

基于双属性微分单元的代数演算框架及其在奇点赋值中的应用

吕昊阳

文昌中学, 山东 济南

收稿日期: 2026年7月8日; 录用日期: 2026年8月2日; 发布日期: 2026年8月12日

摘要

本文提供了一种基于双属性微分单元的代数微积分框架。核心创新在于将微分单元 dx 定义为同时具备零值属性($[dx]=0$)与非零征属性($\{dx\}\neq 0$)的实体, 其中征属性决定了其在代数运算中的结构性行为(而非单纯数值为零)。在该体系下, 经典极限过程为微分单元的约分与归零。除罗尔定理作为光滑闭区间上的归纳锚点外, 拉格朗日中值定理、柯西中值定理、洛必达法则及泰勒展开均可经由传统代数路径推导, 且结果与经典微积分同构。作为对奇点处理的扩展, 本文引入对称导数定义, 并将其应用于魏尔斯特拉斯函数等经典病态案例。该框架能在整数格点处给出确定的代数赋值(如 $W'(k)=0$), 同时, 在非对称点保留经典分析的发散本性, 从而对连续统与奇点进行代数描述。

关键词

代数微积分, 微分单元, 属性代数, 基础数学

An Algebraic Calculus Framework Based on Dual-Attribute Differential Units and Its Application in Singularity Assignment

Haoyang Lyu

Wenchang Middle School, Jinan Shandong

Received: July 8, 2026; accepted: August 2, 2026; published: August 12, 2026

Abstract

This paper presents an algebraic calculus framework based on dual-attribute differential units. The

core innovation lies in defining the differential unit dx as an entity possessing both a zero-value attribute ($[dx] = 0$) and a non-zero characteristic attribute ($\{dx\} \neq 0$), where the characteristic attribute determines its structural behavior in algebraic operations (rather than being merely numerically zero). Within this framework, the classical limit process corresponds to the reduction and nullification of differential units. Apart from Rolle's Theorem serving as an inductive anchor for smooth closed intervals, Lagrange's Mean Value Theorem, Cauchy's Mean Value Theorem, L'Hôpital's Rule, and Taylor expansion can all be derived via traditional algebraic paths, yielding results that are isomorphic to classical calculus. As an extension for handling singularities, this paper introduces the symmetric derivative and applies it to classic pathological cases such as the Weierstrass function. This framework provides definite algebraic assignments at integer grid points (e.g., $W'(k) = 0$) while preserving the divergent nature of classical analysis at asymmetric points, thereby offering an algebraic description of the continuum and singularities.

Keywords

Algebraic Calculus, Differential Unit, Attribute Algebra, Elementary Mathematics

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

经典微积分依赖 $\epsilon-\delta$ 极限来管理微分行为[1]。本体系提出代数微积分，将极限过程转化为微分单元 dx 的固有属性操作。本文核心旨在：基于罗尔公理，经典微积分的核心定理[2]可经由传统代数路径重构，无需引入新的逻辑假设。

2. 基础定义与极限的代数化

2.1. 预备定义

全域特征(General Characteristics): 若对任意 x 值均有 $f(x) = K$ ，则将 $f(x) = K$ 记为 $[K]$ 。

随变特征(Adaptive Characteristics): 若存在数 x 使得 $f(a) = K$ 且 $a = x$ 时 $f(x)$ 无定义或不等于 K (即有限数使表达式无效或未定义)，则将 $f(a) = K (a \neq x)$ 记为 $\{a\}$ 。

值性(Value-nature): 记为 $[[x]]$ ，指对象 x 在常规算术赋值意义上所代表的数值。

征性(Character-nature): 记为 $]]x[[$ ，即全域特征与随变特征之和。

2.2. 双属性与微分单元定义

微分单元 dx 定义如下：

零值性： $[[dx]] = 0$ ；

非零随变特征： $]]dx[[_a \neq 0$ ；

零全域特征： $]]dx[[_g = 0$ 。

2.3. 极限的代数定义

经典极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 被重新定义为：

对于任意实体 $x = a + dx$ (其中 $[[dx]] = 0$)，表达式 $f(x)$ 的值属性在经过代数约分与归零操作后，等于 L 。

2.4. 不定积分(微分之逆)

