_2 = y^2 z$ 关于 z 为奇函数，拆分前半球、后半球曲面 $\Sigma = \Sigma_{\text{前}} + \Sigma_{\text{后}}$ ， $I_2 = 2 \iint_{\Sigma_{\text{前}}} y^2 \sqrt{a^2 - y^2 - z^2} dy dz$ ，再利用 y, z 轮换对称性简化二重积分，极坐标代换计算得 $I_2 = \frac{4}{15} \pi a^5$ 。电场总通量 $\Phi = 0 + \frac{4}{15} \pi a^5 + 0 = \frac{4}{15} \pi a^5$ 。

5. 局限

前文通过奇偶对称性与轮换对称性系统推导了各类积分的简化计算方法，并结合数学例题与工程物理实例验证了方法的高效性。但对称性简化方法并非普适，存在明确的适用边界与使用限制。为保证研究的严谨性与全面性，本章对对称性方法的局限性、易错情形及慎用条件进行讨论。

5.1. 奇偶对称性的适用局限

奇偶对称性简化积分的核心前提是积分区域严格对称且被积函数具备标准奇偶性。当积分区域存在不对称偏移、局部残缺或边界非线性扰动时，对称抵消关系不再成立，此时直接使用奇偶对称会导致结果错误。此外，第二型曲线积分与曲面积分带有方向性，即使区域满足几何对称，若积分方向、曲面法向在对称位置发生翻转，奇偶判定规则会发生改变，不能直接套用无向积分的对称结论。对于含有分段函数、间断函数、绝对值函数的复杂积分，被积函数不一定满足奇偶性，也不能简单通过对称消去积分项。

5.2. 轮换对称性的适用局限

轮换对称性成立的根本条件是积分域对变量 (x, y, z) 几何地位完全等价。若积分区域存在任意变量偏

向约束,例如区域包含 $z \geq 0$, $x \geq y$ 等半限制条件,区域不再完全轮换对称,此时 (x,y,z) 的积分值不再相等,强行使用轮换对称合并积分会产生严重误差。同时,轮换对称仅适用于被积结构齐次、无偏向项的积分形式,若被积函数含有常数偏移项、混合交叉不对称项,轮换等价关系失效。

综合以上分析,利用对称性简化积分计算的方法是一种条件性、辅助性、技巧性的数学方法,而非通用积分算法。其使用必须严格遵循“先判定区域对称性、再验证函数奇偶/轮换性、最后结合积分类型选择定理”的流程。在区域近似对称、函数局部对称、积分方向不对称、工程模型非理想对称的情形下,应当谨慎使用或放弃对称简化,以传统积分方法或数值方法求解,从而保证计算结果的准确性。

6. 结论与展望

本文系统梳理了对称性在积分计算中的核心分类、判定准则和应用定理,并在此基础上构建了一套涵盖定积分、重积分、曲线积分与曲面积分的对称性简化方法体系。典型例题验证表明,对称性方法的核心优势在于不需复杂变量替换或繁琐运算;仅需分析积分区域的对称特征、被积函数的奇偶性,即可实现积分的简化或直接求值,从而显著降低计算复杂度与错误概率。

对称性作为数学中的基本思想方法,其应用不局限于积分计算,还可推广至微分方程、泛函分析等诸多领域。未来研究可进一步探讨对称性在高维积分以及反常积分中的应用规律,并结合数值计算技术开发更高效的求解算法,为复杂工程与科学研究提供便捷工具。同时,在高等数学教学中深化对称性思想,有助于培养学生的数学思维与问题解决能力,进而提升教学质量。

致 谢

本论文的顺利完成,离不开刘敏老师的悉心指导与耐心教诲。在本科生科研训练项目开展及论文撰写过程中,刘老师从选题构思、框架梳理、研究方法运用到内容打磨与修改完善,都给予了我细致专业的指导。老师严谨的治学态度、求真务实的科研精神与精益求精的学术作风,让我受益匪浅。同时,老师在研究过程中给予的诸多宝贵建议,有效帮助我解决了研究中的诸多难题,助力本研究顺利完成。在此,我向刘敏老师致以最诚挚的感谢与崇高的敬意!

基金项目

项目类型:教师指导本科生项目,项目名称:对称性简化积分计算的方法及应用,项目编号:JSZDBKSXM2025059。

参考文献

- [1] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 第7版. 北京: 高等教育出版社, 2014.
- [2] 黄东卫, 王雪歌. 浅谈对称性在积分计算中的应用[J]. 高等数学研究, 2021, 24(2): 19-23.
- [3] 尹松庭. 对称性在积分计算中的运用[J]. 乐山师范学院学报, 2021, 36(12): 1-4.
- [4] 金世国. 对称性在定积分、重积分中的应用[J]. 山东工业技术, 2017(18): 237-238.
- [5] 刘红梅. 二重积分计算巧用对称性简化求解[J]. 普洱学院学报, 2018, 34(6): 45-47.
- [6] 朱玉. 重积分计算中对称性的应用[J]. 高等数学研究, 2019, 22(2): 17-18.
- [7] 马志辉. 对称性在积分计算中的应用[J]. 高等数学研究, 2017, 20(1): 102-105.
- [8] 王晓东, 李义强. 重积分对称性的数学原理及应用[J]. 高等数学研究, 2022, 25(2): 73-78.
- [9] 郑芳. 轮换对称性在多元函数积分计算中的应用[J]. 高等数学研究, 2022, 25(2): 22-24.
- [10] 赵莉莉. 曲线积分与曲面积分的对称性及其应用[J]. 佛山科学技术学院学报(自然科学版), 2024, 42(2): 6-15.