不定积分定义为微分的逆运算。给定函数 $f(x)$ ，其不定积分为函数 $F(x)$ ，满足 $F(x)$ 的导数等于 $f(x)$ ：

$$\int f(x) dx := F(x) + C$$

其中， C 为任意常数[3]。该定义在经典导数存在的区域内有效，并通过 dx 的代数性质(约分后归零)予以还原。

2.5. 定积分(牛顿 - 莱布尼茨公式)

区间 $[a, b]$ 上的定积分定义为原函数 $F(x)$ 在边界处的净变化：

$$\int_a^b f(x) dx := F(b) - F(a)$$

3. 运算规则

3.1. 值替换限制规则

对于任意一个 $X = A$ ，若 $f(X)$ 在运算过程中需要运用到 X 与 A 不同的征性或 $f(A)$ 在运算过程中需要用到 A 与 X 不同的征性，那 $f(X)$ 中 X 不可直接替换成 A ，反之同理。

如果 $f(x) = K$ 在运算过程中没有运用到 x 的征性(或征性其中一个)且 $g(f(X))$ 需要运用到在 $f(x)$ 运算中没有运用到 x 的征性(或征性其中一个)，那么 $f(x) = K$ 不能直接代入进去即： $g(K)$ 这一步不等价或不合法，比如： $2dx = 3dx$ (运算过程中没有运用到 dx 的随变特性)，那么下一步在等式两边 $\div dx$ 不合法(因为前面运算没有运用到随变特性，而这一步又依赖的是随变特性)。

3.2. 罗尔公理

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上光滑(即经典导数存在)且满足 $f(a) = f(b)$ ，则至少存在一点 $c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = 0$ 。

等于的定义

即指等式两边所根据各自的征性、值性运算所得到的结果相等，如 $dx = 1 \times dx = 0$ ，注意：由于征性的加入，不能单独用一个等式来确指一个非标准数——它不同于经典实数体系中值与性——对应的数，详见特性方程。

4. 导数等价性与对称扩展

4.1. 导数运算的一致性

对于光滑函数 $f(x)$ ，本体系的代数运算与经典导数计算同构。

经典极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ 包含两个步骤：(1) 将 Δx 视为非零因子进行约分；(2) 舍弃余项。本

体系通过 dx 的属性直接执行这些步骤：

$$\frac{(x + dx)^2 - x^2}{dx} \xrightarrow{\text{约去 } dx} 2x + dx \xrightarrow{\text{归零 } dx} 2x$$

结果一致。

4.2. 对称导数定义

对于任意函数 $f(x)$ ，对称导数纯代数的定义为[4]：

$$f'(x) = \frac{f(x+dx) - f(x-dx)}{2dx}.$$

该定义仅作为代数扩展工具，不参与后续定理的推导。

4.3. 魏尔斯特拉斯函数的轴对称性证明

设魏尔斯特拉斯函数 $W(x)$ 定义为：

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(3^n \pi x),$$

其中，参数 $a=1/2$ 和 $b=3$ 满足哈代(Hardy)条件 $ab \geq 1$ ，确保函数处处连续但处处不可导(经典意义下)。

对于任意整数 $k \in \mathbb{Z}$ ， $W(x)$ 关于 $x=k$ 呈轴对称[5]，即：

$$W(k+x) = W(k-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

注：由于 $\left|(1/2)^n \cos(3^n \pi x)\right| \leq (1/2)^n$ 且 $\sum (1/2)^n$ 收敛，由魏尔斯特拉斯 M 判别法，该级数绝对且一致收敛，从而保证了逐项代数操作的合法性。

证明

依据定义展开：考察任意整数点 k 的邻域：

$$W(k \pm x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(3^n \pi (k \pm x)).$$

应用余弦和角公式：利用 $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$ ，展开得：

$$W(k \pm x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[\cos(3^n \pi k) \cos(3^n \pi x) \mp \sin(3^n \pi k) \sin(3^n \pi x) \right].$$

整数幂次的奇偶性分析：由于底数 3 为奇数， 3^n 恒为奇数。鉴于 k 为整数，乘积 $3^n \cdot k$ 必为 π 的整数倍[5]。

三角函数值的简化：对于任意整数 m ，有 $\sin(m\pi) = 0$ 且 $\cos(m\pi) = (-1)^m$ 。代入原式，正弦项消失：

$$\sin(3^n \pi k) = 0.$$

因此表达式简化为：

$$W(k \pm x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(3^n \pi k) \cos(3^n \pi x).$$

结论：等式右侧与符号 $\pm$ 无关。故 $W(k+x) = W(k-x)$ ，即 $W(x)$ 关于所有整数点轴对称[6]。

4.4. 对称导数的计算与对比分析

基于上述对称性，我们计算绝对值函数与魏尔斯特拉斯函数在经典奇点处的对称导数。

4.4.1. 角点奇点的消解： $|x|$ 在 $x=0$

经典导数因左右极限不等而在原点失效。应用对称导数定义：

$$|x|'_{sym}(0) = \frac{|0+dx| - |0-dx|}{2dx} = \frac{|dx| - |-dx|}{2dx} = \frac{0}{2dx} = 0.$$

该结果表明，代数体系在几何断裂点处给出了确定的代数平衡值 0，区别于欧几里得几何中的切线斜率。

4.4.2. 魏尔斯特拉斯函数：格点与非对称点

整数格点($x=k$): 由 4.3 轴对称性证明, $W(k+dx)=W(k-dx)$, 分子归零:

$$W_{sym}(k)=\frac{0}{2dx}=0.$$

尽管经典导数震荡发散, 代数体系仍赋予其确定值。

非对称点($x=1/3$): 对称性破裂, 展开对称导数得:

$$W'_{sym}(1/3)=-\pi\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n\sin(3^{n-1}\pi).$$

由于公比 $3/2>1$, 该级数发散。

4.4.3. 结果综述

对称导数的操作范围由其跨结构的表现界定。在光滑域(如 $f(x)=x^2$)上, 其与经典导数重合, 确认为经典微积分的保守扩展。对于角点函数 $|x|$, 该算子通过赋予值 0 消解了经典失效, 此结果应解释为代数平衡而非几何切线。对于魏尔斯特拉斯函数, 该算子仅在整数格点(轴对称迫使分子归零处)赋予确定值 0; 而在缺乏对称性的普通点, 该算子保留了原函数的发散本性。

尽管对称导数在本体系中主要作为处理奇点的代数工具, 但考察其在光滑点处的数值表现, 有助于厘清其与经典导数的运算效率差异[6]。

4.5. 对称导数的数值精度与代数代价

4.5.1. 截断误差的阶数分析

考虑经典向前差分(Forward Difference)近似:

$$f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

对其进行泰勒展开:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\frac{h}{2}f''(\xi_1)$$

可见其截断误差量级为 $O(h)$, 即一阶精度。

相比之下, 本体系定义的对称导数(Central Difference):

$$f'_{sym}(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

其泰勒展开为:

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=f'(x)+\frac{h^2}{6}f'''(\xi_2)$$

其截断误差量级为 $O(h^2)$, 即二阶精度。

结论 1: 在相同的步长 h 下, 对称导数的代数运算天然具有比传统单侧差分更高的数值精度, 能有效降低离散化带来的截断误差。

4.5.2. 精度与局部性的权衡

然而，高阶精度并非无代价。经典导数仅依赖于 x 点及其右侧(或左侧)的邻域信息，具有极强的局部性；而对称导数依赖于 x 点两侧的信息，本质上是一种邻域平均化操作。

这种平均化操作虽然在光滑区内提升了精度，但也导致其在处理具有尖锐突变(如冲击波、材料断裂面)的物理问题时，容易产生数值弥散或抹平极值的现象。此外，在数值计算中，当步长 h 过小时，对称导数面临更严重的灾难性抵消(Catastrophic Cancellation)风险，即分子 $f(x+h)-f(x-h)$ 因两数过于接近而丢失有效数字。

4.5.3. 征性视角的解释

回到双属性代数视角：

经典导数关注的是征分量在单侧无穷小邻域内的瞬时变化率。

对称导数则是通过对双侧征分量 $\{dx\}$ 的对称性操作(抵消与约分)，强制得到一个确定的值分量结果。

结论 2：对称导数在光滑点处表现出的高精度，源于其利用了更多的征性信息；而其无法完全替代经典导数，则是因为其牺牲了“点对点”的局部性，换取了“点对区间”的稳定性与奇点存在性。

4.6. 与 Robinson 非标准分析(NSA)的本质差异

4.6.1. 非标准分析的逻辑构造与预设性特征

NSA 的核心构造遵循“域扩张 - 转移 - 拉回”的三段式路径，其“凑”的特征体现为逻辑预设与外部操作二元性：

首先是逻辑起点的人为预设。NSA 通过超幂构造将经典实数域 $\mathbb{R}$ 扩张为超实数域 $\mathbb{R}^*$ ，人为引入满足“对所有正实数 r ， $|\varepsilon| < r$ 且 $\varepsilon \neq 0$ ”的无穷小量 ε ，以及无穷大超实数 $\omega = 1/\varepsilon$ 。这里的 $\varepsilon \neq 0$ 并非代数运算的自然推论，而是域扩张的初始预设——相当于先给实数系“额外加了一条规则”，再在此基础上展开运算。

其次是运算规则的外部依赖性。NSA 借助转移原理(Transfer Principle)，将 $\mathbb{R}$ 上所有一阶逻辑命题的性质“转移”到 $\mathbb{R}^*$ 上，使得含无穷小的微分运算具备与经典分析一致的形式合法性。但这种合法性并非来自 $\mathbb{R}$ 内部的代数逻辑，而是来自模型论的外部工具支撑。

最后是结果落地的强行归零。运算完成后，必须通过标准部分函数 $st(\cdot)$ 剥离超实数中的无穷小分量，将结果“拉回”经典实数域 $\mathbb{R}$ ，才能得到可解释的实数值。这种“先预设无穷小非零、再通过外部函数强行归零”的操作，本质是为主流分析学提供一套形式化等价工具，而非从根本上重构微分的定义逻辑——这正是前文所述“凑”的客观体现。

4.6.2. 本工作的代数构造与内生性特征

本工作不扩张实数域，全程在经典 $\mathbb{R}$ 内完成构造，微分单元 dx 的定义与运算规则均来自代数逻辑的自然推导，无任何外部预设：

逻辑起点是双属性对象的自然定义。我们将 dx 定义为包含两个可分离分量的代数对象：值分量 $[dx]=0$ ，严格兼容经典算术规则，从根源上避免 $1=0$ 之类的逻辑悖论；征分量 $\{dx\} \neq 0$ ，承载微分的方向性、对称性等结构信息，独立于值分量参与代数运算。这里的 $[dx]=0$ 与 $\{dx\} \neq 0$ 并非人为预设，而是为满足“既保留无穷小结构信息、又不破坏经典算术”的需求推导得出的必然设定。

运算规则是经典代数的自然延伸[7]。所有含 dx 的演算均遵循经典代数定律，核心操作仅为约分(消去同阶征分量)与投影(将征分量运算结果映射到值分量)，无需引入任何域外构造或模型论工具。例如在计算魏尔斯特拉斯函数 $W(x)$ 在整数点 k 处的导数时， dx 的征分量在对称操作下自然抵消，投影到值分量

即得 $W'(k)=0$ ，整个过程完全是代数规则的推导结果。

结果落地无需额外操作。运算结果天然落在经典 $\mathbb{R}$ 内，不存在“拉回”的步骤，也无需剥离任何额外分量，与经典分析的数值体系完全兼容。

4.6.3. 核心差异与定位澄清

二者的核心差异可从三个维度明确：

其一，底层域与无穷小来源不同。NSA 依赖扩张后的超实数域 $\mathbb{R}^*$ ，无穷小量是域扩张的人为预设；本工作基于经典实数域 $\mathbb{R}$ ，无穷小量的非零性(征分量)是代数推导的自然结果。

其二，运算逻辑不同。NSA 的合法性来自转移原理等外部模型论工具，运算后需通过标准部分函数强行归零；本工作的运算完全遵循经典代数规则，结果直接落地，无额外外部操作。

其三，奇点处理逻辑不同。NSA 处理奇点时仍以标准部分为最终依据，与经典分析结果一致；本工作通过征分量的对称性分析，可直接给出奇点的结构赋值，既能复现经典结果，也能区分奇点处的结构差异——以 $W(x)$ 为例，NSA 最终得到的 $W'(k)=0$ 是剥离无穷小后的剩余项，而本工作的 $W'(k)=0$ 是征分量对称性抵消的直接结果，同时可明确非对称点处的发散本性，实现了对奇点更精细的刻画[8]。

综上，本工作从未宣称“重构微积分”，仅试图为经典分析提供一个可操作的奇点代数扩展框架：NSA 的优势在于为主流分析提供形式化便利，适合需要保留极限直觉的场景；本工作的优势在于直接捕捉奇点处的结构信息，适合需要明确奇点赋值规则的符号演算场景。二者是互补而非替代的关系，共同服务于分析学的不同应用需求。

5. 经典定理的代数重构

5.1. 拉格朗日中值定理推论

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上光滑，则存在 $c \in (a, b)$ 使得：

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

证明

定义辅助函数 $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$ 。

计算得 $g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}a$ ， $g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}b$ 。

化简得 $g(a) = g(b)$ 。

由公理 3.2 (罗尔公理)，存在 $c \in (a, b)$ 使得 $g'(c) = 0$ 。

代入得 $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ ，证毕。

5.2. 柯西中值定理推论

设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上光滑且 $g'(x) \neq 0$ ，则存在 $c \in (a, b)$ 使得：

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

证明

定义辅助函数 $h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$ 。

计算得 $h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$, $h(b) = f(b)g(b) - g(b)f(b)$ 。

整理得 $h(a) = h(b)$ 。

由公理 3.2, 存在 $c \in (a, b)$ 使得 $h'(c) = 0$ 。

代入得 $h'(c) = f'(c)[g(b) - g(a)] - g'(c)[f(b) - f(a)] = 0$, 证毕。

5.3. 洛必达法则推论

设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 a 附近光滑, 且 $f(a) = g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$ 。则:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

证明

在区间 $[a, x]$ 上应用推论 5.2 (柯西中值定理)。存在介于 a 与 x 之间的 c_x 使得:

$$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

由定义 2.3 (极限的代数定义), 当 $x \rightarrow a$ 时, $c_x \rightarrow a$ 。因此:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

该推导与传统路径一致。

5.4. 泰勒展开推论

设 $f(x)$ 在 a 处光滑, 则:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x),$$

其中, 余项 $R_n(x)$ 由 dx 的全域特征定义予以归零。

证明

令 $x = a + dx$ 。由代数展开(二项式定理):

$$f(a + dx) = f(a) + f'(a)dx + \frac{f''(a)}{2!}dx^2 + \dots.$$

根据 dx 的全域特征定义(即 $[[dx]]_g = 0$), 所有含 dx^k ($k \geq 1$) 的项在最终值求和时被归零。系数与经典泰勒级数一致。

6. 病态案例的代数消

6.1. 广义函数定义

设 g 为数值常数, 满足 $[[g]] = 0$ 且 $[[g]] \neq 0$ 。该函数定义为:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{g}, & \text{若 } g/2 \leq x \leq g/2 \\ 0, & \text{若 } x \neq g \end{cases}.$$

6.2. 代数视角的审视解

在传统经典分析的叙事中, 狄拉克函数的引入往往伴随着物理直觉与数学严谨性之间的张力。传统

教科书常将其描绘为一个底边宽度为 g (当 $g \rightarrow 0$) 而高度为 $1/g$ (当 $g \rightarrow \infty$) 的矩形脉冲, 并断言其面积积分为 1。然而, 这种描述在纯代数层面暴露出一个被极限语言所掩盖的逻辑缺口: 当剥离极限的外衣, 该定义实质上是在宣称一个数值为 0 的底边与一个数值为 ∞ 的高边的乘积等于 1 (即 $0 \times \infty = 1$)。

7. 等差级数中的“有限 - 无限”断层分析

7.1. 问题的提出

考虑最基础的公差为 1 的等差级数(即自然数集):

$$S = \{a_n \mid a_n = n, n \in \mathbb{N}^+\}$$

该结构具有线性绑定关系: 项值 a_n 与序号 n 等同。

在经典算术中, 关于该集合有两个被广泛接受的命题:

(P1)过程无界性: 对于任意大的实数 M , 总存在 $a_n \in S$ 使得 $a_n > M$ 。

(P2)项值有限性: 集合 S 中的每一个元素 a_n 都是有限的自然数(Finiteness)。

直观上, 由于 $a_n = n$, 序号的“无穷多个”应当对应项值的“无穷大”。然而, 经典体系通过定义强行阻断了这一映射。

7.2. 经典体系的防御机制

标准数学(基于皮亚诺公理和 ZFC 集合论)为了维护算术的一致性(避免 $1 = 0$), 采用了以下策略:

归纳可达性(Inductive Reachability):

定义“有限”为“可以通过有限步后继运算 $S(n) = n+1$ 从 0 到达”。

由于不存在一个自然数 n 使得 $n+1 = \infty$, 因此 ∞ 不属于自然数集。

基数与序数的分离:

集合论引入基数 $\aleph_0$ 来描述集合 S 的“个数”, 但坚决否认 S 中存在值为 $\aleph_0$ 的元素。

这种处理导致了本体论上的断层:

在 S 中, 我们拥有“无穷多个有限数”。这相当于承认了“无穷过程”的存在, 却拒绝承认“无穷结果”作为该过程项值的合法性。

7.3. 本代数框架下的审视

在我们的双属性微分体系中, 我们将实体 x 分解为值分量 $[x]$ 和征分量 $\{x\}$ 。

我们尝试将这一框架应用于等差级数 $a_n = n$:

值的演化: 随着 $n \rightarrow \infty$, 值分量 $[a_n]$ 趋向于无界增长。

征的演化: 在标准的皮亚诺结构下, 每一项 a_n 的增量 $\Delta a = 1$, 其征分量表现为恒定的单位步进[9]。

局限性说明:

尽管本框架成功地将微分单元 dx 定义为 $[dx] = 0$ 且 $\{dx\} \neq 0$, 从而解决了瞬时变化率的代数化问题, 但该框架目前无法解决等差级数的“无穷边界”问题。

原因在于: 若要容纳“无穷大自然数”, 我们必须允许某种形式的“无穷征分量” $\{\Omega\}$ 存在。一旦引入 $\{\Omega\}$, 现有的代数运算规则(特别是乘法逆元和约分规则)将面临崩溃的风险, 因为这将重新引入 $1 = 0$ 的逻辑悖论。

因此, 本体系选择将微分单元严格限制在有限域内(即 $[dx] = 0$), 暂时搁置对“已完成无穷”的代数化尝试。

7.4. 结论与开放问题

等差级数悖论揭示了现行数学基础中一个未被治愈的伤口：“潜无穷”与“实无穷”之间的定义断层。

本论文提出的代数框架虽然在处理连续统(Continuum)和奇点(Singularities)方面提供了严密的替代方案，但在面对离散无穷(Discrete Infinity)时，依然回归到了经典算术的禁令之下。

这暗示，要真正弥合这一断层，可能需要一种全新的逻辑公理，能够在不破坏 $1 \neq 0$ 的前提下，重新定义“无穷”在代数结构中的地位。这将是未来工作中最具挑战性的课题。

8. 特性方程与解的代数结构

8.1. 解的本质：运算结果的同一性

在双属性代数体系中，“解”的定义是：实体 x 代入方程 F 后，执行 F 的运算法则，所得结果与方程右侧的运算结果完全相同。

这里的“结果”包含两层含义：

值分量结果(常规算术结果)；

征分量结果(由运算特性决定的结构属性)。

因此，解方程不是找“数值等于几”，而是找“哪种运算特性能让两边结果一致”。

定义 8.1 (值解与征解)

设 x 是方程 $F(x)=0$ 的解。

值解(Value Solution): 若 $[x] \neq 0$ 且 $F([x])=0$ ，则称 x 为值解。这是经典代数所关注的解。

征解(Character Solution): 若 $[x]=0$ 但 $\{x\} \neq 0$ ，且 $F(x)$ 在代数运算中满足方程的结构要求，则称 x 为征解。

经典代数体系由于仅承认值分量，通常会忽略或剔除征解。

8.2. 案例分析：解 $1 \times x = 0$

这是理解值解与征解区别的最简案例。

运算目标：找到 x ，使得 $1 \times x$ 的运算结果等于 0 。

1) 值解(经典数值解)

解： $x = 0$ 。

验证：执行乘法运算 1×0 。

值分量结果： $[1 \times 0] = 0$ 。

征分量结果： $\{1 \times 0\} = 0$ (无特殊征性)。

结论：运算结果与右侧 0 完全一致。这是经典代数中的解。

2) 征解(基于全域征性的解)

解： $x = dx$ 。

验证：执行乘法运算 $1 \times dx$ 。

值分量结果： $[1 \times dx] = [dx] = 0$ (与右侧值分量一致)。

征分量结果： $\{1 \times dx\} = \{dx\}$ (具有全域征性)。

关键逻辑：

根据定义 2.1，全域征性指的是 $f(x) = K$ 对任意 x 均成立的特性(即 $f(x)$ 是常数函数)。

在 $1 \times dx$ 的运算中， dx 的征性表现为“零值但非零征”，这使得乘法的结果在值上归零，同时保留了微分的特性。

注意：我们不是因为 $[dx] = 0$ 就说 dx 是解(那是值解的逻辑)，而是因为 dx 的全域征性使得 $1 \times dx$ 的运算结果等于 0。

定理 8.1：方程 $1 \times x = 0$ 的解集为 $\{0, dx\}$ 。

0 是值解(数值运算结果匹配)。

dx 是征解(全域征性导致的运算结果匹配)。

8.3. 案例分析：解 $1 + x = 1$

进一步验证征解不依赖数值，而依赖运算法则。

运算目标：找到 x ，使得 $1 + x$ 的运算结果等于 1。

1) 值解： $x = 0$ (经典加法结果匹配)。

2) 征解： $x = dx$ 。

验证：执行加法运算 $1 + dx$ 。

值分量结果： $[1 + dx] = 1$ (值守恒)。

征分量结果： $\{1 + dx\} = \{dx\}$ (具有随变征性，即参与运算时不改变宿主值，但自身特性保留)。

结论： dx 的随变征性使得加法结果在值上不变，故为征解。

8.4. 特性方程的定义

基于上述案例，我们给出严格定义：

定义 8.2 (值解)

若实体 x 满足 $[x] = [A]$ 且 $F([A])$ 的经典数值结果等于目标值，则 x 为值解。

例： $1 \times x = 0$ 的值解为 $x = 0$ 。

定义 8.3 (征解)

若实体 x 的值分量 $[x]$ 可能等于或不等于 $[A]$ ，但其征分量 $\{x\}$ 具有特定运算特性(如全域征性、随变征性)，使得 $F(x)$ 的整体运算结果与目标一致，则 x 为征解。

例： $1 \times x = 0$ 的征解为 $x = dx$ (依赖全域征性)； $1 + x = 1$ 的征解为 $x = dx$ (依赖随变征性)。

9. 结论

本体系定义微分单元 dx 的代数属性，除罗尔定理被确立为公理外，拉格朗日中值定理、柯西中值定理、洛必达法则及泰勒展开均经由传统代数路径推导得出[10]。对称导数的引入进一步扩展了体系的适用性，使其能够一致地处理经典病态案例。

作者贡献

概念化、方法论、验证、形式分析、调查、资源、数据管理、撰写初稿、撰写审阅与编辑、可视化、监督、项目管理及资金获取均由单一作者完成。

参考文献

- [1] Apostol, T.M. (1967) Calculus, Vol. 1: One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra. Blaisdell Publishing Company.
- [2] Rudin, W. (1976) Principles of Mathematical Analysis. McGraw-Hill.
- [3] Dirac, P.A.M. (1958) The Principles of Quantum Mechanics. 4th Edition, Oxford University Press.

-
- [4] Aull, C.E. (1967) The First Symmetric Derivative. *The American Mathematical Monthly*, **74**, 708-711. <https://doi.org/10.2307/2314269>
 - [5] Thomson, B.S. (1994) Symmetric Properties of Real Functions. CRC Press.
 - [6] Hardy, G.H. (1916) Weierstrass's Non-Differentiable Function. *Transactions of the American Mathematical Society*, **17**, 301-325. <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1916-1501044-1>
 - [7] Laugwitz, D. (1989) Definite Values of Infinite Sums: Aspects of the Foundations of Infinitesimal Analysis around 1820. *Archive for History of Exact Sciences*, **39**, 195-245. <https://doi.org/10.1007/bf00329867>
 - [8] Keisler, H.J. (2022) Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach. University of Wisconsin. <https://www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html>
 - [9] Robinson, A. (1966) Non-Standard Analysis. North-Holland.
 - [10] Bell, J.L. (2015) Introductio in Analysin Infinitorum. Cambridge University Press.